第 42 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2020 年 2 月
Vol. 42　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.02.005

两类特殊图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标

杨笑蕊[1]，　强会英[1]，　纳仁花[2]，　李雨虹[1]

1. 兰州交通大学 数理学院，兰州 730070；2. 兰州工业学院 基础学科部，兰州 730050

摘要： 通过对联图和冠图的结构进行分析，得到了这两类运算图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标. 运用此结论，计算出星图、轮图、完全图以及完全二部图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标.

关　键　词： 联图；冠图；Szeged 指标；修正 Szeged 指标

中图分类号： O157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2020)02－0029－07

本文考虑的所有图均为有限简单图. 令 G 表示顶点集为 V(G)，边集为 E(G) 的连通图. 对于 $u, v \in V(G)$，令 $d_G(u, v)$ 表示在图 G 中 u 和 v 之间的距离. 一个连通图 G 的 Wiener 指标 W(G) 是指 G 中所有顶点对的距离之和，即

$$W(G) = \sum_{\{u,\ v\} \subseteq V(G)} d_G(u,\ v)$$

Wiener 指标是著名化学家 H. Wiener 在 1947 年研究烷烃化合物的沸点时提出来的[1]. 自那之后，Wiener 指标被用来解释分子的各种物理化学性质以及与分子结构相关的生物活性. 因此，Wiener 指标得到了许多数学家和化学家的关注和研究[2-3].

对于 $e = uv \in E(G)$，定义如下的集合：

$$N_u(e \mid G) = \{w \in V(G): d_G(u,\ w) < d_G(v,\ w)\}$$

$$N_v(e \mid G) = \{w \in V(G): d_G(v,\ w) < d_G(u,\ w)\}$$

$$N_0(e \mid G) = \{w \in V(G): d_G(u,\ w) = d_G(v,\ w)\}$$

对于 e，$\{N_u(e \mid G), N_v(e \mid G), N_0(e \mid G)\}$ 是图 G 的顶点集的划分. 令集合 $N_u(e \mid G)$，$N_v(e \mid G)$，$N_0(e \mid G)$ 所包含元素的个数分别为 $n_u(e \mid G)$，$n_v(e \mid G)$，$n_0(e \mid G)$，显然有

$$n_u(e \mid G) + n_v(e \mid G) + n_0(e \mid G) = n$$

其中 n 是图 G 的顶点数. 如果 G 是二部图，则对 $\forall\, e \in E(G)$，有 $n_0(e \mid G) = 0$，即

$$n_u(e \mid G) + n_v(e \mid G) = n$$

当图是一棵树 T 时，Wiener 指标的另一种广泛应用的形式为[4]

$$W(T) = \sum_{e = uv \in E(T)} n_u(e \mid G) n_v(e \mid G)$$

基于上述结论，Gutman 引入了一个一般图的不变量，并命名为 Szeged 指标 $Sz(G)$[5]

$$Sz(G) = \sum_{e = uv \in E(G)} n_u(e \mid G) n_v(e \mid G)$$

收稿日期：2018－08－31
基金项目：国家自然科学基金项目(11461038)；甘肃省教育厅硕导项目(2017A-021)；兰州交通大学青年基金项目(2015027，2016014).
作者简介：杨笑蕊(1994－)，女，硕士研究生，主要从事图论与组合优化的研究.

Randić 观察到 Szeged 指标没有考虑到一条边上两个端点距离相等的点，因此他提出了修正 Szeged 指标的概念[6]. 图的修正 Szeged 指标定义为

$$Sz^{*}(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e\mid G)+\frac{n_0(e\mid G)}{2}\right)\left(n_v(e\mid G)+\frac{n_0(e\mid G)}{2}\right)$$

关于 Szeged 指标和修正 Szeged 指标的性质及应用可以参见文献[7-8].

令 $d_G(v)$ 表示在图 G 中 v 点的度. 为了检测分子的能量，著名数学家、化学家 Gutman 和 Trinajstić 在 1972 年提出第一、第二 Zagreb 指标的概念[9]. 图 G 的第二 Zagreb 指标 $M_2(G)$ 定义为

$$M_2(G)=\sum_{uv\in E(G)}d_G(u)d_G(v)$$

文献[10]引入了第一广义 Zagreb 指标的概念

$$M_1^{\alpha}(G)=\sum_{u\in V(G)}d_G^{\alpha}(u)$$

其中 α 为除 0 和 1 之外的任意实数. 有关 Zagreb 指标的性质和发展的相关研究，可参考文献[11-12]. 其它用到的相关定义可参考文献[13].

图 G 和图 H 的联图 $G\vee H$ 是一个简单图，其中

$$V(G\vee H)=V(G)\cup V(H)$$

$$E(G\vee H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv:u\in V(G),v\in V(H)\}$$

图 G 和图 H 的冠图 $G\circ H$ 是复制 1 个 G 和 $|V(G)|$ 个 H，将 G 中第 i 个点和第 i 个 H 中的每个点相连接所得的图，其中 $1\leqslant i\leqslant|V(G)|$. 文献[14]给出了笛卡尔积图的 Szeged 指标. 文献[15]得到了笛卡尔积图的修正 Szeged 指标. 有关其它特殊图的研究可参考文献[16]. 本文得到了联图和冠图的 Szeged 指标以及修正 Szeged 指标. 运用此结论，可计算出一些特殊图如星图、轮图、完全图和完全二部图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标.

引理 1 $\sum_{e=uv\in E(G)}(d_G^2(u)+d_G^2(v))=M_1^3(G)$.

证 对 $\forall e=uv\in E(G)$，$d_G^2(u)$ 与 $d_G^2(v)$ 均要进行一次求和. 换句话说，对 $\forall u\in V(G)$，需对 $d_G^2(u)$ 进行 $d_G(u)$ 次求和. 也就是说对 $\forall u\in V(G)$，对 $d_G^3(u)$ 进行求和即可得到所求的量.

令 $t_e(G)$ 表示 G 中包含边 e 的三角形的个数，有如下的定理：

定理 1 设 G 是阶数为 n_1，边数为 m_1 的图；H 是阶数为 n_2，边数为 m_2 的图. 则

$$Sz(G\vee H)=n_1^2n_2^2-2n_1^2m_2-2n_2^2m_1+4m_1m_2+M_2(G)+M_2(H)+\tau(G)+\tau(H)$$

$$\begin{aligned}Sz^{*}(G\vee H)=&n_1^2n_2^2+\frac{1}{4}n_1^2(m_1-3m_2)+\frac{1}{4}n_2^2(m_2-3m_1)+\\&\frac{3}{2}n_1n_2(m_1+m_2)+2m_1m_2+\frac{1}{2}(M_2(G)+M_2(H))-\\&\frac{1}{4}(n_2M_1^2(G)+n_1M_1^2(H))-\frac{1}{4}(M_1^3(G)+M_1^3(H))\end{aligned}$$

其中

$$\tau(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}t_e(G)(t_e(G)-d_G(u)-d_G(v))$$

证 根据联图的定义，可将 $G\vee H$ 的边集分为 3 个部分：$E(G)$，$E(H)$，$E'=\{uv:u\in V(G),v\in V(H)\}$.

步骤 1 对 $\forall e=uv\in E(G)$，由于 H 中的任何顶点与 u,v 两点均相邻，故对 $\forall w\in V(H)$，有 $d_{G\vee H}(w,u)=d_{G\vee H}(w,v)=1$. 由联图的定义可知，对 $\forall s\in V(G)$，若 $d_G(s,u)\geqslant 2$ 且 $d_G(s,v)\geqslant 2$，则

$$d_{G\vee H}(s,u)=d_{G\vee H}(s,v)=2$$

因此

$$n_u(e \mid G \vee H) = d_G(u) - t_e(G)$$
$$n_v(e \mid G \vee H) = d_G(v) - t_e(G)$$
$$n_0(e \mid G \vee H) = n_1 + n_2 - (d_G(u) + d_G(v) - 2t_e(G))$$

结合引理 1，容易得到

$$\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e \mid G \vee H) n_v(e \mid G \vee H) = \sum_{e=uv\in E(G)} d_G(u) d_G(v) + \sum_{e=uv\in E(G)} (t_e^2(G) - t_e(G) \cdot (d_G(u) + d_G(v))) = M_2(G) + \tau(G) \tag{1}$$

$$\sum_{e=uv\in E(G)} \left(n_u(e \mid G \vee H) + \frac{n_0(e \mid G \vee H)}{2}\right)\left(n_v(e \mid G \vee H) + \frac{n_0(e \mid G \vee H)}{2}\right) =$$
$$\sum_{e=uv\in E(G)} \frac{n_1 + n_2 + d_G(u) - d_G(v)}{2} \cdot \frac{n_1 + n_2 - d_G(u) + d_G(v)}{2} =$$
$$\frac{1}{4}\sum_{e=uv\in E(G)} ((n_1 + n_2)^2 - (d_G(u) - d_G(v))^2) =$$
$$\frac{1}{4}(n_1 + n_2)^2 m_1 - \frac{1}{4}\Big(\sum_{u\in V(G)} d_G^3(u) - 2\sum_{e=uv\in E(G)} d_G(u) d_G(v)\Big) =$$
$$\frac{1}{4}(n_1 + n_2)^2 m_1 - \frac{1}{4} M_1^3(G) + \frac{1}{2} M_2(G) \tag{2}$$

步骤 2　由联图的定义知 $G \vee H = H \vee G$，与步骤 1 讨论类似，有

$$\sum_{e=uv\in E(H)} n_u(e \mid G \vee H) n_v(e \mid G \vee H) = M_2(H) + \tau(H) \tag{3}$$

$$\sum_{e=uv\in E(H)} \left(n_u(e \mid G \vee H) + \frac{n_0(e \mid G \vee H)}{2}\right)\left(n_v(e \mid G \vee H) + \frac{n_0(e \mid G \vee H)}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{4}(n_1 + n_2)^2 m_2 - \frac{1}{4} M_1^3(H) + \frac{1}{2} M_2(H) \tag{4}$$

步骤 3　任取 $e = uv \in E' = \{uv: u \in V(G), v \in V(H)\}$. 对$\forall s \in V(G)$，有 $d_{G\vee H}(s, v) \leqslant d_{G\vee H}(s, u)$. 而对$\forall t \in V(H)$，若 $d_H(t, v) \geqslant 2$，则

$$d_{G\vee H}(t, u) = 1 < d_{G\vee H}(t, v) = 2$$

因此

$$n_u(e \mid G \vee H) = n_2 - 1 + 1 - d_H(v) = n_2 - d_H(v)$$
$$n_v(e \mid G \vee H) = n_1 - d_G(u)$$
$$n_0(e \mid G \vee H) = d_G(u) + d_H(v)$$

结合引理 1，容易得到

$$\sum_{e=uv\in E'} n_u(e \mid G \vee H) n_v(e \mid G \vee H) =$$
$$\sum_{u\in V(G)} \sum_{v\in V(H)} (n_1 n_2 - n_1 d_H(v) - n_2 d_G(u) + d_G(u) d_H(v)) =$$
$$n_1^2 n_2^2 - 2n_1^2 m_2 - 2n_2^2 m_1 + 4m_1 m_2 \tag{5}$$

$$\sum_{e=uv\in E'} \left(n_u(e \mid G \vee H) + \frac{n_0(e \mid G \vee H)}{2}\right)\left(n_v(e \mid G \vee H) + \frac{n_0(e \mid G \vee H)}{2}\right) =$$
$$\sum_{e=uv\in E'} \left(n_2 + \frac{d_G(u) - d_H(v)}{2}\right) \cdot \left(n_1 - \frac{d_G(u) - d_H(v)}{2}\right) =$$
$$\sum_{u\in V(G)} \sum_{v\in V(H)} \left(n_1 n_2 + \frac{(d_G(u) - d_H(v))(n_1 - n_2)}{2} - \frac{(d_G(u) - d_H(v))^2}{4}\right) =$$

$$n_1^2n_2^2+(n_1-n_2)(n_2m_1-n_1m_2)+2m_1m_2-\frac{1}{4}(n_2M_1^2(G)+n_1M_1^2(H)) \tag{6}$$

综上所述，分别联立(1)(3)(5)式与(2)(4)(6)式，可得

$$Sz(G\vee H)=M_2(G)+\tau(G)+M_2(H)+\tau(H)+n_1^2n_2^2-2n_1^2m_2-2n_2^2m_1+4m_1m_2=$$
$$n_1^2n_2^2-2n_1^2m_2-2n_2^2m_1+4m_1m_2+M_2(G)+M_2(H)+\tau(G)+\tau(H)$$

$$Sz^*(G\vee H)=\frac{1}{4}(n_1+n_2)^2m_1-\frac{1}{4}M_1^3(G)+\frac{1}{2}M_2(G)+\frac{1}{4}(n_1+n_2)^2m_2-\frac{1}{4}M_1^3(H)+$$
$$\frac{1}{2}M_2(H)+n_1^2n_2^2+(n_1-n_2)(n_2m_1-n_1m_2)+2m_1m_2-\frac{1}{4}(n_2M_1^2(G)+n_1M_1^2(H))=$$
$$n_1^2n_2^2+\frac{1}{4}n_1^2(m_1-3m_2)+\frac{1}{4}n_2^2(m_2-3m_1)+\frac{3}{2}n_1n_2(m_1+m_2)+2m_1m_2+$$
$$\frac{1}{2}(M_2(G)+M_2(H))-\frac{1}{4}(n_2M_1^2(G)+n_1M_1^2(H))-\frac{1}{4}(M_1^3(G)+M_1^3(H))$$

推论 1 令图 G 的阶数为 n_1，边数为 m_1，且不含三角形；图 H 的阶数为 n_2，边数为 m_2，且不含三角形. 则

$$Sz(G\vee H)=n_1^2n_2^2-2n_1^2m_2-2n_2^2m_1+4m_1m_2+M_2(G)+M_2(H)$$

例 1 运用联图的定义可以发现 $S_n=K_1\vee\overline{K_{n-1}}$，$K_{m,n}=\overline{K_m}\vee\overline{K_n}$，$W_n=K_1\vee C_{n-1}$，还有 $K_4=K_2\vee K_2$. 这些特殊图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标为

$$Sz(S_n)=Sz^*(S_n)=Sz(K_1\vee\overline{K_{n-1}})=(n-1)^2$$
$$Sz(K_{m,n})=Sz^*(K_{m,n})=Sz(\overline{K_m}\vee\overline{K_n})=m^2n^2$$
$$Sz(W_n)=Sz(K_1\vee C_{n-1})=n^2-1$$
$$Sz^*(W_n)=Sz^*(K_1\vee C_{n-1})=\frac{1}{4}n^2(n-1)+2(n-1)(n-2)$$
$$Sz(K_4)=Sz(K_2\vee K_2)=6$$
$$Sz^*(K_4)=Sz^*(K_2\vee K_2)=24$$

定理 2 设 G 是阶数为 n_1，边数为 m_1 的连通图；H 是阶数为 n_2，边数为 m_2 的图. 则

$$Sz(G\circ H)=n_1^2n_2(n_2+1)-n_1n_2-2n_1m_2+(n_2+1)^2Sz(G)+n_1M_2(H)+n_1\tau(H)$$

$$Sz^*(G\circ H)=\frac{1}{4}n_1^3(n_2+1)^2m_2+n_1^2(n_2+1)(n_2+m_2)-n_1n_2-2n_1m_2+(n_2+1)^2Sz^*(G)+$$
$$\frac{n_1}{2}M_2(H)-\frac{n_1}{4}M_1^2(H)-\frac{n_1}{4}M_1^3(H)$$

其中

$$\tau(H)=\sum_{e=uv\in E(H)}t_e(H)(t_e(H)-d_H(u)-d_H(v))$$

证 根据冠图的定义，可将 $G\circ H$ 的边集分为 3 个部分：$E(G)$，$E(H_i)$，$E'=\{u_iv_{ij}: u_i\in V(G), v_{ij}\in V(H_i)\}$，其中 H_i 是 H 的复制($i=1,2,\cdots,n_1$；$j=1,2,\cdots,n_2$). 接下来将对 $E(G)$，$E(H_i)$，E' 这 3 个部分里的边进行讨论.

步骤 1 对$\forall\ e=uv\in E(G)$，由于与 u 对应的 H(记作 H_u)的所有顶点均与 u 相邻，且与 G 中其它顶点均不相邻，故对$\forall\ w\in V(H_u)$，均有 $d_{G\circ H}(w,u)=1<d_{G\circ H}(w,v)=2$. 类似地，此结论对 H_v 也成立. 此外，对$\forall\ s\in V(G)$，若 $d_G(s,u)<d_G(s,v)$，则有 $d_{G\circ H}(s,u)<d_{G\circ H}(s,v)$ 成立. 进一步可得到：对$\forall\ t\in V(H_s)$，一定有 $d_{G\circ H}(t,u)<d_{G\circ H}(t,v)$ 成立. 则

$$n_u(e\mid G\circ H)=n_u(e\mid G)+n_u(e\mid G)n_2=n_u(e\mid G)(n_2+1)$$
$$n_v(e\mid G\circ H)=n_v(e\mid G)(n_2+1)$$

$$n_0(e \mid G\circ H)=n_0(e \mid G)(n_2+1)$$

因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e \mid G\circ H)n_v(e \mid G\circ H)=(n_2+1)^2\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e \mid G)n_v(e \mid G)=(n_2+1)^2 Sz(G) \quad (7)$$

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e \mid G\circ H)+\frac{n_0(e \mid G\circ H)}{2}\right)\left(n_v(e \mid G\circ H)+\frac{n_0(e \mid G\circ H)}{2}\right)=$$

$$\sum_{e=uv\in E(G)}(n_2+1)^2\cdot\left(n_u(e \mid G)+\frac{n_0(e \mid G)}{2}\right)\cdot\left(n_v(e \mid G)+\frac{n_0(e \mid G)}{2}\right)=$$

$$(n_2+1)^2 Sz^*(G) \quad (8)$$

步骤 2　任取 $e=uv\in E(H_i)(i=1,2,\cdots,n_1)$，首先对 H_i 所对应的 G 中的顶点 u_i，有 $d_{G\circ H}(u_i,u)=d_{G\circ H}(u_i,v)=1$. 因此根据冠图的定义知：对$\forall\, w\notin V(H_i)$，有 $d_{G\circ H}(w,u)=d_{G\circ H}(w,v)$. 其次，对$\forall\, s\in V(H_i)$，当 $d_{H_i}(s,u)\geqslant 2$ 且 $d_{H_i}(s,u)\geqslant 2$ 时，有

$$d_{G\circ H}(s,u)=d_{G\circ H}(s,v)=2$$

则

$$n_u(e \mid G\circ H)=d_{H_i}(u)-t_e(H_i)$$
$$n_v(e \mid G\circ H)=d_{H_i}(v)-t_e(H_i)$$
$$n_0(e \mid G\circ H)=n_1(n_2+1)-(d_{H_i}(u)+d_{H_i}(v)-2t_e(H_i))$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{e=uv\in E(H_i)} n_u(e \mid G\circ H)n_v(e \mid G\circ H)=$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{e=uv\in E(H_i)} d_{H_i}(u)d_{H_i}(v)+\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{e=uv\in E(H_i)} t_e(H_i)\cdot(t_e(H_i)-d_{H_i}(u)-d_{H_i}(v))=$$

$$n_1 M_2(H)+n_1\tau(H) \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{e=uv\in E(H_i)}\left(n_u(e \mid G\circ H)+\frac{n_0(e \mid G\circ H)}{2}\right)\cdot\left(n_v(e \mid G\circ H)+\frac{n_0(e \mid G\circ H)}{2}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{e=uv\in E(H_i)}\frac{n_1^2(n_2+1)^2-(d_{H_i}(u)-d_{H_i}(v))^2}{4}=$$

$$\frac{n_1^3(n_2+1)^2 m_2}{4}-\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{e=uv\in E(H_i)}\frac{d_{H_i}^2(u)+d_{H_i}^2(v)-2d_{H_i}(u)d_{H_i}(v)}{4}=$$

$$\frac{1}{4}n_1^3(n_2+1)^2 m_2-\frac{n_1}{4}M_1^3(H)+\frac{n_1}{2}M_2(H) \quad (10)$$

步骤 3　任取 $e=u_iv_{ij}\in E'=\{u_iv_{ij}: u_i\in V(G),\ v_{ij}\in V(H_i);\ i=1,2,\cdots,n_1;\ j=1,2,\cdots,n_2\}$，通过之前的讨论，对$\forall\, w\notin V(H_i)$，有 $d_{G\circ H}(w,u_i)<d_{G\circ H}(w,v_{ij})$. 对$\forall\, s\in V(H_i)$，若 $d_{H_i}(s,v_{ij})\geqslant 2$，则 $d_{G\circ H}(s,u_i)<d_{G\circ H}(s,v_{ij})$. 而对$\forall\, s\in V(H_i)$，若 $d_{H_i}(s,v_{ij})=1$，则 $d_{G\circ H}(s,v_{ij})=d_{G\circ H}(s,u_i)=1$.
则

$$n_{u_i}(e \mid G\circ H)=n_1(n_2+1)-(d_{H_i}(v_{ij})+1)$$
$$n_{v_{ij}}(e \mid G\circ H)=1$$
$$n_0(e \mid G\circ H)=d_{H_i}(v_{ij})$$

因此

$$\sum_{e=uv\in E'} n_u(e \mid G\circ H)n_v(e \mid G\circ H)=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{v\in V(H_i)}(n_1(n_2+1)-d_{H_i}(v)-1)=$$

$$n_1^2 n_2(n_2+1)-2n_1 m_2-n_1 n_2 \tag{11}$$

$$\sum_{e=uv\in E'}\left(n_u(e\mid G\circ H)+\frac{n_0(e\mid G\circ H)}{2}\right)\left(n_v(e\mid G\circ H)+\frac{n_0(e\mid G\circ H)}{2}\right)=$$

$$\sum_{e=uv\in E'}\left(\frac{n_1(n_2+1)(d_{H_i}(v)+2)}{2}-\frac{(d_{H_i}(v)+2)^2}{4}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{v\in V(H_i)}\left(n_1(n_2+1)+\frac{n_1(n_2+1)d_{H_i}(v)}{2}-\frac{d_{H_i}^2(v)+4d_{H_i}(v)+4}{4}\right)=$$

$$n_1^2 n_2(n_2+1)+n_1^2(n_2+1)m_2-\frac{n_1}{4}M_1^2(H)-2n_1 m_2-n_1 n_2 \tag{12}$$

综上所述，分别联立(7)(9)(11)式与(8)(10)(12)式，可得

$$Sz(G\circ H)=(n_2+1)^2 Sz(G)+n_1 M_2(H)+n_1\tau(H)+n_1^2 n_2(n_2+1)-2n_1 m_2-n_1 n_2=$$
$$n_1^2 n_2(n_2+1)-n_1 n_2-2n_1 m_2+(n_2+1)^2 Sz(G)+n_1 M_2(H)+n_1\tau(H)$$

$$Sz^*(G\vee H)=(n_2+1)^2 Sz^*(G)+\frac{1}{4}n_1^3(n_2+1)^2 m_2-\frac{n_1}{4}M_1^3(H)+\frac{n_1}{2}M_2(H)+$$
$$n_1^2 n_2(n_2+1)+n_1^2(n_2+1)m_2-\frac{n_1}{4}M_1^2(H)-2n_1 m_2-n_1 n_2=$$
$$\frac{1}{4}n_1^3(n_2+1)^2 m_2+n_1^2(n_2+1)(n_2+m_2)-n_1 n_2-2n_1 m_2+(n_2+1)^2 Sz^*(G)+$$
$$\frac{n_1}{2}M_2(H)-\frac{n_1}{4}M_1^2(H)-\frac{n_1}{4}M_1^3(H)$$

推论 2 令连通图 G 的阶数为 n_1，边数为 m_1；图 H 的阶数为 n_2，边数为 m_2，且不含三角形. 则

$$Sz(G\circ H)=n_1^2 n_2(n_2+1)-n_1 n_2-2n_1 m_2+(n_2+1)^2 Sz(G)+n_1 M_2(H)$$

例 2 运用冠图的定义可以发现 $S_n=K_1\circ\overline{K_{n-1}}$，$W_n=K_1\circ C_{n-1}$. 这些特殊图的 Szeged 指标和修正 Szeged 指标为

$$Sz(S_n)=Sz^*(S_n)=Sz(K_1\circ\overline{K_{n-1}})=(n-1)^2$$
$$Sz(W_n)=Sz(K_1\circ C_{n-1})=n^2-1$$
$$Sz^*(W_n)=Sz^*(K_1\circ C_{n-1})=\frac{1}{4}n^2(n-1)+2(n-1)(n-2)$$

参考文献：

[1] WIENER H. Structural Determination of Paraffin Boiling Points [J]. Journal of the American Chemical Society，1947，69(1)：17-20.

[2] CHEN L，LI X L，LIU M M. The (Revised) Szeged Index and the Wiener Index of a Nonbipartite Graph [J]. European Journal of Combinatorics，2014，36：237-246.

[3] GUTMAN I，YEH Y N，LEE S L，et al. Some Recent Results in the Theory of the Wiener Number [J]. Indian Journal of Chemistry，1993，32(A)：651-661.

[4] GUTMAN I，POLANSKY O E. Mathematical Concepts in Organic Chemistry [M]. New-York：Springer-Verlag，1986.

[5] GUTMAN I. A Formula for the Wiener Number of Trees and Its Extension to Graphs Containing Cycles [J]. Graph Theory Notes of New York，1994，27：9-15.

[6] RANDIĆ M. On Generalization of Wiener Index for Cyclic Structures [J]. Acta Chimica Slovenica，2008，49(3)：483-496.

[7] JI S J，LIU M M，WU J L. A Lower Bound of Revised Szeged Index of Bicyclic Graphs [J]. Applied Mathematics and

Computation，2018，316：480-487.
[8] LI X L，LIU M M. Bicyclic Graphs with Maximal Revised Szeged Index [J]. Discrete Applied Mathematics，2013，161 (16-17)：2527-2531.
[9] GUTMAN I，TRINAJSTIĆ N. Graph Theory and Molecular Orbitals. Total Φ-Electron Energy of Alternant Hydrocarbons [J]. Chem Phys Lett，1972，17(4)：535-538.
[10] LI X L，ZHENG J. A Unified Approach to the Extremal Trees for Different Indices [J]. Match Communications in Mathematical & in Computer Chemistry，2005，54(1)：195-208.
[11] TODESCHINI R，CONSONNI V. Handbook of Molecular Descriptors [M]. Weinheim，Germany：Wiley-VCH Verlag GmbH，2000.
[12] LIU M H，LIU B L. Some Properties of the First General Zagreb Index [J]. Australas J Combin，2010，47：285-294.
[13] BONDY J A，MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. London：Macmillan Education UK，1976.
[14] KLAVŽAR S，RAJAPAKSE A，GUTMAN I. The Szeged and the Wiener Index of Graphs [J]. Applied Mathematics Letters，1996，9(5)：45-49.
[15] NAGARAJAN S，PATTABIRAMAN K，CHENDRASEKHARAN M. Revised Szeged Index of Product Graphs [J]. General Mathematics Notes，2014，23(2)：71-78.
[16] 高　炜，梁　立，徐天伟. 树状纳米星的修改的 Szeged 指数 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(11)：95-99.

Szeged Index and Revised Szeged Index of Two Types of Special Graphs

YANG Xiao-rui[1]，QIANG Hui-ying[1]，NA Ren-hua[2]，LI Yu-hong[1]

1. *School of Mathematics and Science，Lanzhou Jiaotong University，Lanzhou 730070，China*；
2. *College of Basic Subject，Lanzhou Institute of Technology，Lanzhou 730050，China*

Abstract：The Szeged index and revised Szeged index of two kinds of operational graphs are obtained by analyzing the structures of the join graph and corona graph. Using these conclusions，the Szeged index and the revised Szeged index of the star graph，wheel graph，complete graph and complete bipartite graph can be computed.

Key words：join graph；corona graph；Szeged index；revised Szeged index

责任编辑　廖　坤