第 42 卷第 2 期 西南大学学报(自然科学版) 2020 年 2 月
Vol. 42 No. 2 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Feb. 2020

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2020.02.006

闭模糊拟阵圈函数和圈区间的推广

吴德垠， 杨高进

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要：采用将模糊拟阵转换为导出拟阵的方法，对闭模糊拟阵圈函数和圈区间进行了推广. 同时，对推广后的圈函数和圈区间的性质进行了深入的分析. 首先分析了闭模糊拟阵中，模糊圈的性质、导出拟阵圈的性质和模糊圈与导出拟阵圈的关系. 然后，利用这些性质和关系，定义了广义圈函数和圈范围. 通过研究广义圈函数和圈范围的性质，说明广义圈函数和圈范围是圈函数和圈区间的推广. 最后，利用广义圈函数给出了准模糊图拟阵和精细模糊拟阵的充要条件.

关 键 词：拟阵；圈公理；模糊拟阵；广义圈函数；圈范围

中图分类号：O159 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2020)02-0036-05

文献[1]将模糊集合引入拟阵理论，提出了模糊拟阵的概念(中国部分学者称之为 G-V 模糊拟阵[2]). 文献[3]定义了模糊拟阵的圈函数和圈区间，通过这些概念，讨论了模糊圈的一系列性质. 我们可以发现：模糊圈与导出拟阵圈之间存在密切的关系. 能否通过导出拟阵的圈来研究模糊拟阵的模糊圈? 本文计划采用将模糊拟阵问题转换为导出拟阵[1](即普通拟阵)问题的方法，利用导出拟阵的圈性质来推广圈函数和圈区间概念. 然后，利用推广的概念进一步研究模糊拟阵和模糊圈的性质. 这种研究方法首先在文献[4]中提出并使用，后来在文献[5-10]中得到发展和广泛应用.

1 预备知识

设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是非空有限集合，则 E 上的模糊集 μ 是一个映射 μ：$E \longrightarrow [0, 1]$. E 上模糊集的全体记为 F(E). 文中使用的模糊数学的有关概念和符号主要参照文献[1]. 初等模糊集的概念使用较多，介绍如下：$\forall A \subseteq E$，$\forall r \in (0, 1]$，称

$$\omega(A, r)(x)=\begin{cases} r & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

为支撑集为 A，高度为 r 的初等模糊集.

文献[11] 通过独立集公理定义拟阵. 文献[1] 的定义 1.2 定义了模糊拟阵及其有关概念.

定理 1[1] 设 $\mathbf{M}=(E, \ell)$ 是模糊拟阵，$\forall r \in (0, 1)$，令 $I_r=\{c_r(\mu) \mid \forall \mu \in \ell\}$，则 $\mathbf{M}_r=(E, I_r)$ 是 E 上的拟阵(称为由模糊拟阵 $\mathbf{M}$ 导出的 r-水平拟阵，简称导出拟阵). 有有限实数列 $r_0<r_1<\cdots<r_n$，使得：

(i) $r_0=0$，$r_n \leqslant 1$；

(ii) 当 $0<r \leqslant r_n$ 时，$I_r \neq \{\varnothing\}$；当 $r>r_n$ 时，$I_r=\{\varnothing\}$；

(iii) $\forall s, t \in (r_i, r_{i+1})$，$I_s=I_t (0 \leqslant i \leqslant n-1)$；

收稿日期：2018-10-24
基金项目：国家自然科学基金项目(61374078).
作者简介：吴德垠(1955-)，男，教授，主要从事模糊拟阵的研究.

(iv) 若 $r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$，则 $I_s \supset I_t (0 \leqslant i \leqslant n-2)$.
则称序列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列.

对 $1 \leqslant i \leqslant n$，设 $\overline{r_i} = (r_i + r_{i-1})/2$，称拟阵序列 $\boldsymbol{M}_{\overline{r_1}} = (E, I_{\overline{r_1}}) \supset \boldsymbol{M}_{\overline{r_2}} = (E, I_{\overline{r_2}}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\overline{r_n}} = (E, I_{\overline{r_n}})$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的导出拟阵序列. 若 $\boldsymbol{M}_{\overline{r_1}} = \boldsymbol{M}_{r_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵[1].

为了便于描述，我们统一规定 $\boldsymbol{M}_{r_0} = \boldsymbol{M}_0 = (E, I_0)$，$I_0 = \{X \mid \forall X \subseteq E\}$. 当 $r_n < 1$ 时，令 $r_{n+1} = 1$，$\boldsymbol{M}_{r_{n+1}} = (E, I_{r_{n+1}})$，$I_{r_{n+1}} = \{\varnothing\}$. 除特别说明外，我们的讨论主要针对 $r_n = 1$ 来进行，但同样适用于 $r_n < 1$. 有两种平凡的模糊拟阵，一种是 $I = \{\varnothing\}$，另一种是 $I = F(E)$（此种也称为自由模糊拟阵）. 以后的讨论中，不涉及这两种模糊拟阵.

文献[3]定义了模糊集截短 μ_α^T、模糊拟阵的初等模糊圈、圈函数 τ 和针对闭模糊拟阵的圈区间 $\mathfrak{z}$，证明了一些模糊圈的结论.

2　模糊圈的若干性质

设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是模糊拟阵，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 为其基本序列，$\boldsymbol{M}_{\overline{r_1}} = (E, I_{\overline{r_1}}) \supset \boldsymbol{M}_{\overline{r_2}} = (E, I_{\overline{r_2}}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\overline{r_n}} = (E, I_{\overline{r_n}})$ 为其导出拟阵序列. 其中 $\overline{r_i} = (r_{i-1} + r_i)/2$，$I_{\overline{r_i}} = \{C_{\overline{r_i}}(\mu) \mid \forall \mu \in \ell\} i = 1, 2, \cdots, n$.

记 $\zeta = \{\mu \in F(E) \mid \mu$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈$\}$，称 ζ 是模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈集. 记

$$\operatorname{supp} \zeta = \{\operatorname{supp} \mu \subseteq E \mid \forall \mu \in \zeta\}$$

$\mathscr{C} = \{C \subseteq E \mid$ 存在 $r \in [0, 1]$，使得 C 是 $\boldsymbol{M}_r$ 的圈$\}$，称 $\mathscr{C}$ 是模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的导出拟阵圈集.

定理 2　设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，则 $\boldsymbol{M}$ 无非环模糊圈的充要条件是 $\boldsymbol{M}$ 有且只有一个模糊基.

证　首先证明必要性.

由 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵和文献[12]的定理 1.10 知，$\boldsymbol{M}$ 存在模糊基，取其一个模糊基 μ. 令 ν 为 $\boldsymbol{M}$ 的任何一个模糊基，我们要证明 $\mu = \nu$.

由文献[12]的定理 1.9，有 $R^+(\mu) \subseteq \{r_1, \cdots, r_n\}$，$R^+(\nu) \subseteq \{r_1, \cdots, r_n\}$. 因此，由模糊集的分解定理[13]得出

$$\mu = \omega(C_{r_1}(\mu), r_1) \vee \omega(C_{r_2}(\mu), r_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{r_n}(\mu), r_n)$$
$$\nu = \omega(C_{r_1}(\nu), r_1) \vee \omega(C_{r_2}(\nu), r_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{r_n}(\nu), r_n)$$

用文献[11]的定理 2.1.1（增广定理）可以证明：对 $\forall i (1 \leqslant i \leqslant n)$，$C_{r_i}(\mu)$ 都是 $C_{r_{i-1}}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 中的极大独立子集.

用文献[3]的定理 2.2(ii) 和归纳法证明 $C_{r_i}(\mu) = C_{r_i}(\nu) (1 \leqslant i \leqslant n)$.

所以，$\mu = \nu$.

再证充分性. 如果 $\boldsymbol{M}$ 有且只有一个模糊基 μ，则有

$$\mu = \omega(C_{r_1}(\mu), r_1) \vee \omega(C_{r_2}(\mu), r_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{r_n}(\mu), r_n)$$

下面证明，$\boldsymbol{M}$ 无非环模糊圈.

用文献[12]的定理 1.10、文献[11]的定理 2.1.1 和归纳法可以证明：对 $\forall i (1 \leqslant i \leqslant n)$，$C_{r_i}(\mu)$ 都是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的唯一基.

用文献[11]的定理 2.1.1 和归纳法可以证明：对 $\forall i (1 \leqslant i \leqslant n)$，$\boldsymbol{M}_{r_i}$ 都没有非环圈.

最后证明 $\boldsymbol{M}$ 无非环模糊圈. 反证，如果 $\boldsymbol{M}$ 有非环模糊圈 μ，则 $C_{m(\mu)}(\mu)$ 就是 $\boldsymbol{M}_{m(\mu)}$ 的非环圈.

由 $I_{m(\mu)} \neq \varnothing$，存在 $i (1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 $m(\mu) \in (r_{i-1}, r_i]$，则由定理 1 知 $\boldsymbol{M}_{m(\mu)} = \boldsymbol{M}_{r_i}$. 因此 $C_{m(\mu)}(\mu)$ 是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的非环圈，矛盾.

故 $\boldsymbol{M}$ 无非环模糊圈.

命题 1（导出拟阵圈的连贯性）　设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，取 $A \in \mathscr{C}$，如果 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 和 $\boldsymbol{M}_{r_{i+2}}$（假定

$i+2 \leqslant n$)的圈，则 A 也是 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 的圈.

证　由 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的圈，则 $A \notin I_{r_i} \supset I_{r_{i+1}}$，得出 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 的相关集. 又由 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{i+2}}$ 的圈，则 $\forall x \in A$，都有 $A \backslash \{x\} \in I_{r_{i+2}} \subset I_{r_{i+1}}$. 因此 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 的圈.

定理3　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，取 $A \in \mathscr{C}$，则有两个整数 $j, k(j, k=0,1,2,\cdots,n;\ j<k)$，使得：

(i) $\forall \lambda \in (r_j, r_k]$，A 都是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈；

(ii) $\forall \lambda \in [0, 1] \backslash (r_j, r_k]$，A 都不是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈.

证　根据 $\mathscr{C}$ 的定义知，必有 $r \in (0, 1]$，使得 A 是 $\boldsymbol{M}_r$ 的圈. 也存在 $i(1 \leqslant i \leqslant n$ 或 $n+1$，$r_n<1$ 时，令 $r_{n+1}=1)$，使得 $r \in (r_{i-1}, r_i]$. 因此 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的圈.

令 $I_0=I_{r_0}=\{X \mid X \subseteq E\}$(自由拟阵[11]).

(i) 我们先找 j. 考察 A 是否为 $\boldsymbol{M}_{r_{i-1}}$($i-1>0$ 时)的圈. 如果 A 不是 $\boldsymbol{M}_{r_{i-1}}$ 的圈，则终止. 如果 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{i-1}}$ 的圈，则继续考察 A 是否为 $\boldsymbol{M}_{r_{i-2}}$($i-2>0$ 时)的圈，以此继续. 由于 $\boldsymbol{M}_{r_0}=(E, I_{r_0})$ 无圈，因此，这个过程结束时，会找到 $j(j=0,1,2,\cdots,i-1)$，使得 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{j+1}}$ 的圈，但不是 $\boldsymbol{M}_{r_j}$ 的圈.

再找 k. 考察 A 是否为 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$($i+1 \leqslant n$ 时)的圈. 如果 A 不是 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 的圈，则终止. 如果 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 的圈，则继续考察 A 是否为 $\boldsymbol{M}_{r_{i+2}}$($i+2 \leqslant n$ 时)的圈，以此继续. 由于 n 的有限性，会找到 $k(k=i, i+1,\cdots,n)$，使得 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_k}$ 的圈. 如果 $k<n$，则 A 不是 $\boldsymbol{M}_{r_{k+1}}$ 的圈.

根据前面的证明知，A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{j+1}},\cdots,\boldsymbol{M}_{r_i},\cdots,\boldsymbol{M}_{r_k}$ 的圈. 而且，$\forall \lambda \in (r_j, r_k]$，必有 $l(l=j,\cdots,k-1)$，使得 $\lambda \in (r_l, r_{l+1}]$. 根据导出拟阵的性质知，$\boldsymbol{M}_\lambda=\boldsymbol{M}_{r_{l+1}}$. 因此，A 是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈.

(ii) $\forall \lambda \in [0, r_n] \backslash (r_j, r_k]$，我们采用反证法. 如果存在 λ，使得 A 是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈，存在 l，使得 $\lambda \in (r_l, r_{l+1}]$. 根据 λ 的取法，必有 $l+1 \leqslant j<k$，或 $l \geqslant k>j$ 且 $l \leqslant n-1$. 又由于 $\boldsymbol{M}_\lambda=\boldsymbol{M}_{r_{l+1}}$，因此 A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{l+1}}$ 的圈.

当 $l+1 \leqslant j<k$ 时，A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{l+1}}$ 和 $\boldsymbol{M}_{r_k}$ 的圈. 因此，由命题1，A 也是 $\boldsymbol{M}_{r_j}$ 的圈. 这与 j 的选取矛盾.

当 $l \geqslant k>j$ 且 $l \leqslant n-1$ 时，A 是 $\boldsymbol{M}_{r_k}$ 和 $\boldsymbol{M}_{r_{l+1}}$ 的圈，而且 $l+1>k$. 因此，由命题1，A 是 $\boldsymbol{M}_{r_{k+1}}$ 的圈. 这与 k 的选取矛盾. 即 $\forall \lambda \in [0, r_n] \backslash (r_j, r_k]$，A 都不是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈.

如果 $r_n=1$，前面已经说明 $\forall \lambda \in [0, 1] \backslash (r_j, r_k]$，A 都不是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈.

如果 $r_n<1$，对 $\forall \lambda \in (r_n, 1]$，由定理1，都有 $I_\lambda=\{\varnothing\}$. 所以，$\forall x \in E$，$\{x\}$ 都是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈(环). 而且 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 没有非环圈.

若 $|A|>1$，$\forall \lambda \in (r_n, 1] \backslash (r_j, r_k]$，A 不是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈.

若 $|A|=1$，A 是 $\boldsymbol{M}_1$ 的圈(环). 因此，与 A 对应的 $j \leqslant n<k$，$r_k=1(k=n+1)$. $(r_n, 1] \backslash (r_j, r_k]=(r_n, 1] \backslash (r_j, 1]=\varnothing$. 没有 λ 使得 $\lambda \in (r_n, 1] \backslash (r_j, r_k]$.

3　广义圈函数和圈范围

定义1　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n \leqslant 1$ 为其基本序列，$\boldsymbol{M}_{r_1} \supset \boldsymbol{M}_{r_2} \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n}$ 为其导出拟阵序列. 设 $F(E)$ 是 E 上的全体模糊集. 构造映射 π：$F(E) \longrightarrow \{r_0, r_1, \cdots, r_n\} \times \{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$ 如下：

$\forall \mu \in F(E)$，如果 $\operatorname{supp} \mu \notin \mathscr{C}$，则定义 $\pi(\mu)=(r_0, r_0)$；如果 $\operatorname{supp} \mu \in \mathscr{C}$，根据定理3，可找到与之对应的唯一一对整数 $j, k(j, k=0,1,2,\cdots,n;\ j<k)$，则定义 $\pi(\mu)=(r_j, r_k)$.

我们称此映射 π 为广义圈函数. 如果 $\mu \in \zeta$，令 $\bar{\mathfrak{z}}(\mu)=(r_j, r_k]$，称之为 μ 的圈范围.

如果 $r_n<1$，令 $r_{n+1}=1$，此时 π 的像集有稍微改变，π：$F(E) \longrightarrow \{r_0, r_1, \cdots, r_n\} \times \{r_0, r_1, \cdots, r_{n+1}\}$.

从定义1可以看出，映射 π 的像取决于模糊圈的支撑集，而与其模糊隶属度没有本质联系.

由定理3和定义1，可以扩展文献[3]的定理3.4，得出如下定理：

定理 4　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$ 为其基本序列，$\boldsymbol{M}_{r_1}\supset\boldsymbol{M}_{r_2}\supset\cdots\supset\boldsymbol{M}_{r_n}$ 为其导出拟阵序列，$\forall\mu\in\zeta$，圈范围为 $\bar{\mathfrak{z}}(\mu)=(r_j, r_k]$，都有：

(i) $\forall\lambda\in\bar{\mathfrak{z}}(\mu)$，$\operatorname{supp}\mu$ 都是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈；

(ii) $\forall\lambda\in[0, 1]\backslash\bar{\mathfrak{z}}(\mu)$，$\operatorname{supp}\mu$ 都不是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈；

(iii) $\forall\lambda\in[0, r_j]$，$\operatorname{supp}\mu\in I_\lambda$；$\forall\lambda\in(r_k, 1]$（如果 $r_k<1$），$\operatorname{supp}\mu\notin I_\lambda$；

(iv) $\forall r_i\in\{r_1, \cdots, r_n\}$，存在 $\mu\in\zeta$，使得 $\pi(\mu)=(r_i, \beta)$ 或 $\pi(\mu)=(\alpha, r_i)$.

证　令 $A=\operatorname{supp}\mu$.

(i) 和 (ii) 都可从定理 3 获知.

再来证明 (iii). 若存在 $\lambda\in[0, r_j]$，使得 $\operatorname{supp}\mu\notin I_\lambda$，则存在 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈 C，使得 $C\subseteq\operatorname{supp}\mu$. 则 $\omega(C, \lambda)$，$\omega(\operatorname{supp}\mu, r_k)$ 都是初等模糊圈，而且 $\omega(C, \lambda)\leqslant\omega(\operatorname{supp}\mu, r_k)$. 由文献[3]的定理 2.8 知，必有 $C=\operatorname{supp}\mu$，即 $\operatorname{supp}\mu$ 也是 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 的圈. 这与 $\pi(\mu)$ 的定义矛盾. 所以 $\operatorname{supp}\mu\in I_\lambda$.

$\forall\lambda\in(r_k, 1]$（如果 $r_k<1$），$r_k<\lambda$，如果 $\operatorname{supp}\mu\in I_\lambda$，则由 $\operatorname{supp}\mu\in I_\lambda\subseteq I_{r_k}$ 知，与 $\operatorname{supp}\mu$ 是 $\boldsymbol{M}_{r_k}$ 的圈矛盾. 因此 $\operatorname{supp}\mu\notin I_\lambda$.

最后证明 (iv). 当 $i<n$ 时，考察导出拟阵 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 和 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$. 由于 $\boldsymbol{M}_{r_i}\supset\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$，因此两个拟阵的圈集（分别为 $\boldsymbol{C}_{r_i}$，$\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}$）不能相同，而且 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 必定有圈.

取 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 的一个圈 C，使其不是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的圈，则取 $\mu=\omega(C, r_{i+1})\in\zeta$. 根据定义 1，存在 $\beta\in\{r_1, \cdots, r_n\}$，使得 $\pi(\mu)=(r_i, \beta)$.

如果没有这样的圈，则 $\boldsymbol{C}_{r_i}\supseteq\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}$. 再取 $C\in\boldsymbol{C}_{r_i}\backslash\boldsymbol{C}_{r_{i+1}}$，则 C 是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的圈，而非 $\boldsymbol{M}_{r_{i+1}}$ 圈. 取 $\mu=\omega(C, r_i)\in\zeta$，则由定义 1，存在 $\alpha\in\{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\}$，使得 $\pi(\mu)=(\alpha, r_i)$.

当 $i=n$ 时，考察导出拟阵 $\boldsymbol{M}_{r_n}$. 由于前面已经排除了自由模糊拟阵的情况，因此，$\boldsymbol{M}_{r_n}$ 必定有圈 C. 取初等模糊圈 $\mu=\omega(C, r_n)\in\zeta$. 如果 $r_n=1$，则有 $\alpha\in\{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\}$，使得 $\pi(\mu)=(\alpha, 1)=(\alpha, r_n)$. 如果 $r_n<1$，由 $I_{r_n}\supset\{\varnothing\}$ 知，必有 $x\in E$，使得 $\{x\}$ 不是 $\boldsymbol{M}_{r_n}$ 的环，而是 $\boldsymbol{M}_1=(E, \{\varnothing\})$ 的环. 取 $\mu=\omega(\{x\}, 1)\in\zeta$，则 $\pi(\mu)=(r_n, 1)$.

下面，讨论广义圈函数、圈范围，与圈函数、圈区间的关系（圈函数与圈区间的符号来自文献[3]）.

定理 5　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$ 为其基本序列，$\boldsymbol{M}_{r_1}\supset\boldsymbol{M}_{r_2}\supset\cdots\supset\boldsymbol{M}_{r_n}$ 为其导出拟阵序列. $\forall\mu\in\zeta$，有 $\pi(\mu)=(r_j, r_k)$，则 $\tau(\mu)=r_j$ 且 $\mathfrak{z}(\mu)\subseteq\bar{\mathfrak{z}}(\mu)$.

定理 5 可以通过定理 4 和定理 2 给予证明.

由此可以看出，广义圈函数和圈范围是圈函数和圈区间的推广.

下面，我们用广义圈函数来描述精细模糊拟阵[2] 和准模糊图拟阵[14].

定理 6　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵. 则 $\boldsymbol{M}$ 是精细模糊拟阵的充要条件是：$\forall\mu\in\zeta$，都存在 $r_j(j=1,2,\cdots,n)$，使得 $\pi(\mu)=(r_j, 1)$.

文献[5] 的定理 11 给出了准模糊图拟阵的充要条件. 现在，我们使用推广圈函数和圈区间的概念，再给出一个充要条件：

定理 7　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵. 则 $\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵的充要条件是：$\forall\mu\in\zeta$，只要 $|\operatorname{supp}\mu|>1$，都存在 $r_k(k=1,2,\cdots,n)$，使得 $\pi(\mu)=(0, r_k)$.

证　由广义圈函数的定义知：$\forall\mu\in\zeta$，都存在 $r_j, r_k, r_j<r_k$，使得 $\pi(\mu)=(r_j, r_k)$. 因此，只需要证明：$\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵 $\Leftrightarrow\forall\mu\in\zeta$ 且 $|\operatorname{supp}\mu|>1$，则 $r_j=0$.

先证必要性. 存在 $i(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $m(\mu)\in(r_{i-1}, r_i]$. 由文献[3] 的定理 2.5，$C_{m(\mu)}=\operatorname{supp}\mu$ 是 $\boldsymbol{M}_{m(\mu)}=\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的非环圈. 再由准模糊图拟阵的定义知，$\operatorname{supp}\mu$ 也是 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的非环圈. 因此，由定理 3 及其证明知，$r_j<r_1$. 即 $r_j=r_0=0$.

再证充分性. 任取 $\boldsymbol{M}_{r_i}(i=2,\cdots,n)$ 的非环圈 C，构造模糊集 $\nu=\omega(C, r_i)$. 则由文献[3] 的定理 2.5 知，ν 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈且 $|\operatorname{supp}\nu|>1$. 由已知，存在 $r_k\geqslant r_i>r_1>0$，使得 $\pi(\nu)=(0, r_k)$，显然 $r_1\in(0,

r_k]. 由定理4(i)知，C也是$\mathbf{M}_{r_1}$的非环圈. 所以，$\mathbf{M}$是准模糊图拟阵.

利用推广的圈函数和圈区间，可以研究模糊拟阵的许多问题. 比如，使用现在的概念去讨论文献[15]的模糊圈的秩，可以得到更好的结论.

参考文献：

[1] GOETSCHEL R J, VOXMAN W. Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1988, 27(3): 291-302.

[2] LI X N, LIU S Y, LI S G. Connectedness of Refined Goetschel-Voxman Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(20): 2709-2723.

[3] GOETSCHEL R J, VOXMAN W. Fuzzy Circuits [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 32(1): 35-43.

[4] 吴德垠，王　彭. 关于模糊截短列拟阵的研究 [J]. 模糊系统与数学，2016，30(5)：125-131.

[5] 吴德垠. 一个准模糊图拟阵的新特征 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：35-39.

[6] 吴德垠. 模糊拟阵的独立模糊壳 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：89-94.

[7] 吴德垠，张　忠. 研究模糊拟阵的一种新方法 [J]. 模糊系统与数学，2018，32(4)：24-31.

[8] 吴德垠. 模糊拟阵的导出集合函数 [J]. 模糊系统与数学，2019，33(1)：1-11.

[9] 张晓婷，吴德垠. 关于一致模糊横贯拟阵的研究 [J]. 模糊系统与数学，2019，33(2)：1-10.

[10] 吴德垠. 模糊横贯拟阵的再研究 [J]. 模糊系统与数学，2019，33(3)：1-18.

[11] 刘桂真，陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1994.

[12] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Bases of Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(2): 253-261.

[13] 李安贵，张志宏，孟　艳，等. 模糊数学及其应用 [M]. 2版. 北京：冶金工业出版社，2005：19-27.

[14] 吴德垠. 准模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报(自然科学版)，1996，19(5)：100-109.

[15] 李永红，刘宴兵，石庆喜. 模糊圈的秩 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2009，34(3)：21-23.

Generalizations of Circuit Functions and Circuit Intervals in Closed Fuzzy Matroids

WU De-yin,　YANG Gao-jin

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: The concepts of circuit functions and circuit intervals for closed fuzzy matroids are generalized by transforming fuzzy matroids into induced matroids in this paper, and the properties of the generalized circuit functions and circuit intervals are studied in detail. First, the properties of the fuzzy circuit and the induced matroid circuit and the relationship between the two in closed fuzzy matroids are analyzed. Then, with the help of these properties and relationships, the terms of generalized circuit function and circuit range are defined. The study of the properties of generalized circuit functions and circuit ranges shows that generalized circuit functions and circuit ranges are the generalization of the original circuit functions and circuit intervals. Finally, using the generalized circuit functions, this paper gives the sufficient and necessary conditions for quasi-fuzzy graph matroids and refined fuzzy matroids.

Key words: matroid; circuit axiom; fuzzy matroid; generalized circuit function; circuit range

责任编辑　廖　坤