DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.12.007

广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=\dfrac{n}{d}$ 的可解性①

张 四 保

喀什大学 数学与统计学院，新疆 喀什 844008

摘要： 令 n 是一正整数，$\varphi_e(n)$ 为广义 Euler 函数. 广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 与莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 有着密切的关系. 利用广义 Euler 函数 $\varphi_6(n)$ 的计算公式与分类讨论的方式讨论了广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=\dfrac{n}{d}$ 的可解性，给出了该方程正整数解的情况，其中 d 是 n 的正因数.

关 键 词： 广义 Euler 函数；方程；正整数解

中图分类号： O156.2 **文献标志码：** A **文章编号：** 1673-9868(2019)12-0050-07

在将 Lehmer 同余式从模素数的平方推广到模任意整数的平方[1-2]时，文献[3-4]定义了广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$，其中 e 为正整数，其值等于序列 $0,1,2,\cdots,\left[\dfrac{n}{e}\right]$ 中与 n 互素的整数的个数. 广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 一经提出，不少学者对它的性质进行了讨论[3-7]，且对于包含广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 的方程有一定的研究[8-14]. 文献[15]讨论了方程 $\varphi_e(n)=\dfrac{n}{d}$ 的可解性，其中 $e=1,2,4$，d 是 n 的正因数. 文献[16]讨论了方程 $\varphi_3(n)=\dfrac{n}{d}$ 的可解性. 本文将讨论有关广义 Euler 函数 $\varphi_6(n)$ 的方程

$$\varphi_6(n)=\frac{n}{d} \tag{1}$$

的可解性，采用分类讨论的方式及初等方法，给出该方程的整数解的情况.

引理 1[5] 若 $n>6$，$n=2^{\alpha}3^{\beta}\prod\limits_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$，其中 $\alpha,\beta,\alpha_i\geqslant 0$，$(q_i,6)=1$，$1\leqslant i\leqslant k$，则：

(i) 若 $\alpha=0$，$\beta\in[0,1]$，$q_i\equiv 5\pmod 6$，$1\leqslant i\leqslant k$，则 $\varphi_6(n)=\dfrac{\varphi(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)+1-\beta}}{6}$；

(ii) 若 $\alpha=1$，$\beta\in[0,1]$，$q_i\equiv 5\pmod 6$，$1\leqslant i\leqslant k$，则 $\varphi_6(n)=\dfrac{\varphi(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1-\beta}}{6}$；

(iii) 若 $\alpha\geqslant 2$，$\beta\in[0,1]$，$q_i\equiv 5\pmod 6$，$1\leqslant i\leqslant k$，则 $\varphi_6(n)=\dfrac{\varphi(n)-(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\beta}}{6}$；

---

① 收稿日期：2018-08-02
基金项目：新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2017D01A13).
作者简介：张四保(1978-)，男，副教授，主要从事数论的研究.

(ⅳ) 其它情况下，$\varphi_6(n)=\dfrac{\varphi(n)}{6}$.

定理1 若 $n>6$，$n=3^{\beta}\prod\limits_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$，$\beta\in[0,1]$，$\alpha_i\geqslant 0$，$(q_i,6)=1$，$q_i\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$，$1\leqslant i\leqslant k$，则

(Ⅰ) 当 $\beta=0$ 时，方程(1)有解 $(n,d)=(11,11)$；

(Ⅱ) 当 $\beta=1$ 时，方程(1)无解.

证 (Ⅰ) 当 $\beta=0$ 时，$n=\prod\limits_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$，由引理1有

$$\varphi_6(n)=\frac{\varphi(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)+1}}{6}$$

则有

$$d\left(\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^k\right)=3\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i} \tag{2}$$

当 $k=1$ 时，$\omega(n)=1$，则由(2)式有

$$(-1)^{\Omega(n)}2d=q_1^{\alpha_1-1}\left(3q_1-\frac{q_1-1}{2}d\right) \tag{3}$$

由于 d 是 n 的因数，设 $d=q_1^{\delta_1}$，$0\leqslant\delta_1\leqslant\alpha_1$.

当 $\delta_1=\alpha_1$ 时，由(3)式有 $\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\alpha_1-1}=5$，或者 $\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\alpha_1-1}=1$. 当 $\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\alpha_1-1}=5$ 时，有 $q_1=11$，$\Omega(n)=\alpha_1=1$，此时 $n=11$，$d=11$，即方程(1)有解 $(n,d)=(11,11)$；当 $\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\alpha_1-1}=1$ 时，有 $\Omega(n)=\alpha_1=1$，$q_1=3$，由于 $q_1\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$，则 $q_1=3$ 并不满足，则方程(1)无解.

当 $0\leqslant\delta_1<\alpha_1$ 时，由(3)式有

$$(-1)^{\Omega(n)}2=q_1^{\alpha_1-\delta_1-1}\left(3q_1-\frac{q_1-1}{2}q_1^{\delta_1}\right) \tag{4}$$

由于 $q_1\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$，则由(4)式可得 $\alpha_1-\delta_1-1=0$，$3q_1-\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\delta_1}=2$ 或 $3q_1-\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\delta_1}=-2$.

当 $3q_1-\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\delta_1}=2$ 时，有 $6q_1-q_1^{\delta_1+1}+q_1^{\delta_1}=4$，即 $q_1(6-q_1^{\delta_1}+q_1^{\delta_1-1})=4$，则无满足 $q_1\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ 的素数解；同理，当 $3q_1-\dfrac{q_1-1}{2}q_1^{\delta_1}=-2$ 时也无满足 $q_1\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ 的素数解.

当 $k\geqslant 2$ 时，由于 $q_i\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$，则(2)式的左端为偶数，右端为奇数，因而(2)式显然不成立，因而方程(1)无解.

(Ⅱ) 当 $\beta=1$ 时，$n=3\prod\limits_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$，由引理1有

$$\varphi_6(n)=\frac{\varphi(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)}}{6}$$

则有

$$\omega_6(n)=\frac{1}{6}(\omega(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)})=\frac{1}{6}\left(2\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)}\right)=\frac{3}{d}\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i} \tag{5}$$

由于此时 $\omega(n)\geqslant 2$，且 $q_i\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ 为素数，则由(5)式可得此时方程(1)无解.

定理2 若 $n>6$，$n=2\times 3^{\beta}\prod\limits_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$，$\beta\in[0,1]$，$\alpha_i\geqslant 0$，$(q_i,6)=1$，$q_i\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$，$1\leqslant i\leqslant k$，则：

(Ⅰ) 当 $\beta=0$ 时，方程(1) 有解$(n,d)=(10,10),(22,11),(170,17)$；

(Ⅱ) 当 $\beta=1$ 时，方程(1) 有解$(n,d)=(66,22),(30,30)$.

证　(Ⅰ) 当 $\beta=0$ 时，$n=2\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$. 由引理 1 有

$$\varphi_6(n)=\frac{\varphi(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{6}$$

则

$$\omega_6(n)=\frac{\omega(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{6}=\frac{\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{6}=\frac{2\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}}{d}\tag{6}$$

当 $k=1$ 时，此时 $\omega(n)=2$，则由(6) 式有

$$\frac{1}{3}\left(q_1^{\alpha_1-1}\frac{q_1-1}{2}+(-1)^{\Omega(n)}\right)=\frac{2q_1^{\alpha_1}}{d}\tag{7}$$

由于 d 是 n 的因数，不妨设 $d=2^{\gamma}q_1^{\delta_1}$，$0\leqslant\gamma\leqslant1$，$0\leqslant\delta_1\leqslant\alpha_1$. 显然 γ 与 δ_1 不能同时为 0，若 $\gamma=\delta_1=0$，则由(7) 式有$(-1)^{\Omega(n)}2=11q_1^{\alpha_1}+q_1^{\alpha_1-1}$，这是完全不可能的.

当 $\gamma=0$，$\delta_1\neq0$ 时，此时 $d=q_1^{\delta_1}$，则由(7) 式，有 $q_1^{\alpha_1-1}\dfrac{q_1-1}{2}+(-1)^{\Omega(n)}=6q_1^{\alpha_1-\delta_1}$，则 $\delta_1=\alpha_1$，若不然，当 $\delta_1<\alpha_1$ 时，则有矛盾关系式$(-1)^{\Omega(n)}2=q_1^{\alpha_1-\delta_1}(12-q_1^{\delta_1}+q_1^{\delta_1-1})$.

当 $\delta_1=\alpha_1$ 时，有 $q_1^{\alpha_1-1}\dfrac{q_1-1}{2}+(-1)^{\Omega(n)}=6$，则有 $q_1^{\alpha_1-1}\dfrac{q_1-1}{2}=5,7$. 对于 $q_1^{\alpha_1-1}\dfrac{q_1-1}{2}=7$，方程(1) 无满足 $q_i\equiv5(\bmod 6)$ 的解，因而此时无解；而对于 $q_1^{\alpha_1-1}\dfrac{q_1-1}{2}=5$，有 $\delta_1=\alpha_1=1$，$q_1=11$，此时方程(1) 有解$(n,d)=(22,11)$.

当 $\gamma=1$，$\delta_1\neq0$ 时，$d=2q_1^{\delta_1}$，则由(7) 式有

$$q_1^{\alpha_1}-q_1^{\alpha_1-1}+(-1)^{\Omega(n)}2=6q_1^{\alpha_1-\delta_1}$$

则

$$(-1)^{\Omega(n)}2=q_1^{\alpha_1-\delta_1}(6-q_1^{\delta_1}+q_1^{\delta_1-1})\tag{8}$$

若 $\alpha_1-\delta_1\geqslant1$，则(8) 式不可能成立；若 $\alpha_1-\delta_1=0$，则由(8) 式得 $2=6-q_1^{\delta_1}+q_1^{\delta_1-1}$ 或 $-2=6-q_1^{\delta_1}+q_1^{\delta_1-1}$. 当 $2=6-q_1^{\delta_1}+q_1^{\delta_1-1}$ 时，有 $\delta_1=1$，$q_1=5$，因而 $\alpha_1=1$，则 $n=2\times5=10$，$d=2\times5=10$，此时方程(1) 有解$(n,d)=(10,10)$.

当 $\gamma=1$，$\delta_1=0$ 时，$d=2$，则由(7) 式，有

$$\frac{1}{3}\left(q_1^{\alpha_1-1}\frac{q_1-1}{2}+(-1)^{\Omega(n)}\right)=q_1^{\alpha_1}$$

进而有

$$q_1^{\alpha_1}-q_1^{\alpha_1-1}+(-1)^{\Omega(n)}2=6q_1^{\alpha_1}$$

即$(-1)^{\Omega(n)}2=5q_1^{\alpha_1}+q_1^{\alpha_1-1}$，这完全不可能.

当 $k=2$ 时，则由(6) 式有

$$q_1^{\alpha_1-1}q_2^{\alpha_2-1}(q_1-1)(q_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}=\frac{12q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}}{d}\tag{9}$$

由于 d 是 n 的因数，设 $d=2^{\gamma}q_1^{\delta_1}q_2^{\delta_2}$，$0\leqslant\gamma\leqslant1$，$0\leqslant\delta_1\leqslant\alpha_1$，$0\leqslant\delta_2\leqslant\alpha_2$. 则由(9) 式有

$$q_1^{\alpha_1-1}q_2^{\alpha_2-1}(q_1-1)(q_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}=2^{2-\gamma}\times3\times q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_2-\delta_2}\tag{10}$$

当 $\gamma=1$ 时，由(10)式有

$$q_1^{\alpha_1-1}q_2^{\alpha_2-1}(q_1-1)(q_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}=2\times 3\times q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_2-\delta_2}$$

当 $k=2$ 时，有 $\omega(n)=3$，则有

$$\frac{1}{2}q_1^{\alpha_1-1}q_2^{\alpha_2-1}(q_1-1)(q_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}=3\times q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_2-\delta_2}$$

这不可能.

当 $\gamma=0$，$\delta_1\neq 0$，$\delta_2\neq 0$ 时，由(10)式有

$$(-1)^{\Omega(n)}=q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_2-\delta_2}\left(3\times q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}\right)$$

则 $q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=4$ 或 $q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=2$. 当 $q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=4$ 时，有 $(q_1-1)(q_2-1)=16$，由于 $q_i\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$，则 $(q_1-1)(q_2-1)=16$ 无解. 同理，当 $q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=2$ 时无解.

当 $\gamma=0$，$\delta_1\neq 0$，$\delta_2=0$ 时，由(10)式有

$$(-1)^{\Omega(n)}=q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_2-1}\left(3\times q_2-q_1^{\delta_1-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}\right)$$

从而有 $\alpha_1=\delta_1$，$\alpha_2=1$，且 $3\times q_2-q_1^{\delta_1-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=1$ 或者 $3\times q_2-q_1^{\delta_1-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=-1$. 当 $3\times q_2-q_1^{\delta_1-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=1$ 时，无满足 $q_i\equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ 的素数解；当 $3\times q_2-q_1^{\delta_1-1}\frac{q_1-1}{2}\frac{q_2-1}{2}=-1$ 时有解 $\delta_1=1$，$q_1=17$，$q_2=5$，则 $n=2\times 17\times 5=170$，$d=17$，则方程(1)有解 $(n,d)=(170,17)$.

当 $k\geqslant 3$ 时，则由(6)式有

$$d\left(\frac{1}{4}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-3}\right)=3\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}\tag{11}$$

由于此时 $\omega(n)\geqslant 4$，则对于(11)式，左端为奇数，而右端为偶数，因而(11)式不成立.

(Ⅱ) 当 $\beta=1$ 时，$n=2\times 3\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$. 由引理1有

$$\varphi_6(n)=\frac{\varphi(n)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-2}}{6}$$

则由方程(1)，结合 $\omega(n)\geqslant 3$ 有

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-3}}{6}=\frac{3\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}}{d}\tag{12}$$

当 $k=1$ 时，由于 d 是 n 的因数，设 $d=2^{\gamma}3^{\lambda}q_1^{\delta}$，其中 $0\leqslant\gamma,\lambda\leqslant 1$，$0\leqslant\delta\leqslant\alpha_1$，由(12)式有

$$(-1)^{\Omega(n)}=q_1^{\alpha_1-\delta}(2^{1-\gamma}\times 3^{2-\lambda}-q_1^{\delta}+q_1^{\delta-1})$$

有 $\alpha_1=\delta$，$2^{1-\gamma}\times 3^{2-\lambda}-q_1^{\delta}+q_1^{\delta-1}=\pm 1$. 对 $0\leqslant\gamma,\lambda\leqslant 1$，$0\leqslant\delta\leqslant\alpha_1$ 范围内的整数利用分类讨论的方法进行讨论，有 $\alpha_1=\delta=1$，$\gamma=1$，$\lambda=0$，$q_1=11$ 或 $\alpha_1=\delta=1$，$\gamma=1$，$\lambda=1$，$q_1=5$，此时 $n=2\times 3\times 11=66$，$d=2\times 11=22$，或 $n=2\times 3\times 5=30$，$d=2\times 3\times 5=30$. 从而此时方程(1)有解 $(n,d)=(66,22),(30,30)$.

当 $k=2$ 时，由于 d 是 n 的因数，设 $d=2^{\gamma}3^{\lambda}q_1^{\delta_1}q2^{\delta_2}$，其中 $0\leqslant\gamma,\lambda\leqslant 1$，$0\leqslant\delta_1\leqslant\alpha_1$，$0\leqslant\delta_2\leqslant\alpha_2$，则由(12)式有

$$\prod_{i=1}^{2} q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2=2^{1-\gamma}\times 3^{2-\lambda}\times q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_1-\delta_2}$$

则有

$$(-1)^{\Omega(n)}2=q_1^{\alpha_1-\delta_1}q_2^{\alpha_2-\delta_2}\left(2^{1-\gamma}\times 3^{2-\lambda}-q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}(q_1-1)(q_2-1)\right)$$

从而有 $\alpha_1=\delta_1$，$\alpha_2=\delta_2$，$\pm 2=2^{1-\gamma}\times 3^{2-\lambda}-q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}(q_1-1)(q_2-1)$. 利用分类讨论的方法对 $0\leqslant\gamma,\lambda\leqslant 1$ 范围内的数进行讨论，结合 $q_i\equiv 5(\bmod 6)$，得 $\pm 2=2^{1-\gamma}\times 3^{2-\lambda}-q_1^{\delta_1-1}q_2^{\delta_2-1}(q_1-1)(q_2-1)$ 无解，则方程(1) 无解.

当 $k\geqslant 3$ 时，有 $\omega(n)\geqslant 5$，则有

$$d\left(\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-4}\right)=9\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$$

左端为偶数，右端为奇数，因而不可能成立.

定理 3　若 $n>6$，$n=2^\alpha 3^\beta q^{\alpha_1}$，$\alpha\geqslant 2$，$\beta\in[0,1]$，$\alpha_1\geqslant 0$，$(q_1,6)=1$，$q_1\equiv 5(\bmod 6)$，则：

(Ⅰ) 当 $\beta=0$ 时，方程(1) 有解$(n,d)=(40,20),(44,11),(20,10)$；

(Ⅱ) 当 $\beta=1$ 时，方程(1) 有解$(n,d)=(132,22),(60,30)$.

证　(Ⅰ) 当 $\beta=0$ 时，$n=2^\alpha q^{\alpha_1}$，由引理 1 有

$$\frac{2^{\alpha-2}q^{\alpha_1-1}(q_1-1)-(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{3}=\frac{2^\alpha q^{\alpha_1}}{d}\tag{13}$$

由于 d 是 n 的因数，设 $d=2^\gamma q^{\delta_1}$，其中 $0\leqslant\gamma\leqslant\alpha$，$0\leqslant\delta_1\leqslant\alpha_1$，由(13) 式有

$$-(-1)^{\Omega(n)}2=2^{\alpha-\gamma}\times 3q^{\alpha_1-\delta_1}-2^{\alpha-2}q^{\alpha_1-1}(q-1)\tag{14}$$

解(14) 式可得：$\alpha_1=\delta_1=1$，$\alpha=3$，$\gamma=2$，$q=5$，此时有 $n=2^3\times 5=40$，$d=2^2\times 5=20$；$\alpha_1=\delta_1=1$，$\alpha=2$，$\gamma=0$，$q_1=11$，此时有 $n=2^2\times 11=44$，$d=11$；$\alpha_1=\delta_1=1$，$\alpha=2$，$\gamma=1$，$q=5$，此时有 $n=2^2\times 5=20$，$d=2\times 5=10$. 因而方程(1) 有解$(n,d)=(40,20),(44,11),(20,10)$.

(Ⅱ) 当 $\beta=1$ 时，$n=2^\alpha 3q^{\alpha_1}$，由引理 1 有

$$\varphi_6(n)=\frac{\varphi(n)-(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-1}}{6}$$

则有

$$2^{\alpha-2}q^{\alpha_1-1}(q-1)-(-1)^{\Omega(n)}=\frac{2^{\alpha-1}3^2q^{\alpha_1}}{d}\tag{15}$$

由于 d 是 n 的因数，设 $d=2^\gamma 3^\lambda q^\delta$，$0\leqslant\gamma\leqslant\alpha$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$0\leqslant\delta\leqslant\alpha_1$，由(15) 式有

$$-(-1)^{\Omega(n)}=q^{\alpha_1-\delta}\left(2^{\alpha-1-\gamma}3^{2-\lambda}-q^{\delta-1}(q-1)\right)\tag{16}$$

解(16) 式可得：$\alpha_1=\delta=1$，$\alpha=2$，$\gamma=1$，$\lambda=0$，$q_1=11$，此时有 $n=2^2\times 3\times 11=132$，$d=2\times 11=22$；$\alpha_1=\delta=1$，$\alpha=2$，$\gamma=1$，$\lambda=1$，$q_1=5$，此时有 $n=2^2\times 3\times 5=60$，$d=2\times 3\times 5=30$. 因而方程(1) 有解$(n,d)=(132,22),(60,30)$.

定理 4　若 $n>6$，$n=2^\alpha 3^\beta\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$，其中 $\alpha,\beta,\alpha_i\geqslant 0$，$(q_i,6)=1$，$1\leqslant i\leqslant k$，条件为引理 1 中的 (ⅳ)，则方程(1) 有解$(n,d)=(3^\beta,9)(\beta\geqslant 2)$，$(7^{\alpha_1},7)$，$(2^\alpha 3^\beta,18)(\beta\geqslant 2)$，$(2^\alpha 7^{\alpha_1},14)$，$(2^\alpha 3^\beta 7^{\alpha_1},21)$，$(2^\alpha 3^\beta 19^{\alpha_1},19)$.

证　当 $\alpha\geqslant 3$，$\beta=0$，$\alpha_i=0$ 时，有 $n=2^\alpha$，结合引理 1 以及方程(1)，有 $\frac{2^{\alpha-1}}{6}=\frac{2^\alpha}{d}$，不存在 $n=2^\alpha$ 的正因数 d 使得该式成立；

当 $\alpha=0$，$\beta\geqslant 2$，$\alpha_i=0$ 时，有 $n=3^\beta$，结合引理1以及方程(1)，有 $\frac{2\times 3^{\beta-1}}{6}=\frac{3^\beta}{d}$，从而可得 $d=9$，因而此时方程(1)有解 $(n,d)=(3^\beta,9)$，其中 $\beta\geqslant 2$；

当 $\alpha=0$，$\beta=0$，$\alpha_i\neq 0$ 时，有 $n=\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$，结合引理1有

$$\frac{1}{6}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)=\frac{1}{d}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$$

从而可得 $k=1$，$q_1=7$，$d=7$，因而此时方程(1)有解 $(n,d)=(7^{\alpha_1},7)$；

当 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，$\alpha_i=0$ 时，有 $n=2^\alpha 3^\beta$，结合引理1有 $\frac{2^\alpha\times 3^{\beta-1}}{6}=\frac{2^\alpha\times 3^\beta}{d}$，从而可得 $d=18$，因而此时方程(1)有解 $(n,d)=(2^\alpha 3^\beta,18)$，其中 $\beta\geqslant 2$；

当 $\alpha\neq 0$，$\beta=0$，$\alpha_i\neq 0$ 时，有 $n=2^\alpha\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$，结合引理1以及方程(1)，有

$$\frac{1}{6}2^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)=\frac{1}{d}2^\alpha\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$$

从而可得 $k=1$，$q_1=7$，$d=14$，因而此时方程(1)有解 $(n,d)=(2^\alpha 7^{\alpha_1},14)$；

当 $\alpha=0$，$\beta\neq 0$，$\alpha_i\neq 0$ 时，有 $n=3^\beta\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$，结合引理1以及方程(1)，有

$$\frac{1}{6}\times 2\times 3^{\beta-1}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)=\frac{1}{d}3^\beta\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$$

经计算无奇素数解，因而此时方程(1)无解；

当 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，$\alpha_i\neq 0$ 时，有 $n=2^\alpha 3^\beta\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$，结合引理1以及方程(1)，有

$$\omega_6(n)=\frac{1}{6}\omega(n)=\frac{2^\alpha\times 3^{\beta-1}}{6}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i-1}(q_i-1)=\frac{2^\alpha\times 3^\beta}{d}\prod_{i=1}^{k}q_i^{\alpha_i}$$

则有

$$d=\frac{18}{\prod_{i=1}^{k}(q_i-1)}\prod_{i=1}^{k}q_i$$

因而有 $k=1$，且 $d=\frac{18q_1}{q_1-1}=18+\frac{18}{q_1-1}$. 当 $q_1=7$ 时，有 $d=21$，此时 $(n,d)=(2^\alpha 3^\beta 7^{\alpha_1},21)$；当 $q_1=19$ 时，有 $d=19$，此时 $(n,d)=(2^\alpha 3^\beta 19^{\alpha_1},19)$.

参考文献：

[1] 胡孟君. 广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$ 的奇数值[D]. 杭州：浙江大学，2010.

[2] 金明艳，沈忠燕. 方程 $\varphi_2(n)=2^{\Omega(n)}$ 和 $\varphi_2(\varphi_2(n))=2^{\Omega(n)}$ 的可解性[J]. 浙江外国语学院学报，2013(4)：47-52.

[3] CAI T X. A Congruence Involving the Quotients of Euler and Its Applications (Ⅰ) [J]. Acta Arithmetica，2002，103(4)：313-320.

[4] CAI T X，SHEN Z Y，HU M J. On the Parity of the Generalized Euler Function [J]. Advance in Mathematics，2013，42(4)：505-510.

[5] SHEN Z Y，CAI T X，HU M J. On the Parity of the Generalized Euler Function (Ⅱ) [J]. Advance in Mathematics，2016，45(4)：509-519.

[6] 丁　煜. 广义 Euler 函数及其性质[D]. 杭州：浙江大学，2008.

［7］ 王　容，廖群英．关于广义欧拉函数 $\varphi_5(N)$［J］．四川师范大学学报(自然科学版)，2018，41(4)：445-449.
［8］ 张四保．广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=2^{\omega(n)}$ 的解［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(2)：36-41.
［9］ 张四保，官春梅，杨燕妮．广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 混合的一方程［J］．数学的实践与认识，2018，48(9)：265-268.
［10］赵祈芬，高　丽．数论函数 $Z(n)=\varphi_2(n)$ 的解［J］．云南师范大学学报(自然科学版)，2018，38(2)：34-37.
［11］张四保．与广义 Euler 函数有关的一方程的解［J］．科技通报，2018，34(8)：1-5，9.
［12］杨张媛，赵西卿，白继文．方程 $S(SL(n))=\varphi_2(n)$ 的可解性［J］．延安大学学报(自然科学版)，2018，37(1)：14-16.
［13］蒋舒囡，沈忠燕．数论函数方程 $\Phi(n)=S(n^{11})$ 和 $\Phi_2(n)=S(n^{11})$ 的解［J］．浙江外国语学院学报，2014(5)：31-37.
［14］白继文，赵西卿．数论函数方程 $\varphi_2(n)=S(n^{12})$ 的解［J］．延安大学学报(自然科学版)，2017，36(1)：5-8.
［15］王　容，廖群英．方程 $\varphi_e(n)=\frac{n}{d}(e=1,2,4)$ 的可解性［J］．纯粹数学与应用数学，2016，32(5)：481-494.
［16］王　容，罗文力，廖群英．方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 的可解性［J］．成都信息工程大学学报，2017，32(1)：95-101.

The Solvability of the Generalized Euler Function Equation $\varphi_6(n)=\frac{n}{d}$

ZHANG Si-bao

School of Mathematics and Statistics, Kashi University, Kashi Xinjiang 844008, China

Abstract: Let n be a positive integer, and $\varphi_e(n)$ a generalized Euler function. The generalized Euler function $\varphi_e(n)$ is closely related to the Möbius function $\mu(n)$. The solvability of the generalized Euler function equation $\varphi_6(n)=\frac{n}{d}$ is discussed with the accurate calculation formula of the generalized Euler function $\varphi_6(n)$ and the classification discussion method, and the cases of its positive integer solutions are given, where d is a positive factor of n.

Key words: generalized Euler function; equation; positive integer solution

责任编辑　廖　坤