第 42 卷第 1 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2020 年 1 月
Vol. 42　No. 1　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jan.　2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.01.007

基于截断学习效应和时间相关的供应链排序问题

王申重[1]，　张新功[2]

1. 郑州西亚斯学院 教育学院，河南 新郑 451150；2. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要： 研究了基于截断学习效应和时间相关的供应链排序问题. 考虑目标函数是为了最小化最大完工时间、总(权)完工时间、最大延迟. 对于最大完工时间和总完工时间问题证明了按照正常加工时间非减的顺序排列可以得到最优序列. 针对加权总完工时间问题和最大延迟问题，利用经典的排序算法作为启发式算法给出了问题的最坏竞争比. 在正常加工时间与权重或工期满足一致关系时，对加权总完工时间和最大延迟问题分别给出了多项式时间算法.

关　键　词： 单台机器；供应链排序；截断学习效应；时间相关；配送时间

中图分类号：O223　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2020)01－0044－07

学习效应和时间相关的供应链排序问题在现代工业生产、管理科学、服务业等方面有着广泛的应用[1-9]. 基于带有配送问题的供应链排序问题是目前的研究热点. 本文考虑截断学习效应、与时间相关的加工时间以及带有配送时间的供应链排序模型. 配送时间就是工件加工完成后配送到客户处的时间. 考虑的目标函数为最大完工时间、总(权)完工时间和最大延迟.

1　问题描述

本文假定：n 个工件 $J_1, J_2, \cdots, J_n$ 在同一台机器上进行加工，每次只能加工一个工件且在加工过程中不能中断；每个工件 J_j 有正常加工时间 p_j、权重 w_j、工期 d_j 和配送时间 q_j；工件 J_j 的实际加工时间为 $p_{jr}(t)=p_j\alpha(t)\max\{r^a, b\}$，其中 t 为工件 J_j 的开工时间，r 为工件 J_j 在加工序列中的位置，$\alpha(t)$ 为开工时间 t 的非增凸函数且满足 $0<\alpha(t)\leqslant 1$，$\alpha(0)=1$，$\alpha'(t)<0$，$a<0$ 为学习效应，b 为给定的参数且 $0<b<1$. 工件配送时间 q_j 采用 Koulamas[6] 中的模型，即第 r 位工件的配送时间为 $q_r=c\sum\limits_{l=1}^{r-1}p_{[l]}$，$p_{[l]}$ 为排在第 l 位工件的正常加工时间且 $c\geqslant 0$，简记为 q_{psd}. 符号 C_j 和 L_j 表示工件 J_j 的完工时间和延迟，$C_{\max}=\max\{C_j \mid j=1,2,\cdots,n\}$ 表示最大完工时间，$L_{\max}=\max\{L_j=C_j-d_j \mid j=1,2,\cdots,n\}$ 表示最大延迟. 本文所研究的模型如下：

$$1 \mid p_{jr}(t)=p_j\alpha(t)\max\{r^a, b\},\ q_{psd} \mid C_{\max} \tag{1}$$

$$1 \mid p_{jr}(t)=p_j\alpha(t)\max\{r^a, b\},\ q_{psd} \mid \sum C_j \tag{2}$$

收稿日期：2017－10－29

基金项目：国家自然科学基金项目(11571321，71561007)；重庆市科委自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0631)；重庆市教委研究生教改重点项目(yjg182019).

作者简介：王申重(1977－)，男，副教授，硕士，主要从事组合最优化的研究.

通信作者：张新功，教授，博士.

$$1 \mid p_{jr}(t)=p_j\alpha(t)\max\{r^a, b\}, q_{psd} \mid \sum w_j C_j \tag{3}$$

$$1 \mid p_{jr}(t)=p_j\alpha(t)\max\{r^a, b\}, q_{psd} \mid L_{\max} \tag{4}$$

利用简单的数学计算可以得到如下引理 1：

引理 1　设 $\lambda=\dfrac{\max\{(r+1)^a, b\}}{\max\{r^a, b\}}$，$a<0$，$0<b<1$，则 $0<\lambda\leqslant 1$.

引理 2[10]　设 $\alpha(t)$ 是非增可微凸函数且 $\alpha'(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是非减函数，则当 $0<k\leqslant 1$，$0<\lambda\leqslant 1$，$m>0$，$t_0>0$ 时，$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\alpha(t_0+mk)-\lambda k\alpha(t_0+m)\leqslant 0$ 成立.

引理 3[10]　设 $\alpha(t)$ 是非增可微凸函数且 $\alpha'(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是非减函数，则当 $0<k\leqslant 1$，$0<\lambda\leqslant 1$，$m>0$，$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<1$，$t_0>0$ 时，$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\lambda_1\alpha(t_0+mk)-\lambda\lambda_2 k\alpha(t_0+m)\leqslant 0$ 成立.

定义 1[10]　反一致关系：工件 J_j 的正常加工时间和权重满足 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow w_i\geqslant w_j$.

定义 2[10]　一致关系：工件 J_j 的正常加工时间和工期满足 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow d_i\leqslant d_j$.

2　单机排序问题

2.1　最大完工时间问题

定理 1　对于模型(1)，工件按照 p_j 非减的顺序(SPT) 排列即为最优序列.

证　假设 $S_1: \pi_1\to J_i\to J_j\to\pi_2$ 是满足 $p_i\leqslant p_j$ 的序列，交换工件 J_i 和 J_j 得到 $S_2: \pi_1\to J_j\to J_i\to\pi_2$，$\pi_1$ 和 π_2 表示部分序列且 π_1 中有 $r-1$ 个工件，且第 r 个工件开工时间为 t_0. 则有

$$C_i(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}+c\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}$$

$$C_j(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\}+c(\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}+p_i)$$

$$C_j(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}+c\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}$$

$$C_i(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}+p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\}+c(\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}+p_j)$$

故有

$$\begin{aligned}C_j(S_1)-C_i(S_2)=\ & p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\}-\\ & p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}-p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\}+c(p_i-p_j)=\\ & \alpha(t_0)\max\{r^a, b\}(p_i-p_j)+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\}-\\ & p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\}+c(p_i-p_j)=\\ & p_j\max\{r^a, b\}\begin{bmatrix}\alpha(t_0)(\dfrac{p_i}{p_j}-1)+\alpha(t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\})\dfrac{\max\{(r+1)^a, b\}}{\max\{r^a, b\}}\\ -\dfrac{p_i}{p_j}\alpha(t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\})\dfrac{\max\{(r+1)^a, b\}}{\max\{r^a, b\}}\end{bmatrix}+c(p_i-p_j)\end{aligned}$$

令

$$\frac{p_i}{p_j}=k \qquad \frac{\max\{(r+1)^a, b\}}{\max\{r^a, b\}}=\lambda$$

$$p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}=m \qquad p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}=mk$$

则 $0<k\leqslant 1$，$m>0$. 由引理 1,2 知 $0<\lambda\leqslant 1$，

$$C_j(S_1)-C_i(S_2)=p_j\max\{r^a, b\}[(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\alpha(t_0+mk)-\lambda k\alpha(t_0+m)]+c(p_i-p_j)\leqslant 0$$

所以 $C_j(S_1)\leqslant C_i(S_2)$. 工件 J_i 和 J_j 前面的工件在其交换位置后完工时间没有改变，工件 J_i 和 J_j 后面的工件在其交换位置后开工时间没有变小，所以工件按照 p_j 非减的顺序(SPT) 排列即为最优序.

2.2　总完工时间问题

定理 2　对于模型(2)，工件按照 p_j 非减的顺序(SPT) 排列即为最优序.

证 类似于定理 1，假设 $S_1: \pi_1 \to J_i \to J_j \to \pi_2$ 和 $S_2: \pi_1 \to J_j \to J_i \to \pi_2$. 在 $p_i \leqslant p_j$ 的条件下只需证 $C_j(S_1) \leqslant C_i(S_2)$ 和 $C_i(S_1) + C_j(S_1) \leqslant C_i(S_2) + C_j(S_2)$ 即可. 由定理 1 可知 $C_j(S_1) \leqslant C_i(S_2)$，又 $p_i \leqslant p_j$，则

$$C_i(S_1) \leqslant C_j(S_2) \qquad C_i(S_1) + C_j(S_1) \leqslant C_i(S_2) + C_j(S_2)$$

成立，故

$$\sum C_i(S_i) \leqslant \sum C_j(S_j)$$

即工件按照 p_j 非减顺序(SPT)排列为最优序.

2.3 加权总完工时间问题

注意到经典的 WSPT 序并不能产生模型(3)的最优序列. 接下来利用 WSPT 序作为启发式算法，给出了最坏竞争比分析如下：

定理 3 对于模型(3)，将 WSPT 序排列所得序列和最优序列分别表示为 π 和 π^*，且在零时刻开工，则模型(3)的最坏竞争比分析为

$$\rho_1 = \frac{\sum w_j C_j(\pi)}{\sum w_j C_j(\pi^*)} \leqslant \frac{1}{\alpha C_{\pi^*} \max\{n^a, b\}}$$

且这个界是紧的.

证 记 $\pi: \pi(1) \to \pi(2) \to \cdots \to \pi(n)$ 和 $\pi^*: \pi^*(1) \to \pi^*(2) \to \cdots \to \pi^*(n)$，设 $p_{[i]}$ 和 $p_{\pi(i)}$ 表示 π 中第 i 个工件的正常加工时间和实际加工时间，$p_{[i]^*}$ 和 $p_{\pi^*(i)}$ 表示 π^* 中第 i 个工件的正常加工时间和实际加工时间，则

$$\begin{aligned}
\sum w_j C_j(\pi) = {} & w_{\pi(1)} p_{\pi(1)} + w_{\pi(2)}(p_{\pi(1)} + p_{\pi(2)} + c p_{[1]}) + \cdots + \\
& w_{\pi(n)}(p_{\pi(1)} + p_{\pi(2)} + \cdots + p_{\pi(n)} + c \sum_{i=1}^{n-1} p_{[i]}) \leqslant \\
& (w_{\pi(1)} p_{[1]} + w_{\pi(2)}(p_{[1]} + p_{[2]}) + \cdots + w_{\pi(n)} \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}) \max\{1^a, b\} + \\
& c(w_{\pi(2)} p_{[1]} + w_{\pi(3)}(p_{[1]} + p_{[2]}) + \cdots + w_{\pi(n)} \sum_{i=1}^{n-1} p_{[i]}) = \\
& (w_{\pi(1)} p_{[1]} + w_{\pi(2)}(p_{[1]} + p_{[2]}) + \cdots + w_{\pi(n)} \sum_{i=1}^{n} p_{[i]})(\max\{1^a, b\} + c) - c \sum_{i=1}^{n} w_{\pi(i)} p_{[i]} = \\
& (\sum_{j=1}^{n} w_{\pi(j)} (\sum_{i=1}^{j} p_{[i]}))(1 + c) - c \sum_{i=1}^{n} w_{\pi(i)} p_{[i]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum w_j C_j(\pi^*) = {} & w_{\pi^*(1)} p_{\pi^*(1)} + w_{\pi^*(2)}(p_{\pi^*(1)} + p_{\pi^*(2)} + c p_{[1]^*}) + \cdots + w_{\pi^*(n)}(\sum_{i=1}^{n} p_{\pi^*(i)} + c \sum_{i=1}^{n-1} p_{[i]^*}) \geqslant \\
& (w_{\pi^*(1)} p_{[1]^*} + w_{\pi^*(2)}(p_{[1]^*} + p_{[2]^*}) + \cdots + w_{\pi^*(n)} \sum_{i=1}^{n} p_{[i]^*}) \alpha C_{\pi^*} \max\{n^a, b\} + \\
& c(w_{\pi^*(2)} p_{[1]^*} + w_{\pi^*(3)}(p_{[1]^*} + p_{[2]^*}) + \cdots + w_{\pi^*(n)} \sum_{i=1}^{n-1} p_{[i]^*}) = \\
& (\sum_{j=1}^{n} w_{\pi^*(j)} (\sum_{i=1}^{j} p_{[i]^*}))(\alpha C_{\pi^*} \max\{n^a, b\} + c) - c \sum_{i=1}^{n} w_{\pi^*(i)} p_{[i]^*} \geqslant \\
& (\sum_{j=1}^{n} w_{\pi(j)} (\sum_{i=1}^{j} p_{[i]}))(\alpha C_{\pi^*} \max\{n^a, b\} + c) - c \sum_{i=1}^{n} w_{\pi(i)} p_{[i]} \geqslant \\
& ((\sum_{j=1}^{n} w_{\pi(j)} (\sum_{i=1}^{j} p_{[i]}))(1 + c) - c \sum_{i=1}^{n} w_{\pi(i)} p_{[i]}) \alpha C_{\pi^*} \max\{n^a, b\}
\end{aligned}$$

进一步得

$$\rho_1=\frac{\sum w_jC_j(\pi)}{\sum w_jC_j(\pi^*)}\leqslant\frac{1}{\alpha C_{\pi^*}\max\{n^a,b\}}$$

其中 C_{π^*} 为定理 1 中的最大完工时间.

由于 $0<\max\{r^a,b\}\leqslant 1$，$0<\alpha(t)\leqslant 1$，下面证明这个界是紧的. 如果 $\max\{r^a,b\}=1(b\rightarrow 1)$ 和 $\alpha(t)=1$，WSPT 序即为模型(3) 的最优序列，因此这个界是紧的.

尽管经典的 WSPT 序规则不能得到模型(3) 的最优解，但可以证明加工时间和权重满足反一致关系时，模型(3) 仍然可以得到多项式时间算法.

定理 4　对于问题模型(3)，当工件的正常加工时间和权重存在反一致关系即 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow w_i\geqslant w_j$ 时，按照$\frac{p_j}{w_j}$ 非减的顺序 WSPT 排列即为最优序.

证　若 $S_1:\pi_1\rightarrow J_i\rightarrow J_j\rightarrow\pi_2$ 是满足$\frac{p_i}{w_i}\leqslant\frac{p_j}{w_j}$ 的序列，交换工件 J_i 和 J_j 得一新序 $S_2:\pi_1\rightarrow J_j\rightarrow J_i\rightarrow\pi_2$，$\pi_1$ 中有 $r-1$ 个工件，且第 r 个工件的开工时间为 t_0. 则有

$$C_i(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}+c\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}$$

$$C_j(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}]\max\{(r+1)^a,b\}+c(\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}+p_i)$$

$$C_j(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}+c\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}$$

$$C_i(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}+p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}]\max\{(r+1)^a,b\}+c(\sum_{l=1}^{r-1}p_{[l]}+p_j)$$

$$\begin{aligned}
&w_iC_i(S_1)+w_jC_j(S_1)-w_iC_i(S_2)-w_jC_j(S_2)=\\
&w_ip_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}+w_jp_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}+\\
&w_jp_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}]\max\{(r+1)^a,b\}-\\
&w_jp_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}-w_ip_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}-\\
&w_ip_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}]\max\{(r+1)^a,b\}+c(w_jp_i-w_ip_j)=\\
&\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}(p_i-p_j)(w_i+w_j)+w_jp_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}]\max\{(r+1)^a,b\}-\\
&w_ip_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}]\max\{(r+1)^a,b\}+c(w_jp_i-w_ip_j)=\\
&p_j\max\{r^a,b\}(w_i+w_j)\left[\alpha(t_0)(\frac{p_i}{p_j}-1)+\frac{w_j}{w_i+w_j}\alpha(t_0+p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\})\frac{\max\{(r+1)^a,b\}}{\max\{r^a,b\}}\right]-\\
&p_j\max\{r^a,b\}(w_i+w_j)\left[\frac{p_i}{p_j}\frac{w_i}{w_i+w_j}\alpha(t_0+p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\})\frac{\max\{(r+1)^a,b\}}{\max\{r^a,b\}}\right]+c(w_jp_i-w_ip_j)
\end{aligned}$$

令

$$\frac{p_i}{p_j}=k\qquad\frac{\max\{(r+1)^a,b\}}{\max\{r^a,b\}}=\lambda\qquad p_j\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}=m$$

$$p_i\alpha(t_0)\max\{r^a,b\}=mk\qquad\frac{w_j}{w_i+w_j}=\lambda_1\qquad\frac{w_i}{w_i+w_j}=\lambda_2$$

由引理 1 和引理 3 可知

$$0<k\leqslant 1,\ 0<\lambda\leqslant 1,\ m>0,\ 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<1,\ w_jp_i-w_ip_j\leqslant 0$$

$$w_iC_i(S_1)+w_jC_j(S_1)-w_iC_i(S_2)-w_jC_j(S_2)=$$

$$p_j\max\{r^a,b\}(w_i+w_j)[(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\lambda_1\alpha(t_0+mk)-\lambda\lambda_2k\alpha(t_0+m)]+c(w_jp_i-w_ip_j)\leqslant 0$$

故当满足反一致关系时按照$\frac{p_j}{w_j}$ 非减的(WSPT) 排列即为最优序.

由定理 4 易知下面推论 1 成立.

推论 1　对于问题模型(3)，当工件的权重和加工时间成比例时，p_j 非减的排列顺序(SPT) 即为最优序.

2.4　最大延迟问题

类似可知经典的 EDD 序规则不能得到模型(4) 的最优序列. 为了得到当前问题的最坏竞争比分析，需要重新定义最坏竞争比函数为

$$\rho_2=\frac{L_{\max}(\pi)+d_{\max}}{L_{\max}(\pi^*)+d_{\max}}$$

其中 $d_{\max}=\max\{d_j \mid j=1, 2, \cdots, n\}$，$\pi$ 和 $\pi *$ 表示 EDD 序列和最优序列.

定理 5　对于模型(4)，将按照 EDD 序排列所得序列和最优序列分别表示为 π 和 π^*，在零时刻开工，则

$$\rho_2=\frac{L_{\max}(\pi)+d_{\max}}{L_{\max}(\pi^*)+d_{\max}} \leqslant 2-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\}$$

且这个界是紧的.

证　记 π：$\pi(1)\rightarrow\pi(2)\rightarrow\cdots\rightarrow\pi(n)$ 和 π^*：$\pi^*(1)\rightarrow\pi^*(2)\rightarrow\cdots\rightarrow\pi^*(n)$，设 $p_{[i]}$ 和 $p_{\pi(i)}$ 分别表示 π 中第 i 个工件的正常加工时间和实际加工时间，$p_{[i]^*}$ 和 $p_{\pi^*(i)}$ 分别表示 π^* 中第 i 个工件的正常加工时间和实际加工时间.

$$\begin{aligned}L_{\max}(\pi)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{C_{\pi(j)}-d_{\pi(j)}\}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{j}p_{\pi[i]}+c\sum_{i=1}^{j-1}p_{[i]}-d_{\pi(j)}\}\leqslant\\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}+c\sum_{i=1}^{j-1}p_{[i]}-d_{\pi(j)}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\max}(\pi^*)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{C_{\pi^*(j)}-d_{\pi^*(j)}\}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{j}p_{\pi^*(i)}+c\sum_{i=1}^{j-1}p_{[i]^*}-d_{\pi^*(j)}\}=\\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]^*}+c\sum_{i=1}^{j-1}p_{[i]^*}-d_{\pi^*(j)}-\sum_{i=1}^{j}p_{[i]^*}+\sum_{i=1}^{j}p_{\pi^*(i)}\}\geqslant\\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]^*}+c\sum_{i=1}^{j-1}p_{[i]^*}-d_{\pi^*(j)}\}-\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}+\sum_{i=1}^{n}p_{\pi^*(i)}\geqslant\\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]^*}+c\sum_{i=1}^{j-1}p_{[i]^*}-d_{\pi^*(j)}\}-\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}+\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\}\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\max}(\pi)-L_{\max}(\pi^*)\leqslant(1-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\})\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}\leqslant\\ (1-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\})C^*_{\max}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_2=\frac{L_{\max}(\pi)+d_{\max}}{L_{\max}(\pi^*)+d_{\max}}\leqslant\frac{L_{\max}(\pi^*)+(1-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\})\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}+d_{\max}}{L_{\max}(\pi^*)+d_{\max}}\leqslant\\ 1+\frac{(1-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\})\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}}{L_{\max}(\pi^*)+d_{\max}}\leqslant 1+\frac{(1-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\})\sum_{i=1}^{n}p_{[i]}}{C^*_{\max}}\leqslant\\ 1+\frac{(1-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\})C^*_{\max}}{C^*_{\max}}=2-\alpha C^*_{\max}\max\{n^a, b\}\end{aligned}$$

其中 $C^*_{\max}$ 为定理 1 中的最优时间表长.

由于 $0<\max\{r^a, b\}\leqslant 1$，$0<\alpha(t)\leqslant 1$，当 $\max\{r^a, b\}=1(b\rightarrow 1)$ 和 $\alpha(t)=1$ 时 EDD 序即为模型(4) 的最优序列，因此这个界是紧的.

尽管经典的 EDD 序规则不能得到模型(4) 的最优解，但可以证明加工时间和工期满足一致关系时，当前模型仍然是多项式时间可解的.

定理 6　对于模型(4)，当正常加工时间和工期存在一致关系时，按照 d_j 非减的顺序(EDD) 排列即为

最优序.

证　若 $S_1: \pi_1 \to J_i \to J_j \to \pi_2$ 是满足 $p_i \leqslant p_j \Rightarrow d_i \leqslant d_j$ 的序列，交换工件 J_i 和 J_j 得一新序 S_2：$\pi_1 \to J_j \to J_i \to \pi_2$，$\pi_1$ 中有 $r-1$ 个工件，且第 r 个工件的开工时间为 t_0. 则有

$$L_i(S_1) = t_0 + p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\} + c\sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]} - d_i$$

$$L_j(S_1) = t_0 + p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\} + p_j\alpha[t_0 + p_i\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\} + c(\sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]} + p_i) - d_j$$

$$L_j(S_2) = t_0 + p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\} + c\sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]} - d_j$$

$$L_i(S_2) = t_0 + p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\} + p_i\alpha[t_0 + p_j\alpha(t_0)\max\{r^a, b\}]\max\{(r+1)^a, b\} + c(\sum_{l=1}^{r-1} p_{[l]} + p_j) - d_i$$

由定理 1,2 可知 $\max\{L_i(S_1), L_j(S_1)\} \leqslant \max\{L_i(S_2), L_j(S_2)\}$，$L_{\max}(S_1) \leqslant L_{\max}(S_2)$ 成立，交换工件 J_i 和 J_j 最大工期不会变小，所以当满足一致关系时按照 d_j 非减的顺序(EDD) 排列即为最优序.

由定理 6 易知下面推论 2 和推论 3 成立.

推论 2　对于模型(4)，如果工件的加工时间都相同，工件按照 d_j 非减的顺序(EDD) 排列即为最优序.

推论 3　对于模型(4)，如果工件的工期都相同，工件按照 p_j 非减的顺序(SPT) 排列即为最优序.

3　实例验证

下面给出 3 个算例来验证上面所给出的结论的合理性和正确性.

假设 $p_{jr}(t) = p_j\alpha(t)\max\{r^a, b\}$ 里 $\alpha(t) = 1 - 0.02t$，$a = -0.5$，$b = 0.75$，$c = 0.1$，在零时刻开始加工.

例 1　$n=5$，$p_1=4$，$p_2=2$，$p_3=6$，$p_4=8$，$p_5=10$，对 $C_{\max}$ 和 $\sum C_j$，按照 SPT 序排列 5 个工件得到 S_1：$J_2 \to J_1 \to J_3 \to J_4 \to J_5$，计算可得 $C_2=2$，$C_1=5.08$，$C_3=9.54$，$C_4=15.07$，$C_5=21.29$，则有 $C_{\max}(S_1)=21.29$，$\sum C_j(S_1)=52.98$. 交换一下 J_1 和 J_2，得一新序 S_2：$J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_5$，计算可得 $C_1=4$，$C_2=5.78$，$C_3=10$，$C_4=15.47$，$C_5=21.63$，则有 $C_{\max}(S_2)=21.63$，$\sum C_j(S_2)=56.88$. 由上面结果可知 $C_{\max}(S_1) < C_{\max}(S_2)$，$\sum C_j(S_1) < \sum C_j(S_2)$.

例 2　$n=5$，$p_1=4$，$p_2=2$，$p_3=6$，$p_4=8$，$p_5=10$，$w_1=4$，$w_2=5$，$w_3=3$，$w_4=2$，$w_5=1$，对 $\sum w_jC_j$，按照 WSPT 序排列 5 个工件得到 S_1：$J_2 \to J_1 \to J_3 \to J_4 \to J_5$，计算可得 $C_2=2$，$C_1=5.08$，$C_3=9.54$，$C_4=15.07$，$C_5=21.29$，则有 $\sum w_jC_j(S_1)=110.37$. 交换一下 J_1 和 J_2，得一新序 S_2：$J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_5$，计算可得 $C_1 = 4$，$C_2 = 5.78$，$C_3 = 10$，$C_4 = 15.47$，$C_5 = 21.63$，则有 $\sum w_jC_j(S_2) = 127.47$. 由上面结果可知 $\sum w_jC_j(S_1) < \sum w_jC_j(S_2)$.

例 3　$n=5$，$p_1=6$，$p_2=4$，$p_3=9$，$p_4=12$，$p_5=15$，$d_1=4$，$d_2=3$，$d_3=9$，$d_4=10$，$d_5=14$，对于 $L_{\max}$，按照 EDD 序排列 5 个工件得到序列 S_1：$J_2 \to J_1 \to J_3 \to J_4 \to J_5$，计算可得 $C_2 = 4$，$L_2 = 1$，$C_1 = 8.54$，$L_1 = 4.54$，$C_3 = 14.79$，$L_3 = 5.79$，$C_4 = 22.21$，$L_4 = 12.21$，$C_5 = 30.09$，$L_5 = 16.09$，则有 $L_{\max}(S_1) = 16.09$. 交换一下 J_1 和 J_2，得一新序 S_2：$J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_5$，计算得 $C_1 = 6$，$L_1 = 2$，$C_2 = 9.24$，$L_2 = 6.24$，$C_3 = 15.22$，$L_3 = 6.22$，$C_4 = 22.56$，$L_4 = 12.56$，$C_5 = 30.36$，$L_5 = 16.36$，则有 $L_{\max}(S_2)=16.36$. 从上面结果可知 $L_{\max}(S_1) < L_{\max}(S_2)$.

4　结　论

本文研究了基于截断学习效应和非增函数的时间相关的供应链单机排序模型. 工件的实际加工时间是截断学习效应及位置有关凸函数. 首先给出了多项式时间算法. 对于一般情形，利用经典的 WSPT 序，EDD 序作为启发式算法给出了最坏竞争比分析.

参考文献:

[1] BISKUP D. Single-Machine Scheduling with Learning Considerations [J]. European Journal of Operational Reserch, 1999, 115(1): 173-178.

[2] YANG D L, KUO W H. Some Scheduling Problems with Deteriorating Jobs and Learning Effects [J]. Computer and Industrial Engineering, 2010, 58(1): 25-28.

[3] YANG D L, KUO W H . Some Scheduling Problems with Deteriorating Jobs and Learning Effects [J]. Computers & Industrial Engineering, 2010, 58(1): 25-28.

[4] ZHANG X G, YAN G L, HUANG W Z. Single-Machine Scheduling Problems with Time and Position Dependent Processing Times [J]. Annals of Operational Research, 2011, 186(1): 345-356.

[5] 张新功. 时间相关的单机排序的最坏竞争比分析 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(5): 5-10.

[6] KOULAMAS C, KYPARISIS G J. Single-Machine Scheduling Problems with Past-Sequence-Dependent Delivery Times [J]. International Journal of Production Economics, 2010, 126(2): 264-266.

[7] 刘 洋, 唐恒永, 赵传立. 同时具有学习效应和退化效应的单机排序问题 [J]. 运筹与管理, 2012, 21(3): 81-86.

[8] WU C C, YIN Y, CHENG S R. Single-Machine and Two-Machine Flowshop Scheduling Problems with Truncated Position-Based Learning Functions [J]. Journal of Operational Research Society, 2012, 64(1): 147-156.

[9] 白 静, 刘 璐, 王吉波. 具有截断学习效应和工件带准备时间的单机排序问题 [J]. 运筹与管理, 2014, 23(6): 152-156.

[10] 王申重. 基于一般时间相关和位置相关的单机排序问题研究 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(2): 6-10.

The Supply Chain Scheduling Problem Based on Truncated Learning Effect and Time Dependence

WANG Shen-zhong[1], ZHANG Xin-gong[2]

1. School of Education, Zhengzhou Sias College, Xinzheng Henan 451150, China;
2. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: This paper studies truncated learning effect and time-dependent effect on the supply chain scheduling. The truncated learning effect means that the actual processing time of a job is a function of its position and a control parameter. The objection functions are to minimize the makespan, the (weighted) total completion time and the maximum lateness. For the first two scheduling problems, we show that their optimal sequence can be obtained by the non-decreasing normal processing time scheduling. For the total weighted completion and the maximum lateness, we present the worst-case bounds by the heuristic sequencing rules of the classic scheduling algorithms. The latter two problems can also be solved by polynomial time algorithms under some special conditions between the normal processing times and job weights or due date. Finally, we give the results of some numerical experiments to elaborate the reasonability of these algorithms.

Key words: single machine; supply chain scheduling; truncated learning effect; time dependence; delivery time

责任编辑 张 栒