DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2019.12.009

齐次核的 Hilbert 型级数不等式成立的充要条件及其在算子理论中的应用①

洪　勇[1]，　曾志红[2]

1. 广东白云学院 数学教研室，广州 510450；2. 广东第二师范学院 学报编辑部，广州 510303

摘要：参数满足什么条件时，Hilbert 型级数不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m b_n \leqslant M\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

能够成立？而当 Hilbert 型级数不等式成立时，其常数因子又在什么条件下是最佳的？最佳常数因子的表达式是什么？这些问题的研究无疑是具有重要意义的．利用实分析的技巧及权函数方法，对具有齐次核的 Hilbert 型级数不等式的形式结构及参数关系进行了分析研究，得到其成立的充分必要条件和最佳常数因子的表达式．最后讨论了其结果在算子理论中的一些应用．

关　键　词：Hilbert 型级数不等式；齐次核；充分必要条件；最佳常数因子；有界算子

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2019)12－0061－08

设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$K(x,y)\geqslant 0$，$\alpha,\beta,M$ 为常数，$a_m\geqslant 0$，$b_n\geqslant 0$．称不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m b_n \leqslant M\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

为 Hilbert 型级数不等式．当 $K(m,n)=\frac{1}{m+n}$ 时，有著名的 Hilbert 级数不等式[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leqslant \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中的常数因子 $\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$ 是最佳的．

若对 $\forall t>0$，有 $K(tx,ty)=t^{\lambda}K(x,y)$，则称 $K(x,y)$ 是 λ 阶的齐次函数．对于具有齐次核的 Hilbert 型级数或积分不等式已有充分的研究[2-14]，其研究主要围绕两个方面进行：一是对一些具体形式的核，得到相应的 Hilbert 型不等式，并讨论最佳常数因子问题；二是对一些具有某种特点的抽象核展开研究[15-20]，这类研究更为深刻且更具重要意义，有广泛的应用价值．但 Hilbert 型不等式成立的条件是什么？ 换言之，是否对任何 α 及 β，(1) 式都能够成立？ 若不能，则 α 与 β 应满足什么条件？ 这个条件是否是

① 收稿日期：2018－06－08
基金项目：国家自然科学基金项目(61300204)．
作者简介：洪　勇(1959－)，男，教授，主要从事调和分析和实分析的研究．
通信作者：曾志红，编审．

充分必要的? 当(1)式能够成立时,其最佳常数因子是什么? 对这些问题的研究无疑是更深入的探讨,对全面深刻地探究 Hilbert 型不等式有重要意义.

本文对具有齐次核的Hilbert型级数不等式的结构特征进行了探讨,得到了Hilbert型级数不等式能够成立的充分必要条件. 最后还讨论了其结果在算子理论中的一些应用.

引理 1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}-(\lambda+1)=c$, $K(x,y)\geqslant 0$ 是 λ 阶的齐次可测函数, $s+r=1(0<r<1)$, $K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}$ 及 $K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}$ 都在 $(0,+\infty)$ 上递减,记

$$W_1(\beta,r)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}\mathrm{d}t$$

$$W_2(\alpha,s)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\mathrm{d}t$$

则 $W_1(\beta,r)=W_2(\alpha,s)$, 且

$$\omega_1(m,\beta,r)=\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)n^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}\leqslant m^{\lambda-\frac{\beta+1}{q}+cr+1}W_1(\beta,r) \tag{2}$$

$$\omega_2(n,\alpha,s)=\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)m^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\leqslant n^{\lambda-\frac{\alpha+1}{p}+cs+1}W_2(\alpha,s) \tag{3}$$

证 由于 $K(x,y)$ 是 λ 阶的齐次函数,于是

$$W_1(\beta,r)=\int_0^{+\infty}t^{\lambda-\frac{\beta+1}{q}+cr}K(t^{-1},1)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}u^{-\lambda+\frac{\beta+1}{q}-cr-2}K(u,1)\mathrm{d}u=$$

$$\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\mathrm{d}t=W_2(\alpha,s)$$

又利用 $K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}$ 的递减性,有

$$\omega_1(m,\beta,r)=m^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}K\left(1,\frac{n}{m}\right)n^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}\leqslant m^{\lambda-\frac{\beta+1}{q}+cr}\int_0^{+\infty}K\left(1,\frac{u}{m}\right)\left(\frac{u}{m}\right)^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}\mathrm{d}u=$$

$$m^{\lambda-\frac{\beta+1}{q}+cr+1}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}\mathrm{d}t=m^{\lambda-\frac{\beta+1}{q}+cr+1}W_1(\beta,r)$$

故(2)式成立.

同理可证(3)式也成立.

1 主要定理及证明

定理 1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, λ,α,β 是常数, $K(x,y)>0$ 是 λ 阶的齐次可测函数, $\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}-(\lambda+1)=c$, $s+r=1(0<r<1)$, $K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}$ 及 $K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减,且

$$W_1(\beta,r)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}+cr}\mathrm{d}t$$

收敛. 那么:

(i) 当且仅当 $c\geqslant 0$ 时,存在常数 $M>0$, 对 $\forall a_m>0$, $\forall b_n\geqslant 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m b_n\leqslant M\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

(ii) 设 M_0 是(4)式的最佳常数因子,则 $M_0\leqslant\inf\limits_{r\in(0,1)}\{W_1(\beta,r)\}$. 当 $c=0$ 时,有

$$M_0=W_0=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t$$

证 (i) 设(4)式成立. 如果 $\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}-(\lambda+1)=c<0$, 令

$$a_m=m^{\frac{-\alpha-1+cps}{p}}\qquad m=1,2,\cdots$$

$$b_n = n^{\frac{-\beta-1+cqr}{q}} \qquad n=1,2,\cdots$$

那么有

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1+cps}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+cqr}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\left(1+\int_1^{\infty} t^{-1+cps}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(1+\int_1^{\infty} t^{-1+cqr}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(1+\frac{1}{-cps}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1+\frac{1}{-cqr}\right)^{\frac{1}{q}}$$

同时，由于 $K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}$ 在$(0,+\infty)$上递减，又有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n) a_m b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{-\beta-1+cqr}{q}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n) m^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda+\frac{-\beta-1+cqr}{q}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} K\left(\frac{m}{n},1\right) m^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\right) \geqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \left(\int_1^{+\infty} K\left(\frac{u}{n},1\right) \left(\frac{u}{n}\right)^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs} \mathrm{d}u\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} K(t,1) t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\,\mathrm{d}t\right) \geqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left(\int_1^{+\infty} K(t,1) t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\,\mathrm{d}t\right)$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \int_1^{+\infty} K(t,1) t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\,\mathrm{d}t \leqslant M\left(1+\frac{1}{-cps}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1+\frac{1}{-cqr}\right)^{\frac{1}{q}}$$

但因 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ 发散到 $+\infty$，得到矛盾. 因而 $c<0$ 不能成立，故 $c \geqslant 0$.

反之，设 $c \geqslant 0$. 记

$$a = \frac{\alpha - cps + 1}{pq} \qquad b = \frac{\beta - cqr + 1}{pq}$$

根据 Hölder 不等式及引理 1，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n) a_m b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m^a}{n^b} a_m\right] \left[\frac{n^b}{m^a} b_n\right] K(m,n) \leqslant$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{ap}}{n^{bp}} a_m^p K(m,n)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^{bq}}{m^{aq}} b_n^q K(m,n)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{\alpha-cps+1}{q}} a_m^p \omega_1(m,\beta,r)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\beta-cqr+1}{p}} b_n^q \omega_2(n,\alpha,s)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$W_1(\beta,r)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-cps} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-cqr} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$W_1(\beta,r)\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m,n) a_m b_n \leqslant \inf_{r\in(0,1)} \{W_1(\beta,r)\} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

任取 $M \geqslant \inf\limits_{r \in (0,1)} \{W_1(\beta, r)\}$，均有(4)式成立.

在定理1的条件下，Hilbert型级数不等式(1)的基本结构特征是 $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} - (\lambda + 1) \geqslant 0$，即如果 $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} - (\lambda + 1) < 0$，则(1)式永远不可能成立.

(ii) 首先，根据(5)式可得 $M_0 \leqslant \inf\limits_{r \in (0,1)} \{W_1(\beta, r)\}$.

当 $c = 0$ 时，(5)式化为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m, n) a_m b_n \leqslant W_0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

此时若 W_0 不是最佳的，则 $M_0 < W_0$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m, n) a_m b_n \leqslant M_0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6}$$

对足够小的 $\varepsilon > 0$，取 $a_m = m^{\frac{-\alpha-1-|\lambda|\varepsilon}{p}} (m = 1, 2, \cdots)$，$b_n = n^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} (n = 1, 2, \cdots)$，有

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-|\lambda|\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-|\lambda|\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$1 + \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1-|\lambda|\varepsilon} \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} t^{-1-|\lambda|\varepsilon} \mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{|\lambda|\varepsilon} \tag{7}$$

同时还有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m, n) a_m b_n &= \sum_{m=1}^{\infty} m^{\frac{-\alpha-1-|\lambda|\varepsilon}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(m, n)\right) = \\
&\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda + \frac{-\alpha-1-|\lambda|\varepsilon}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K\left(1, \frac{n}{m}\right)\right) \geqslant \\
&\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2-|\lambda|\varepsilon} \int_1^{+\infty} \left(\frac{u}{m}\right)^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K\left(1, \frac{u}{m}\right) \mathrm{d}u = \\
&\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-|\lambda|\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

设 $\delta > 0$ 足够小，存在 N，当 $m > N$ 时，$\frac{1}{m} < \delta$. 记

$$M(N) = \sum_{m=1}^{N} m^{-1-|\lambda|\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t$$

那么有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} K(m, n) a_m b_n &\geqslant M(N) + \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{-1-|\lambda|\varepsilon} \int_{\frac{1}{m}}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t \geqslant \\
&M(N) + \sum_{m=N+1}^{\infty} m^{-1-|\lambda|\varepsilon} \int_{\delta}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t \geqslant \\
&M(N) + \int_{N+1}^{+\infty} t^{-1-|\lambda|\varepsilon} \mathrm{d}t \int_{\delta}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t = \\
&M(N) + \frac{1}{|\lambda|\varepsilon} (N+1)^{-|\lambda|\varepsilon} \int_{\delta}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{8}$$

由(6),(7),(8)式，得到

$$\varepsilon M(N) + \frac{1}{|\lambda|} (N+1)^{-|\lambda|\varepsilon} \int_{\delta}^{+\infty} t^{\frac{-\beta-1-|\lambda|\varepsilon}{q}} K(1, t) \mathrm{d}t \leqslant M_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{|\lambda|}\right)$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，得到

$$\int_{\delta}^{+\infty} K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t \leqslant M_0$$

再令 $\delta \to 0^+$，得到

$$W_0 = \int_0^{+\infty} K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t \leqslant M_0$$

这与 $M_0 < W_0$ 矛盾，故 $M_0 = W_0$.

定理 2　设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\lambda,\alpha,\gamma$ 是常数，$K(x,y)>0$ 是 λ 阶的齐次可测函数，$\frac{\alpha-\gamma}{p}-(\lambda+1)=c$，$r+s=1(0<s<1)$，$K(1,t)t^{\frac{\gamma+1}{p}-1+cr}$ 及 $K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，且

$$W_2(\alpha,s)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+cs}\mathrm{d}t$$

收敛. 那么：

(i) 当且仅当 $c \geqslant 0$ 时，存在常数 $\widetilde{M}>0$，对 $\forall a_m \geqslant 0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^p \leqslant \widetilde{M}\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p \tag{9}$$

(ii) 若 $\widetilde{M}_0$ 是(9)式的最佳常数因子，则 $\widetilde{M}_0 \leqslant \inf_{s\in(0,1)}\{W_2^{\frac{1}{p}}(\alpha,s)\}$. 当 $c=0$ 时，

$$\widetilde{M}_0=\left(\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}t\right)^p$$

证　记 $\beta=\frac{\gamma}{1-p}$，则由 $\frac{\alpha-\gamma}{p}-(\lambda+1)=c$，可得

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}-(\lambda+1)=c \qquad \frac{\gamma+1}{p}-1+cr=-\frac{\beta+1}{q}+cr$$

于是只需证明(9)式与(4)式等价即可.

若存在常数 $\widetilde{M}$ 使得(9)式成立，则由 Hölder 不等式，对 $\forall a_m \geqslant 0$，$\forall b_n \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_mb_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\frac{\beta}{q}}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)\left(n^{\frac{\beta}{q}}b_n\right) \leqslant \\ &\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{(1-p)\beta}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = \\ &\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ &\widetilde{M}^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

令 $\widetilde{M}^{\frac{1}{p}}=M$，则得到(4)式.

反之，若存在常数 M 使得(4)式成立，令

$$b_n=n^{\gamma}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^{p-1} \qquad n=1,2,\cdots$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_mb_n \leqslant \\ &M\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} = \\ &M\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^p\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

由此得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} K(m, n) a_m \Big)^p \leqslant M^p \sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p$$

令 $M^p = \widetilde{M}$，得到(9)式.

2　在算子理论中的应用

设 $p > 1$，α 是常数，$a_m \geqslant 0(m=1,2,\cdots)$，并记

$$l_\alpha^p = \left\{ a = \{a_m\} : a_m \geqslant 0,\ \| a \|_{p,\alpha} = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} a_m^p \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

对 $\forall a = \{a_m\}(a_m \geqslant 0)$，定义级数算子 T 为

$$T(a)_n = \sum_{m=1}^{\infty} K(m, n) a_m \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{10}$$

其中核 $K(m, n) \geqslant 0$. 若存在常数 M，对 $\forall a = \{a_m\} \in l_\alpha^p$，有

$$\| T(a) \|_{p,\gamma} \leqslant M \| a \|_{p,\alpha}$$

则称 T 是 l_α^p 到 l_γ^p 的有界算子，此时 T 的(p, p)-型范数定义为

$$\| T \|_{(p,p)} = \sup_{a \in l_\alpha^p} \frac{\| T(a) \|_{p,\gamma}}{\| a \|_{p,\alpha}}$$

特别地，记 $\| a \|_{p,0} = \| a \|_p$，$l_0^p = l^p$. 若 T 是 l_α^p 到自身的有界算子，则称 T 是 l_α^p 中的有界算子.

命题1　设 $p > 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$\lambda, \alpha, \gamma$ 是常数，$K(x, y) > 0$ 是 λ 阶的齐次可测函数，

$$\frac{\alpha}{p} - \frac{\gamma}{p} - (\lambda + 1) = c \qquad r + s = 1 \qquad 0 < s < 1$$

且 $K(1, t) t^{\frac{\gamma+1}{p} - 1 + cr}$ 及 $K(t, 1) t^{-\frac{\alpha+1}{p} + cs}$ 在$(0, +\infty)$上递减，$W_2(\alpha, s) = \int_0^{+\infty} K(t, 1) t^{-\frac{\alpha+1}{p} + cs} \mathrm{d}t$ 收敛，算子 T 由(10)式定义. 那么

(i) T 是 l_α^p 到 l_γ^p 的有界算子的充分必要条件是 $c \geqslant 0$；

(ii) $c \geqslant 0$ 时，T 的算子范数 $\| T \|_{(p,p)} \leqslant \inf_{s \in (0,1)} \{ W_2(\alpha, s) \}$. 当 $c = 0$ 时，

$$\| T \|_{(p,p)} = \int_0^{+\infty} K(t, 1) t^{-\frac{\alpha+1}{p}} \mathrm{d}t$$

证　由定理2可证.

注1　在命题1的条件下，当且仅当 $\frac{\alpha}{p} - \frac{\gamma}{p} - (\lambda + 1) \geqslant 0$，时 T 才是 l_α^p 到 l_γ^p 的有界算子. 特别地，T 是 l^p 中的有界算子，其基本特征是 $\lambda \leqslant -1$.

命题2　设 $p > 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$\lambda, \alpha, \gamma$ 是常数，满足

$$\max\left\{ 2 + \frac{\gamma}{p} + \frac{\alpha}{q} - p,\ \frac{1}{1-p}\Big(2 + \frac{\gamma}{p} + \frac{\alpha}{q} - p \Big) \right\} < \lambda \leqslant \min\left\{ 2 + \frac{\alpha}{q} + \frac{\gamma}{p},\ 2 - \frac{q}{p}\Big(\frac{\alpha}{q} + \frac{\gamma}{p} \Big) \right\} \tag{11}$$

定义算子 T 为

$$T(a)_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda} + n^{\lambda}} a_m \qquad a = \{a_m\},\ a_m \geqslant 0$$

则当且仅当 $\lambda \geqslant 1 + \frac{\gamma - \alpha}{p}$ 时，T 是 l_α^p 到 l_γ^p 的有界算子.

证　首先由(11)式左边可知 $\lambda > 0$. 设 $K(x, y) = \frac{1}{x^{\lambda} + y^{\lambda}}$，则 $K(x, y)$ 是 λ 阶的齐次非负函数. 又令

$$f(t)=K(t,1)t^{\sigma}=K(1,t)t^{\sigma}=\frac{t^{\sigma}}{t^{\lambda}+1}\qquad t\in(0,+\infty)$$

求导数可得

$$f'(t)=\frac{t^{\sigma-1}}{(t^{\lambda}+1)^{2}}[(\sigma-\lambda)t^{\lambda}+\sigma]$$

易知 $\sigma<0$ 时，$f'(t)<0$，从而 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减．根据(11) 式右边，经计算可知

$$-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}\leqslant 0\qquad \frac{\gamma+1}{p}-1+\frac{c}{q}\leqslant 0$$

其中

$$c=\frac{\alpha}{p}-\frac{\gamma}{p}-(-\lambda+1)$$

于是 $K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}}$ 和 $K(1,t)t^{\frac{\gamma+1}{p}-1+\frac{c}{q}}$ 都在 $(0,+\infty)$ 上递减．

再由(11) 式左边，经计算可知

$$\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}+1\right)>0\qquad 1-\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}+1\right)>0$$

从而

$$\int_{0}^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}}=\frac{1}{\lambda}B\left(\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}+1\right),1-\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{c}{p}+1\right)\right)$$

收敛．其中 $B(\cdot,\cdot)$ 是 Beta 函数．

在命题 1 中取 $r=\frac{1}{q}$，$s=\frac{1}{p}$，可知命题 2 成立．

注 2　在命题 2 中，取 $\alpha=\gamma=0$，则(11) 式化为

$$\max\left\{2-p,\frac{p-2}{p-1}\right\}<\lambda\leqslant 2$$

$\lambda\geqslant 1+\frac{\gamma-\alpha}{p}$ 化为 $\lambda\geqslant 1$．再注意到 $\max\left\{2-p,\frac{p-2}{p-1}\right\}<1$，于是可知，当且仅当 $1\leqslant\lambda\leqslant 2$ 时，T 是 l^{p} 中的有界算子．

注 3　在命题 2 中，取 $\alpha=(p-1)(1-\lambda)$，$\gamma=\lambda-1$，则可得到：当 $0<\lambda\leqslant\max\{p,q\}$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{m}}{m^{\lambda}+n^{\lambda}}\right)^{p}\leqslant\left(\frac{\pi}{\lambda\sin\frac{\pi}{p}}\right)^{p}\sum_{m=1}^{\infty}m^{(p-1)(1-\lambda)}a_{m}^{p}$$

参考文献：

[1]　HARDY G H，LITTLEWOOD J E，POLYA G. Inequalities [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1952.

[2]　洪　勇. Hardy-Hilbert 积分不等式的全方位推广 [J]. 数学学报，2001，44(4)：619-626.

[3]　YANG B C. On a Hilbert-Hardy-Type Integral Operator and Application [J]. J Ineq Appl，2010，2010：1-10.

[4]　ZHAO C J，DEBNATH L. Some New Inverse Type Hilbert Integral Inequalities [J]. J Math Anal Appl，2001，262(1)：411-418.

[5]　和　炳，杨必成. 一个核带超几何函数的 0 次齐次的 Hilbert 型积分不等式 [J]. 数学的实践与认识，2010，40(18)：203-211.

[6]　洪　勇. 涉及多个函数的 Hardy 型积分不等式 [J]. 数学学报，2006，49(1)：39-44.

[7]　匡继昌. 常用不等式 [M]. 济南：山东科学技术出版社，2004.

[8]　YANG B C. On the Norm of a Hilbert's Type Linear Operator and Applications [J]. J Math Anal Appl，2007，325(1)：529-541.

[9]　胡　克. 解析不等式的若干问题 [M]. 武汉：武汉大学出版社，2007.

[10]　ČIZMEŠIJA A，KRNIČ M，PEČARIĆ J. General Hilbert-Type Inequalities with Non-Conjugate Exponents [J]. Math

Inequal Appl，2008(2)：237-269.

[11] BMETIĆ I，PEČARIĆ J. Generalization of Hilbert's Integral Inequality [J]. Mathematical Inequalities and Applications，2004(2)：199-205.

[12] 吕中学，谢鸿政. 关于Hilbert积分不等式新的改进和推广 [J]. 数学进展，2003，32(4)：419-424.

[13] 杨必成，陈 强. 一个较为精确的半离散非齐次核的Hilbert不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(8)：29-34.

[14] 杨必成，陈 强. 一个核为双曲正割函数的半离散Hilbert型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：26-32.

[15] 洪 勇. 一类带齐次核的奇异重积分算子的范数及其应用 [J]. 数学年刊(A辑)，2011，32(5)：599-606.

[16] 洪 勇. 带对称齐次核的级数算子的范数刻画及其应用 [J]. 数学学报，2008，51(2)：365-370.

[17] 杨必成. 参量化的Hilbert型不等式研究综述 [J]. 数学进展，2009，38(3)：257-268.

[18] KTNIĆ M，GAO M Z，PEČARIĆ J，et al. On the Best Constant in Hilbert's Inequality [J]. Math Inequal Appl，2005(2)：317-329.

[19] YANG B C，KRNIĆ M. Hilbert-Type Inequalities and Related Operators with Homogeneous Kernel of Degree 0 [J]. Mathematical Inequalities and Applications，2010(4)：817-839.

[20] 杨必成. 算子范数与Hilbert型不等式 [M]. 北京：科学出版社，2009.

The Necessary and Sufficient Condition for Hilbert-Type Series Inequality with a Homogeneous Kernel to Hold and Its Applications in the Operator Theory

HONG Yong[1]， ZENG Zhi-hong[2]

1. Department of Mathematics，Guangdong Baiyun University，Guangzhou 510450，China；

2. Editorial Department of Journal，Guangdong Second Normal University，Guangzhou 510303，China

Abstract：What conditions should the parameters satisfy for Hilbert's type series inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m b_n \leqslant M\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

to hold? Under what conditions is the constant factor best when Hilbert's type series inequality is established? What is the expression of the best constant factor? The study of these problems is undoubtedly of great significance. In this paper，using the techniques of real analysis and the method of weight function，the authors study and analyze the formal structure and parameter relation of Hilbert's type series inequality with a homogeneous kernel，and obtain the necessary and sufficient condition for it to hold and the expression of its best constant factor. Finally，a discussion is presented of its applications in the operator theory.

Key words：Hilbert's type series inequality；homogeneous kernel；necessary and sufficient condition；the best constant factor；bounded operator

责任编辑 廖 坤