第 41 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2019年12月
Vol. 41　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2019

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.12.008

$L\omega$-空间网的 $\omega\beta$-收敛性[①]

陈　波[1]，　曾春娜[2]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331

摘要：在 $L\omega$-空间中建立了分子网的 $\omega\beta$-收敛性，讨论了 $\omega\beta$-收敛性的基本性质. 应用分子网的 $\omega\beta$-收敛性，刻画了 $L\omega$-空间的 $M\omega\beta$-连续性.

关　键　词：$L\omega$-空间；分子网；$\omega\beta$-收敛；$M\omega\beta$-连续性

中图分类号：O189.13　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2019)12-0057-04

收敛性是 L-拓扑空间中的重要性质，文献[1-3]在 L-拓扑空间中建立了不同的收敛性. 作为 L-拓扑空间的推广，文献[4]建立了 $L\omega$-空间，随后讨论了 $L\omega$-空间的多种拓扑性质[5-6]. 借助于 L-拓扑空间中 β 开集[7-8]等概念，文献[9]在 $L\omega$-空间中建立了 $\omega\beta$-连通性理论. 本文进一步在 $L\omega$-空间中建立分子网的 $\omega\beta$-收敛性理论，讨论了其基本性质，并给出了相关应用.

在本文中，L 为 fuzzy 格，M 和 M_i 分别表示 L 和 $L_i(i=1,2)$ 中所有分子(即非零并既约元)所成之集合. L^X 表示定义在非空集合 X 上，取值于 L 的所有 L-fuzzy 集合构成的集族，$\underline{1}$ 和 $\underline{0}$ 分别表示 L^X 中的最大元和最小元，$M^*(L^X)$ 表示 L^X 中所有分子所成的集合. 其它相关概念可参见文献[10-11].

定义 1　设 (L^X, Ω) 为 $L\omega$-空间，$A \in L^X$，

(a) 如果 $A \leqslant \omega\mathrm{cl}(\omega\mathrm{int}(\omega\mathrm{cl}(A)))$，则称 A 为 $\omega\beta$-开集；

(b) 如果 $A \geqslant \omega\mathrm{int}(\omega\mathrm{cl}(\omega\mathrm{int}(A)))$，则称 A 为 $\omega\beta$-闭集.

$\omega\beta O(L^X)$ 和 $\omega\beta C(L^X)$ 分别表示 $\omega\beta$-开集和 $\omega\beta$-闭集的全体. 显然，$A \in \omega\beta O(L^X)$ 当且仅当 $A' \in \omega\beta C(L^X)$.

定义 2　设 (L^X, Ω) 为 $L\omega$-空间，$A, B \in L^X$. 记

$$\omega\beta\mathrm{int}(A) = \bigvee \{B \in L^X : B \leqslant A,\ B \in \omega\beta O(L^X)\}$$

$$\omega\beta\mathrm{cl}(A) = \bigwedge \{B \in L^X : A \leqslant B,\ B \in \omega\beta C(L^X)\}$$

分别称 $\omega\beta\mathrm{int}(A)$ 和 $\omega\beta\mathrm{cl}(A)$ 为 A 的 $\omega\beta$-内部和 $\omega\beta$-闭包.

定理 1　设 (L^X, Ω) 为 $L\omega$-空间，$A \in L^X$，则：

(i) A 为 $\omega\beta$-开集当且仅当 $A = \omega\beta\mathrm{int}(A)$；

(ii) A 为 $\omega\beta$-闭集当且仅当 $A = \omega\beta\mathrm{cl}(A)$；

(iii) $\omega\beta\mathrm{cl}(A') = (\omega\beta\mathrm{int}(A))'$，$\omega\beta\mathrm{int}(A') = (\omega\beta\mathrm{cl}(A))'$.

---

① 收稿日期：2018-03-21

基金项目：国家自然科学基金天元基金项目(11326073)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500312)；重庆市科学技术委员会研究项目(cstc2017jcyjAX0022).

作者简介：陈　波(1979-)，男，讲师，主要从事格上拓扑的研究.

定义 3 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$x_\alpha \in M^*(L^X)$，$P \in \omega\beta C(L^X)$. 如果$x_\alpha \not\leqslant P$，则称P为x_α的$\omega\beta$-闭远域. 令$\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$表示$x_\alpha$的所有$\omega\beta$-闭远域构成的集族.

定义 4 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$x_\alpha \in M^*(L^X)$，$N = \{N(n) \in M^*(L^X): n \in D\}$是$L^X$中的分子网，

(a) 如果$\forall P \in \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，存在$m \in D$，当$n \geqslant m$时，$N(n) \not\leqslant P$，则称$x_\alpha$为$N$的$\omega\beta$-极限点，记作$N \to_{\omega\beta} x_\alpha$，$N$的所有$\omega\beta$-极限点的并记为$\omega\beta\text{-}\lim N$；

(b) 如果$\forall P \in \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$及$\forall m \in D$，存在$n \in D$，$n \geqslant m$，使得$N(n) \not\leqslant P$，则称$x_\alpha$为$N$的$\omega\beta$-聚点，记作$N \propto_{\omega\beta} x_\alpha$，$N$的所有$\omega\beta$-聚点的并记为$\omega\beta\text{-ad}\, N$.

由定义 4，N的$\omega\beta$-极限点必是$\omega\beta$-聚点，从而$\omega\beta\text{-}\lim N \leqslant \omega\beta\text{-ad}\, N$.

定理 2 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$x_\alpha \in M^*(L^X)$，$N = \{N(n) \in M^*(L^X): n \in D\}$是$L^X$中的分子网，则：

(i) $N \to_{\omega\beta} x_\alpha$当且仅当$x_\alpha \leqslant \omega\beta\text{-}\lim N$；

(ii) $N \propto_{\omega\beta} x_\alpha$当且仅当$x_\alpha \leqslant \omega\beta\text{-ad}\, N$.

证 (i) 假设$N \to_{\omega\beta} x_\alpha$，由定义 4，$x_\alpha \leqslant \omega\beta\text{-}\lim N$.

反之，如果$x_\alpha \leqslant \omega\beta\text{-}\lim N$，任取$P \in \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，则$\omega\beta\text{-}\lim N \not\leqslant P$. 存在$N$的$\omega\beta$-极限点$e$，使得$e \not\leqslant P$，即$P \in \omega\beta\eta^-(e)$. 于是，存在$m \in D$，当$n \in D$，$n \geqslant m$时，$N(n) \not\leqslant P$. 则$N \to_{\omega\beta} x_\alpha$.

(ii) 类似于(i).

定理 3 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$x_\alpha \in M^*(L^X)$，$N = \{N(n) \in M^*(L^X): n \in D\}$和$T = \{T(n) \in M^*(L^X): n \in D\}$是$L^X$中的分子网，且对$\forall n \in D$，$N(n) \leqslant T(n)$. 则：

(i) 如果$N \to_{\omega\beta} x_\alpha$，则$T \to_{\omega\beta} x_\alpha$；

(ii) 如果$N \propto_{\omega\beta} x_\alpha$，则$T \propto_{\omega\beta} x_\alpha$.

定理 4 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$x_\alpha \in M^*(L^X)$，$N = \{N(n) \in M^*(L^X): n \in D\}$是$L^X$中的分子网，则：

(i) $N \to_{\omega\beta} x_\alpha$当且仅当$\forall e \in \beta^*(x_\alpha)$，$N \to_{\omega\beta} e$；

(ii) $N \propto_{\omega\beta} x_\alpha$当且仅当$\forall e \in \beta^*(x_\alpha)$，$N \propto_{\omega\beta} e$.

证 (i) 设$N \to_{\omega\beta} x_\alpha$，$e \in \beta^*(x_\alpha)$. 任取$P \in \omega\beta\eta^-(e)$，因$e \leqslant x_\alpha$，$x_\alpha \not\leqslant P$，即$P \in \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，存在$m \in D$，当$n \in D$，$n \geqslant m$时，$N(n) \not\leqslant P$. 从而$N \to_{\omega\beta} e$.

反之，设x_α不是N的$\omega\beta$-极限点. 存在$P \in \omega\beta^-(x_\alpha)$，对于所有$m \in D$，能找到$n \in D$，$n \geqslant m$，有$N(n) \leqslant P$. 另一方面，由$x_\alpha = \vee \beta^*(x_\alpha)$，存在$e \in \beta^*(x_\alpha)$，$e \not\leqslant P$. 于是$P \in \omega\beta\eta^-(e)$，但$e$不是$N$的$\omega\beta$-极限点.

(ii) 类似于(i).

定理 5 设(L^X, Ω)为$L\omega$-空间，$x_\alpha \in M^*(L^X)$，$N = \{N(n) \in M^*(L^X): n \in D\}$是$L^X$中的分子网，则：

(i) $N \propto_{\omega\beta} x_\alpha$当且仅当$N$存在子网$T$，$T \to_{\omega\beta} x_\alpha$；

(ii) $N \to_{\omega\beta} x_\alpha$，则对$N$的任意子网$T$，$T \to_{\omega\beta} x_\alpha$.

证 (i) 设$N \propto_{\omega\beta} x_\alpha$，则对$\forall P \in \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$及$n \in D$，存在$D$中的$k \geqslant n$，满足$N(k) \not\leqslant P$. 取$k = S((n, P))$，对映射$S: D \times \omega\beta\eta^-(x_\alpha) \longrightarrow D$，有$N(S(n, P)) \not\leqslant P$. 令$E = D \times \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，定义$(n_1, P_1) \geqslant (n_2, P_2)$当且仅当$n_1 \geqslant n_2$，$P_1 \geqslant P_2$，于是$E$是定向集. 取

$$T((n, P)) = N(S(n, P))$$

可知T是N的子网，且$T \to_{\omega\beta} x_\alpha$.

假设 $T=\{T(m):m\in E\}$ 是 N 的子网，$T\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$. 任取 $P\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$ 及 $n_0\in D$，存在映射 $S:E\longrightarrow D$ 及 $m_0\in E$，则对所有 $m\geqslant m_0$，有 $S(m)\geqslant n_0$. 由 $T\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$，存在 $m_1\in E$，当 $m\geqslant m_1$ 时，$T(m)\nleqslant P$. 由 E 的定向性，存在 $m_2\in E$，满足 $m_2\geqslant m_0$ 及 $m_2\geqslant m_1$. 于是 $T(m_2)\nleqslant P$，且 $S(m_2)\geqslant n_0$. 令 $n=S(m_2)$，则

$$N(n)=N(S(m_2))=T(m_2)\nleqslant P$$

且

$$n\geqslant n_0$$

即 $N\propto_{\omega\beta}x_\alpha$.

(ii) 假设 $N=\{N(n):n\in D\}$，$N\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$，$T=\{T(m):m\in E\}$ 是 N 的任一子网. 则对 $\forall P\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，存在 $n_0\in D$，当 $n\geqslant n_0$ 时，$N(n)\nleqslant P$. 由子网的定义，存在映射 $S:E\longrightarrow D$ 及 $m_0\in E$，当 $m\in E$，$m\geqslant m_0$ 时，有

$$S(m)\geqslant n_0$$

且

$$T(m)=N(S(m))$$

于是 $T(m)\nleqslant P$，$T\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$.

定理 6　设 (L^X,Ω) 为 $L\omega$ -空间，$x_\alpha\in M^*(L^X)$，$A\in L^X$. 则 $x_\alpha\leqslant\omega\beta\mathrm{cl}(A)$ 当且仅当存在 A 中的分子网 N，使得 $N\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$.

证　假设 $x_\alpha\leqslant\omega\beta\mathrm{cl}(A)$，对 $\forall P\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，$A\nleqslant P$. 由

$$A=\bigvee\{e\in M^*(L^X):e\leqslant A\}$$

存在 $e_P\leqslant A$，$e_P\nleqslant P$. 令

$$N=\{e_P:P\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)\}$$

可知 N 是 A 中的分子网且 $N\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$.

反之，设 $N=\{N(n):n\in D\}$ 是 A 中的分子网且 $N\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$. 任取 $P\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$，存在 $m\in D$，当 $n\in D$，$n\geqslant m$ 时，$N(n)\nleqslant P$. 于是 $\forall n\in D$，$N(n)\leqslant A$，有 $A\nleqslant P$，即 $x_\alpha\leqslant\omega\beta\mathrm{cl}(A)$.

定理 7　设 (L^X,Ω) 为 $L\omega$ -空间，$A\in L^X$，则：

(i) A 是 $\omega\beta$ -闭集；

(ii) A 中的任意分子网 N，$\omega\beta\text{-ad}\ N\leqslant A$；

(iii) A 中的任意分子网 N，$\omega\beta\text{-lim}\ N\leqslant A$.

证　(i)⇒(ii) 设 A 是 $\omega\beta$ -闭集，$N=\{N(n):n\in D\}$ 是 A 中的分子网. 任取 $x_\alpha\in M^*(L^X)$ 且 $x_\alpha\leqslant\omega\beta\text{-ad}\ N$. 对 $\forall P\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$ 及 $m\in D$，存在 $n\in D$，$n\geqslant m$ 满足 $N(n)\nleqslant P$. 于是 $A\nleqslant P$，即 $x_\alpha\leqslant\omega\beta\mathrm{cl}(A)\leqslant A$. 从而 $\omega\beta\text{-ad}\ N\leqslant A$.

(ii)⇒(iii) 对任意分子网 N，$\omega\beta\text{-lim}\ N\leqslant\omega\beta\text{-ad}\ N$，从而结论成立.

(iii)⇒(i) 任取 $x_\alpha\in M^*(L^X)$，且 $x_\alpha\leqslant\omega\beta\mathrm{cl}(A)$. 由定理 6，存在 A 中分子网 N，$N\rightarrow_{\omega\beta}x_\alpha$. 由 (iii)，$x_\alpha\leqslant\omega\beta\text{-lim}\ N\leqslant A$. 于是 $\omega\beta\mathrm{cl}(A)\leqslant A$，$A$ 是 $\omega\beta$ -闭集.

定义 5　设 (L^X,Ω_1)，(L^Y,Ω_2) 为 $L\omega$ -空间. 映射 $f:(L^X,\Omega_1)\longrightarrow(L^Y,\Omega_2)$，如果对任意的 $A\in\omega\beta O(L^Y)$，有 $f^{-1}(A)\in\omega\beta O(L^X)$，则称 f 是 $M\omega\beta$- 连续的.

由定义 5，有以下定理：

定理 8　设 (L^X,Ω_1)，(L^Y,Ω_2) 为 $L\omega$ -空间. $f:(L^X,\Omega_1)\longrightarrow(L^Y,\Omega_2)$ 是 $M\omega\beta$ -连续的当且仅当 $\forall x_\alpha\in M^*(L^X)$ 及 $\forall P\in\omega\beta\eta^-(f(x_\alpha))$，有 $f^{-1}(P)\in\omega\beta\eta^-(x_\alpha)$.

定理 9　设 (L^X,Ω_1)，(L^Y,Ω_2) 为 $L\omega$ -空间，$N=\{N(n)\in M^*(L^X):n\in D\}$ 是 L^X 中的分子网，f：

$(L^X, \Omega_1) \longrightarrow (L^Y, \Omega_2)$ 是 $M\omega\beta$-连续的. 如果 $N \to_{\omega\beta} x_\alpha$，则 $f(N) \to_{\omega\beta} f(x_\alpha)$.

证 设 f 是 $M\omega\beta$-连续的，$N \to_{\omega\beta} x_\alpha$. 任取 $P \in \omega\beta\eta^-(f(x_\alpha))$，由定理 8，$f^{-1}(P) \in \omega\beta\eta^-(x_\alpha)$. 存在 $m \in D$，当 $n \in D$，$n \geqslant m$ 时 $N(n) \not\leqslant f^{-1}(P)$，从而 $f(N(n)) \not\leqslant P$，即 $f(N) \to_{\omega\beta} f(x_\alpha)$.

推论 1 设 (L^X, Ω_1)，(L^Y, Ω_2) 为 $L\omega$-空间，$f: (L^X, \Omega_1) \longrightarrow (L^Y, \Omega_2)$ 是 $M\omega\beta$-连续的. 则对 L^X 中任意分子网 N，有 $f(\omega\beta\text{-}\lim N) \leqslant \omega\beta\text{-}\lim f(N)$.

参考文献:

[1] PU P M，LIU Y M. Fuzzy Topology I，Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence [J]. J Math Anal Appl，1980，76(2)：571-599.

[2] CHEN S L. U-Convergence Theory and L-Fuzzy U-Sets [J]. Information Sciences，1995，87：205-213.

[3] CHEN S L，CHEN S T. A New Extension of Fuzzy Convergence [J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，109(2)：199-204.

[4] 陈水利，董长清. L-fuzzy 保序算子空间 [J]. 模糊系统与数学，2002，16(2)：36-41.

[5] 黄金兰，陈水利. $L\omega$-空间中的 ω-Tychonoff 分离性 [J]. 模糊系统与数学，2012，26(4)：43-48.

[6] 陈 波，刘建军. L-fuzzy 保序算子空间的 ω-Lindelöf 可数性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2006，31(4)：32-34.

[7] BALASUBRAMANIAN G. Fuzzy β-Open Sets and Fuzzy β-Separation Axioms [J]. Kybernetika，1999，35(2)：215-223.

[8] HANAFY I M. Fuzzy β-Compactness and Fuzzy β-Closed Spaces [J]. Turk J Math，2004，28(1)：281-293.

[9] 陈 波，曾春娜. $L\omega$-空间的 $\omega\beta$-连通性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：71-75.

[10] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，1988.

[11] LIU Y M，LUO M K. Fuzzy Topology [M]. Singapore：World Scientific，1997.

$\omega\beta$-Convergence of Nets in $L\omega$ - Spaces

CHEN Bo[1]， ZENG Chun-na[2]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. School of Mathematics Science，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China

Abstract：In this paper，the $\omega\beta$-convergence theory of molecule nets in $L\omega$-spaces is introduced. Some properties of $\omega\beta$-convergence are discussed. The $\omega\beta$-convergence theory is used to characterize the $M\omega\beta$-continuous functions in $L\omega$-spaces.

Key words：$L\omega$-space；molecule net；$\omega\beta$-convergence；$M\omega\beta$-continuity

责任编辑 廖 坤