第 41 卷第 12 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2019年12月
Vol. 41　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2019.12.010

一类新的混合分数阶可微变分不等式的拓扑处理方法[①]

吴欣锟

黔南民族师范学院 数学与统计学院，贵州 都匀 558000

摘要：在可微变分不等式和分数阶可微变分不等式的基础上首次引进和研究了一类新的混合分数阶可微变分不等式. 给出了这类新的混合分数阶可微变分不等式的模型，并详细地说明了模型中的符号所代表的数学意义，证明了该模型的解集是非空的.

关　键　词：分数阶可微变分不等式；混合分数阶可微变分不等式；解集

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2019)12-0069-05

文献[1-8]介绍和研究了一类含有初值的可微变分不等式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t))+B(t,x(t))\cdot u(t)\\ u(t)\in \mathrm{SOL}(K,G(t,x(t))+S)\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

其中 K 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个非空闭凸子集，$\Omega\equiv[0,T]\times\mathbb{R}^n$，$(f,B,G)$：$\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^m$ 和 S：$\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是两个函数. 在某些条件下，文献[1]得到了不等式(1)的 Caratheodory 弱解的存在性.

文献[9-10]将不等式(1)推广到了分数阶的情形，其数学表达式为

$$\begin{cases}{}^{C}D_t^{\delta}x(t)\in F(t,x(t))+B(t,x(t))u(t) & t\in I_1\\ \langle v-u(t),G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle\geqslant 0 & \forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in I_1\\ x(0)=x_0+h(x)\end{cases}\tag{2}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$，$u(t)\in K$，$0\leqslant\delta<1$，$I_1=[0,T]$，${}^{C}D_t^{\delta}$ 是分数阶导数的表示符号，F 是一个从 $I_1\times\mathbb{R}^n$ 到 $Kv(\mathbb{R}^n)$ 的满足一定条件的映射，$Kv(\mathbb{R}^n)$ 在文中有定义，B 是一个从 $I_1\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 的满足一定条件的映射，G 是从 $I_1\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的满足一定条件的映射，Q 是从 K 到 $\mathbb{R}^m$ 的满足一定条件的映射.

本文把 δ 的研究范围改成(1, 2]，再把(2)式中的变分不等式推广到更一般的混合变分不等式，得到的新的这类带有参数 $\delta\in[1,2)$ 的分数阶混合可微变分不等式为

$$\begin{cases}{}^{C}D_t^{\delta}x(t)\in F(t,x(t))+B(t,x(t))u(t) & t\in I\\ \langle v-u(t),G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle+\varphi(v)-\varphi(u(t))\geqslant 0 & \forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in I\\ x(0)=a,\ x(h)=b & a,b\neq 0\end{cases}\tag{3}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$，$u(t)\in K$，$1\leqslant\delta<2$，$I=[0,h]$，${}^{C}D_t^{\delta}$ 是分数阶导数的表示符号，F,B,G 和 Q 这 4 个映射的定义与(2)式中的定义是相同的，φ 是一个从 $\mathbb{R}^m$ 到$(-\infty,+\infty]$的真凸下半连续函数.

① 收稿日期：2018-04-05
基金项目：贵州省联合基金项目(黔科合 LH 字[2016]7102).
作者简介：吴欣锟(1986-)，男，副教授，主要从事可微变分不等式的研究.

1 预备知识

设 X 是度量空间，E 是 Banach 空间.

$$P(E)=\{U\subset E: U\neq\varnothing\}\qquad B(E)=\{U\in P(E): U\text{ 是有界的}\}$$

$$K(E)=\{U\in P(E): U\text{ 是紧的}\}\qquad Kv(E)=\{U\in K(E): U\text{ 是凸的}\}$$

定义 1 对于一个集值算子 $M: X\longrightarrow P(E)$,

(a) 如果对 E 的任一闭子集 V, $M^{-1}(V)=\{x\in X: M(x)\cap V\neq\varnothing\}$ 是 X 的闭子集，则称 M 是上半连续的；

(b) 如果对 E 的任一弱闭子集 V, $M^{-1}(V)=\{x\in X: M(x)\cap V\neq\varnothing\}$ 是 X 的闭子集，则称 M 是弱上半连续的；

(c) 如果图 $\Gamma_M=\{(y, z): z\in M(y)\}$ 是 $X\times E$ 的闭子集，则称 M 是闭的；

(d) 如果 M 是上半连续的且对 X 里的每个有界集 Ω, $M(\Omega)$ 是 E 里的相对紧集，则称 M 是完备上半连续的；

(e) 如果对 X 的任一紧子集 Ω, $M(\Omega)$ 是 E 里的相对紧集，则称 M 是拟紧的.

引理 1[3] 如果 $M: X\longrightarrow P(E)$ 是一个闭的和拟紧的集值算子，则 M 是上半连续的.

引理 2 设 E 是 Banach 空间，Ω 是另外一个 Banach 空间的非空子集，如果 $N:\Omega\longrightarrow P(E)$ 是一个映射到弱紧且凸集的集值算子，则 N 是弱上半连续的当且仅当条件 $\{x_n\}\subset\Omega$, $x_n\to x_0\in\Omega$ 和 $y_n\in N(x_n)$ 能够推出 $\{y_n\}$ 存在一个子序列弱收敛于 y_0，其中 $y_0\in N(x_0)$.

引理 3[3] 设 M 是 E 的有界闭凸子集，再设 $T: M\longrightarrow Kv(M)$ 是一个完备的上半连续集值映射，则 $\mathrm{Fix}(T)=\{x: x\in T(x)\}$ 是非空的紧子集.

2 主要结果

在这一部分，我们来分析和研究(3)式的解的存在性.

定义 2[7] 对于一个函数 $x:[0, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$，它的 Caputo 导数 ${}^C D_t^{\delta}x(t)$ 被定义成

$$ {}^C D_t^{\delta}x(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\int_0^t\frac{x''(s)}{(t-s)^{\delta-1}}\mathrm{d}s\qquad 1\leqslant\delta<2$$

其中 $\Gamma(2-\delta)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{1-\delta}\,\mathrm{d}t$，符号 Γ 表示伽玛函数.

定义 3[9] 对于函数 $\varphi:\mathbb{R}^m\longrightarrow(-\infty, +\infty]$，如果 φ 满足下面两个条件：

(a) $\forall x\in\mathbb{R}^m$, $\varphi(x)\leqslant\liminf\limits_{y\to x}\varphi(y)$;

(b) $\forall r\in\mathbb{R}$, $V_r=\{x\in\mathbb{R}^m: \varphi(x)>r\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开子集.

则称 φ 是下半连续的.

为了得到(3)式解的存在性，我们需要下面 6 个假设成立：

(F1) $F: I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 是上半 Carathéodory 集值映射，等价于说对 $\forall v\in\mathbb{R}^n$，集值映射 $F(\cdot, v): I\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 确定了一个可测选择，且对几乎处处 $t\in I$，集值映射 $F(t, \cdot):\mathbb{R}^n\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 是上半连续的；

(F2) 对于函数 $F: I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$，存在非减的连续函数 $\Psi_F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和函数 $\eta_F\in L^p(I, \mathbb{R})$，使得

$$\|F(t, v)\|=\sup\{\|z\|: z\in F(t, v)\}\leqslant\eta_F(t)\Psi_F(\|v\|)\qquad\forall v\in\mathbb{R}^n,\ \text{a.e. } t\in I$$

其中 p 是大于 $\frac{1}{\delta}$ 的正整数；

(B) $B: I\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times m}$ 是连续函数，满足

$$\|B(t, v)\|\leqslant\eta_B\qquad\forall v\in\mathbb{R}^n,\ \forall t\in I$$

其中 η_B 是正数；

(G) 对于连续函数 $G: I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$，存在非减的连续函数 $\Psi_G: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 和函数 $\eta_G\in L^p(I,\mathbb{R})$，使得

$$\|G(t,v)\| \leqslant \eta_G(t)\Psi_G(\|v\|) \qquad \forall v\in\mathbb{R}^n, \forall t\in I$$

(Q) $Q: K\to\mathbb{R}^m$ 是满足下面两个条件的连续函数：

(Q1) Q 在 K 上是单调的，也即是说

$$\langle u-v, Q(u)-Q(v)\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u, v\in K$$

(Q2) 存在 $v_0\in K$，使得

$$\liminf_{v\in K,\ \|v\|\to\infty} \frac{\langle v-v_0, Q(v)\rangle}{\|v\|^2} > 0$$

(Φ) 函数 $\varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ 是真凸下半连续函数.

从条件(F1)和(F2)，我们可以推出从 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 映射到 $P(L^p(I,\mathbb{R}^n))$ 的集值映射

$$P_F^p(x) = \{f\in L^p(I,\mathbb{R}^n): f(t)\in F(t,x(t)),\ \text{a.e. } t\in I\}$$

是闭的，其中 $P(L^p(I,\mathbb{R}^n))$ 表示 $L^p(I,\mathbb{R}^n)$ 的所有子集组成的集合.

定义 4　(3) 式的一个解 $x\in C(I,\mathbb{R}^n)$ 是指存在一个可积函数 $u: I\longrightarrow K$ 和函数 $f\in P_F^p(x)$，满足

$$x(t) = a + \frac{1}{h}(b-a)t + \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f(s)+B(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s -$$
$$\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f(s)+B(s,x(s))u(s)]\mathrm{d}s \qquad t\in I$$
$$\langle v-u(t), G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle + \varphi(v)-\varphi(u(t)) \geqslant 0 \qquad \forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in I$$

对于一个函数 $Q: K\longrightarrow\mathbb{R}^m$，我们定义 $\mathrm{SOL}(K,Q,\varphi)$ 为

$$\mathrm{SOL}(K,Q,\varphi) = \{v\in K: \langle w-v, Q(v)\rangle + \varphi(w)-\varphi(v)\geqslant 0, \forall w\in K\} \tag{4}$$

引理 4[9]　如果条件(Q)和条件(Φ)满足，则对于每一个 $z\in\mathbb{R}^m$，解集 $\mathrm{SOL}(K, z+Q(\cdot), \varphi)$ 是非空的闭凸集，且存在正数 η_Q 满足

$$\|v\| \leqslant \eta_Q(1+\|z\|) \qquad \forall v\in \mathrm{SOL}(K, z+Q(\cdot), \varphi) \tag{5}$$

为了解决(3)式，设

$$U(z) = \mathrm{SOL}(K, z+Q(\cdot), \varphi) \qquad \forall z\in\mathbb{R}^m$$

再定义 $\Phi: I\times\mathbb{R}^n \longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\Phi(t,v) = \{B(t,v)y: y\in U(G(t,v))\} \tag{6}$$

则可以把上面的(3)式转化为

$$x(t) = a + \frac{1}{h}(b-a)t + \frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s -$$
$$\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h (h-s)^{\delta-1}[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s \qquad t\in I,\ f\in P_F^p(x),\ g\in P_\Phi^p(x) \tag{7}$$

为了解决(7)式，引入集值映射 $\Sigma: C(I,\mathbb{R}^n) \longrightarrow P(C(I,\mathbb{R}^n))$ 为

$$\Sigma(x) = \left\{a + \frac{1}{h}(b-a)t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s)+g(s)]\mathrm{d}s -\right.$$
$$\left.\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h [f(s)+g(s)]\mathrm{d}s: f\in P_F^p(x),\ g\in P_\Phi^p(x)\right\} \tag{8}$$

则 $x\in C(I,\mathbb{R}^n)$ 是(7)式的解等价于说 x 是集值映射 Σ 的不动点.

引理 5　在条件(F1),(F2),(B),(G),(Q)和(Φ)的假设下，P_F^p 和 P_Φ^p 是弱上半连续的.

证　当条件(Q)和条件(Φ)满足时，不等式(5)成立，剩下的证明过程与文献[2]中引理 3.5 的证明过程是一样的.

设从 $L^p(I,\mathbb{R}^n)$ 到 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 的映射 W 为

$$W(f)(t)=a+\frac{1}{h}(b-a)t+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}f(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}f(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

定理 1 映射 W 是完备连续的.

证 证明与文献[2]中相应结论的证明过程类似.

定理 2 (8)式的算子 Σ 是完备上半连续的.

证 证明与文献[2]中相应结论的证明过程类似.

定理 3 假设(F1),(F2),(B),(G),(Q)和(Φ)这 6 个条件成立. 如果

$$\liminf_{k\to\infty}\left[\frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\delta)}\sup_{t\in I}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{\Psi_G(k)}{k\Gamma(\delta)}\eta_Q\eta_B\sup_{t\in I}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}\eta_G(s)\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{\Psi_G(k)}{k\Gamma(\delta)}\eta_Q\eta_B\int_0^h(h-s)^{\delta-1}\eta_G(s)\mathrm{d}s\right]<1 \tag{10}$$

其中 $I=[0,h]$,则(7)式至少有一个解.

证 依据定理 2,Σ 是完备上半连续的. 为了利用引理 3,我们还需证明集合 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 中任意一个以原点为圆心,$\mathbb{R}(\mathbb{R}>0)$ 为半径的球 $B_{\mathbb{R}}$ 都满足 $\Sigma(B_{\mathbb{R}})\subset B_{\mathbb{R}}$. 利用反证法,假设在 $C(I,\mathbb{R}^n)$ 里存在一个序列 $\{x_k\}$ 满足 $\|x_k\|_C\leqslant k$,$y_k\in\Sigma(x_k)$,$\|y_k\|_C>k$ 对 $\forall k\in\mathbb{N}_+$ 都成立,此时

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\|y_k\|_C}{k}\geqslant 1$$

根据集值映射 Σ 的定义,可知存在 $f_k\in P_F^p(x_k)$ 和 $g_k\in P_\Phi^p(x_k)$,满足

$$y_k(t)=a+\frac{1}{h}(b-a)t+W(f_k+g_k)(t)\qquad t\in I$$

对 $\forall t\in I$,因为

$$W(f_k+g_k)(t)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s$$

所以

$$\|y_k(t)\|=\left\|a+\frac{1}{h}(b-a)t+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s\right\|\leqslant$$
$$b+\left\|\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s\right\|+\left\|\frac{1}{h}\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}[f_k(s)+g_k(s)]\mathrm{d}s\right\|\leqslant$$
$$b+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\sup_{t\in I}\left\{\int_0^t(t-s)^{\delta-1}[\|f_k(s)\|+\|g_k(s)\|]\mathrm{d}s\right\}+\frac{1}{h}\sup_{t\in I}\left\{\frac{t}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}[\|f_k(s)\|+\|g_k(s)\|]\mathrm{d}s\right\}\leqslant$$
$$b+\frac{\Psi_F(k)}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in I}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{\eta_Q\eta_B}{\Gamma(\delta)}\sup_{t\in I}\left\{\int_0^t(t-s)^{\delta-1}[1+\eta_G(s)\Psi_G(k)]\mathrm{d}s\right\}+$$
$$\frac{\Psi_F(k)}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\frac{\eta_Q\eta_B}{\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}[1+\eta_G(s)\Psi_G(k)]\mathrm{d}s$$

所以

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\|y_k\|_C}{k}\leqslant\liminf_{k\to\infty}\left[\frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\delta)}\sup_{t\in I}\int_0^t(t-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+\right.$$
$$\frac{\eta_Q\eta_B}{k\Gamma(\delta)}\sup_{t\in I}\left\{\int_0^t(t-s)^{\delta-1}(1+\eta_G(s)\Psi_G(k))\mathrm{d}s\right\}+\frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}\eta_F(s)\mathrm{d}s+$$
$$\left.\frac{\eta_Q\eta_B}{k\Gamma(\delta)}\int_0^h(h-s)^{\delta-1}(1+\eta_G(s)\Psi_G(k))\mathrm{d}s\right]$$

所以依据(10)式,我们有

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\|y_k\|_C}{k}<1$$

这与前面的假设是矛盾的. 定理 3 得证.

参考文献：

[1] PANG J S，STEWARD D E. Differential Variational Inequalities [J]. Math Program(Ser A)，2008，113(2)：345-424.

[2] LOI N V，DINH K T，OBUKHOVSKII V，et al. Topological Methods for Some Classes of Differential Variational Inequalities [J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis，2016，2016：1-18.

[3] KAMENSKII M，OBUKHOVSKII V，ZECCA P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces [M]. New York：DE GRUYTER，2001.

[4] ANITESCU M，TASORA A. An Iterative Approach for Cone Complementarity Problems for Non-Smooth Dynamics [J]. Comp Opt Appl，2010，47(2)：207-235.

[5] BOTHE D. Multivalued Perturbations of m-Accretive Differential Inclusions [J]. Israel J Math，1998，108(1)：109-138.

[6] GWINNER J. On Differential Variational Inequalities and Projected Dynamical Systems-Equivalence and a Stability Result [J]. Discrete and Continuous Dynam Syst，2007，2007：467-476.

[7] GWINNER J. A Note on Linear Differential Variational Inequalities in Hilbert Space [M] //IFIP Advances in Information and Communication Technology. Berlin，Heidelberg：Springer，2013：85-91.

[8] KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. Amsterdam：Elsevier，2006.

[9] LI X S，HUANG L J，O'REGAN D. Differential Mixed Variational Inequalities in Finite Dimensional Spaces [J]. Nonlinear Analysis，2010，72(9-10)：3875-3886.

[10] LI C P，ZHANG F R. A Survery on the Stability of Fractional Differential Equations [J]. Eur Phys J Special Topics，2011，193(1)：27-47.

Topological Methods for a New Class of Fractional Mixed Differential Variational Inequalities

WU Xin-kun

College of Mathematics and Statistics，Qiannan Normal University for Nationalities，Duyun Guizhou 558000，China

Abstract：Based on fractional differential variational inequality and fractional mixed differential variational inequality，a new class of fractional mixed differential variational inequalities are introduced and studied in this paper. First，a model of this class of fractional mixed differential variational inequalities is given. Then，a detailed description is given of the mathematical meanings of the symbols in this model. Finally，it is proved that the set of solutions of this model is non-empty.

Key words：fractional differential variational inequality；fractional mixed differential variational inequality；set of solutions

责任编辑　廖　坤