第 42 卷第 2 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2020 年 2 月
Vol. 42　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.02.007

基于模糊否定与生成子的模糊蕴涵及性质

彭 祖 明

长江师范学院 数学与统计学院，重庆 涪陵 408100

摘要：首先，提出了一种利用模糊否定和连续单调增函数构建模糊蕴涵的新方法. 利用该方法，可以只利用模糊否定构造模糊蕴涵. 同时，对所得模糊蕴涵的特性，如左单位元性质、交换原则、序性质等进行了探讨，并获得了一些成果.

关 键 词：模糊蕴涵；模糊否定；聚合函数；特性

中图分类号：**O159**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673－9868(2020)02－0041－07

模糊蕴涵作为经典布尔蕴涵的推广，是模糊逻辑系统、模糊控制、模糊决策的基础. 模糊蕴涵的构建方法主要有两类：其一是由模糊逻辑连接词(如 t 模、t 余模、copulas 函数) 及模糊否定构造而成，亦称为(A，N)-蕴涵[1-2]，如(S，N)-蕴涵[3-4]、R-蕴涵[4-5]、QL-蕴涵[4-6]、(U，N)-蕴涵[7]、(R，U)-蕴涵[8]、概率蕴涵[9] 等；其二是由单调函数或已知模糊蕴涵的组合来构造，如 f-蕴涵、g-蕴涵[10]、h-蕴涵[11-12]、(g，min)-蕴涵[13]、推广 h-蕴涵[14]、R-序和蕴涵[15]、e-生成蕴涵[16] 等. 受文献[17] 中构建 semicopulas 的方法以及文献[1] 中构建模糊蕴涵的方法的启示，本文提出了通过模糊否定和单调连续函数来构造一类新的(A，N)-蕴涵的方法. 在该方法中，如果所给的连续单调函数为恒等函数，则只需模糊否定就可构造模糊蕴涵. 同时，本文对所得的模糊蕴涵的基本特性，如左单位元性质、序性质、交换原则、恒等原则及逆否对称性进行了探讨.

定义 1[4]　对任意的 $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0, 1]$，如果函数 $I: [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ 满足下列条件：

(I_1) $x_1 < x_2$，则 $I(x_1, y) \geqslant I(x_2, y)$；

(I_2) $y_1 < y_2$，则 $I(x, y_1) \leqslant I(x, y_2)$；

(I_3) $I(0, 0) = 1$，$I(1, 1) = 1$，$I(1, 0) = 1$.

则称 I 为模糊蕴涵，所有模糊蕴涵构成的集合记成 FI.

定义 2[4]　模糊蕴涵 I 满足：

(i) $I(1, y) = y$，$y \in [0, 1]$，则称 I 具备左单位元性质；

(ii) $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$，$x, y, z \in [0, 1]$，则称 I 满足交换原则；

(iii) $I(x, x) = 1$，$x \in [0, 1]$，则称 I 满足恒等原则；

(iv) $I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leqslant y$，$x, y \in [0, 1]$，则称 I 满足序性质；

(v) $I(x, y) = I(\mathrm{N}(y), \mathrm{N}(x))$，$x, y \in [0, 1]$，则称 I 关于 N 满足逆否对称性，其中 N 为模糊否定；

收稿日期：2018－08－07

基金项目：重庆市科委自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0540).

作者简介：彭祖明(1970－)，男，副教授，主要从事模糊逻辑及其应用的研究.

(vi) $I(x, N(y))=I(y, N(x))$，$x,y\in[0,1]$，其中 N 为模糊否定，则称 I 关于 N 满足右逆否对称性；

(vii) 如果存在 t 模 T，使得 $I(T(x, y), z)=I(x, I(y, z))$，$x,y,z\in[0,1]$，则称 I 满足输入律.

定义 3[4] 如果函数 $N:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 满足 $N(0)=1$，$N(1)=0$，且 N 单调递减，则称 N 为模糊否定.

定义 4[4] 已知模糊否定 N，如果对任意的 $x\in[0,1]$，有 $N(N(x))=x$，则称 N 为强的. 如果 $N(x)$ 在区间$[0,1]$连续且严格单调递减，则称 N 为严格的. 称 $N(x)=1-x$ 为标准的模糊否定，记作 $N_C(x)$.

定理 1[4] 模糊否定 N 为强的当且当存在严格增的连续函数 $f:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$，使得 $f(0)=0$，且 $N(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$，$x\in[0,1]$. 称函数 f 为模糊否定 N 的生成子.

引理 1[4] 已知函数 $I:[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$ 及模糊否定 N，如果 I 具备左单位元性质及关于 N 的逆否对称性，则 $N=N_I$ 为强的，其中 N_I 为 I 的自然否定，定义为 $N_I(x)=I(x, 0)$.

定义 5[4] 如果函数 $\varphi:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 连续，严格增并满足边界条件 $\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$，则称 φ 为序自同构. 记 Φ 为所有从$[0,1]$到$[0,1]$的序自同构构成的集合.

定义 6[4] 已知 $\varphi\in\Phi$，如果函数 $f,g:[0,1]^n\longrightarrow[0,1]$ 满足 $g=f_\varphi$，即 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\varphi^{-1}(f(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_3)))$，则称函数 f,g 是 φ 结合的.

由 N_I 的定义可知，给定模糊蕴涵 I，可得 N_I. 反过来，给定 N，如何得到一个模糊蕴涵 I? 在现有的文献中还未有研究. 文献[1]提出了利用模糊否定 N 构建 simicopulas 的方法，受此启发，本文构造了一个双变量函数 $I_N:[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$，定义为

$$I_N(x, y)=\min\{1, N(x)\wedge y-N(N(x)\vee y)+1\}\qquad x,y\in[0,1]$$

易证 I_N 为模糊蕴涵. 如果考虑严格增的连续函数 $g:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$，则可得双变量函数 $I_{g,N}:[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$，定义如下：

定义 7 已知连续函数 $g:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ 严格增，且 $g(0)=0$，N 为模糊否定. 定义双变量函数 $I_{g,N}:[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$ 为

$$I_{g,N}(x, y)=g^{-1}\min\{g(1), g(N(x)\wedge y)-g(N(N(x)\vee y))+g(1)\}\qquad x,y\in[0,1]$$

称函数 g 为生成子.

定理 2 已知生成子 g 及模糊否定 N，则双变量函数

$$I_{g,N}(x, y)=g^{-1}\min\{g(1), g(N(x)\wedge y)-g(N(N(x)\vee y))+g(1)\}\qquad x,y\in[0,1]$$

为模糊蕴涵.

证 直接利用定义 1 可以证明.

注 1 (i) 如果函数 $g=x$，则模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 可只由模糊否定 N 构成，即

$$I_{g,N}(x, y)=\min\{1, N(x)\wedge y-N(N(x)\vee y)+1\}\qquad x,y\in[0,1]$$

显然，定义 7 中所得的模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 属于(A, N)-模糊蕴涵. 事实上，设

$$A(x, y)=\min\{g(1), g(x\wedge y)-g(N(x\vee y))+g(1)\}\qquad x,y\in[0,1]$$

显然，$A(x, y)$ 为聚合函数，且 $I_{g,N}(x, y)=A(N(x), y)$.

(ii) 如果

$$N(x)=N_{D_2}(x)=\begin{cases}1 & x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

则

$$I_{g,N}(x, y)=\begin{cases}0 & x=1,\ y<1\\ 1 & \text{否则}\end{cases}$$

其中 $x,y\in[0,1]$. 易见 $I_{g,N}$ 满足交换原则和恒等原则，但是不满足左单位元性质及序性质.

(ⅲ) 如果

$$N(x)=N_{D_1}(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

则

$$I_{g,N}(x,\ y)=\begin{cases}0 & x>0,\ y=0\\ 1 & \text{否则}\end{cases}$$

其中 $x, y\in[0,1]$. 易见 $I_{g,N}$ 交换原则和恒等原则，但是不满足左单位元性质及序性质.

下面主要研究模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 的基本性质，这些性质主要在模糊否定 N 为连续(强、严格)的情形下所得.

性质 1　模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 满足左单位元性质当且当 g 为模糊否定 N 的生成子，即

$$N(x)=g^{-1}(g(1)-g(x))\qquad x\in[0,1]$$

证　设 $x\in[0,1]$，则 $I_{g,N}$ 满足左单位元性质 $\Leftrightarrow I_{g,N}(1,\ x)=x\Leftrightarrow g^{-1}(g(1)-g(N(x)))=x\Leftrightarrow N(x)=g^{-1}(g(1)-g(x))$.

注 2　由性质 1 可知，如果 g 为模糊否定 N 的加法生成子，则模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 的自然否定为 N，而且 $I_{g,N}$ 可表示为 $I_{g,N}(x,\ y)=\min\{1,\ g^{-1}(g(1)+g(y)-g(x))\}$，$x, y\in[0,1]$.

性质 2　模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 满足恒等原则当且当

$$\{x\in[0,1]:x<N(x)\}\cap\{x\in[0,1]:x<N(N(x))\}=\varnothing$$

证　*必要性*　设 $I_{g,N}$ 满足序性质，即对任意的 $x\in[0,1]$，有 $I_{g,N}(x,\ x)=1$. 如果

$$\{x\in[0,1]:x<N(x)\}\cap\{x\in[0,1]:x<N(N(x))\}\neq\varnothing$$

则存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $x_0<N(x_0)$ 和 $x_0<N(N(x_0))$，从而

$$\begin{aligned}I_{g,N}(x_0,\ x_0)&=g^{-1}(\min\{g(1),\ g(N(x_0)\wedge x_0)-g(N(N(x_0)\vee x_0))+g(1)\})=\\&g^{-1}(\min\{g(1),\ g(x_0)-g(N(N(x_0)))+g(1)\})=\\&g^{-1}(g(x_0)-g(N(N(x_0)))+g(1))<\\&g^{-1}(g(1))=1\end{aligned}$$

这与 $I_{g,N}(x,\ x)=1$ 矛盾.

充分性　因为 $\{x\in[0,1]:x<N(x)\}\cap\{x\in[0,1]:x<N(N(x))\}=\varnothing$，则 $x<N(x)$ 可推出 $x\geqslant N(N(x))$. 如果 x 满足 $x<N(x)$，可得

$$\begin{aligned}I_{g,N}(x,\ x)&=g^{-1}(\min\{g(1),\ g(N(x)\wedge x)-g(N(N(x)\vee x))+g(1)\})=\\&g^{-1}(\min\{g(1),\ g(x)-g(N(N(x)))+g(1)\})=\\&g^{-1}(g(1))=1\end{aligned}$$

如果 x 满足 $x\geqslant N(x)$，可得

$$\begin{aligned}I_{g,N}(x,\ x)&=g^{-1}(\min\{g(1),\ g(N(x)\wedge x)-g(N(N(x)\vee x))+g(1)\})=\\&g^{-1}(\min\{g(1),\ g(N(x))-g(N(x))+g(1)\})=\\&g^{-1}(g(1))=1\end{aligned}$$

从而 $I_{g,N}$ 满足恒等原则.

性质 3　模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 满足序性质当且当 N 为强的.

证　*必要性*　由 $I_{g,N}$ 满足序性质，则 $I_{g,N}$ 满足恒等原则. 由性质 2，$x<N(x)$ 可推出 $x\geqslant N(N(x))$，$x\in[0,1]$. 设 N 不强，则存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $x_0\neq N(N(x_0))$.

如果 $x_0<N(x_0)$，则 $x_0>N(N(x_0))$，且存在 $y_0\in[0,1]$，使得 $N(N(x_0))<y_0<x_0<N(x_0)$，从而

$$I_{g,N}(x_0,\ y_0)=g^{-1}(\min\{g(1),\ g(N(x_0)\wedge y_0)-g(N(N(x_0)\vee y_0))+g(1)\})=$$

$$g^{-1}(\min\{g(1), g(y_0)-g(N(N(x_0)))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(g(1))=1$$

这与 $I_{g,N}$ 满足序性质矛盾.

如果 $x_0=N(x_0)$，则 $N(x_0)=N(N(x_0))=x_0$，矛盾.

如果 $x_0>N(x_0)$，则 $N(N(x_0))\geqslant N(x_0)$，考虑下面两种情形：

情形1　$N(N(x_0))=N(x_0)$，则

$$I_{g,N}(x_0, N(x_0))=g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x_0)\wedge N(x_0))-g(N(N(x_0)\vee N(x_0)))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x_0))-g(N(x_0))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(g(1))=1$$

矛盾.

情形2　$N(N(x_0))>N(x_0)$，由恒等原则，$N(x_0)\geqslant N(N(N(x_0)))$，从上面的证明知 $N(x_0)>N(N(N(x_0)))$ 不成立，则 $N(x_0)=N(N(N(x_0)))$. x_0 与 $N(N(x_0))$ 比较，只有两种可能，即 $x_0>N(N(x_0))$ 或 $x_0<N(N(x_0))$.

如果 $x_0>N(N(x_0))$，则存在 $y_0\in[0,1]$，使得 $N(N(x_0))<y_0<x_0$，所以 $y_0>N(x_0)$. 因为 $N(x_0)=N(N(N(x_0)))$，则 $N(y_0)=N(x_0)$，但是

$$I_{g,N}(x_0, y_0)=g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x_0)\wedge y_0)-g(N(N(x_0)\vee y_0))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x_0))-g(N(x_0))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(\min\{g(1), g(1)\})=1$$

矛盾.

如果 $x_0<N(N(x_0))$，则存在 $y_0\in[0,1]$，使得 $x_0<y_0<N(N(x_0))$，所以 $y_0>N(x_0)$. 因为 $N(x_0)=N(N(N(x_0)))$，则 $N(y_0)=N(x_0)$，但是

$$I_{g,N}(y_0, x_0)=g^{-1}(\min\{g(1), g(N(y_0)\wedge x_0)-g(N(N(y_0)\vee x_0))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x_0))-g(N(x_0))+g(1)\})=$$
$$g^{-1}(\min\{g(1), g(1)\})=1$$

矛盾.

综上所述，对任意的 $x\in[0,1]$，有 $x=N(N(x))$，即 N 为强的.

充分性　设 $x\leqslant y$，因为 N 为强的，则

$$I_{g,N}(x, y)=g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x)\wedge y)-g(N(N(x)\vee y))+g(1)\})=$$
$$\begin{cases} g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x))-g(N(y))+g(1)\}) & y\geqslant N(x) \\ g^{-1}(\min\{g(1), g(y)-g(N(N(x)))+g(1)\}) & y<N(x) \end{cases}=$$
$$\begin{cases} 1 & y\geqslant N(x) \\ g^{-1}(\min\{g(1), g(y)-g(x)+g(1)\}) & y<N(x) \end{cases}=1$$

反之，当 $I_{g,N}(x, y)=1$ 时，如果 $y\geqslant N(x)$，则

$$g^{-1}(\min\{g(1), g(N(x))-g(N(y))+g(1)\})=1$$

所以

$$\min\{g(1), g(N(x))-g(N(y))+g(1)\}=g(1)$$

从而 $g(N(x))\geqslant g(N(y))$，即 $x\leqslant y$. 如果 $y<N(x)$，同理 $x\leqslant y$. 从而 $I_{g,N}$ 满足序性质.

推论1　模糊蕴涵 $(I_{g,N})_\varphi$ 满足序性质当且当 N 为强的.

性质4　模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 的自然否定 $N_{I_{g,N}}$ 为强的，且 g 为其生成子当且当 N 为强的.

证　$N_{I_{g,N}}(x)=I_{g,N}(x,0)=g^{-1}(g(1)-g(N(N(x))))$，如果 N 为强的，则

$$N_{I_{g,N}}(x)=g^{-1}(g(1)-g(x))$$

因为 $g:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ 严格增且连续，则 $N_{I_{g,N}}$ 为强的，g 为其生成子. 反之，如果 $N_{I_{g,N}}$ 为强的，且 g 为其生成子，则 $N_{I_{g,N}}(x)=g^{-1}(g(1)-g(x))$，从而

$$N(N(x))=g^{-1}(g(1)-g(N_{I_{g,N}}(x)))=g^{-1}(g(1)-g(g^{-1}(g(1)-g(x))))=x$$

即 N 为强.

性质 5　已知 N 为连续模糊否定，如果模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 关于模糊否定 N' 满足逆否对称性，则 $N=N'$，且 N 为强的.

证　设 $x,y\in[0,1]$，因为 $I_{g,N}$ 关于 N' 满足逆否对称性，则

$$I_{g,N}(x,y)=I_{g,N}(N'(y),N'(x)) \tag{1}$$

在等式(1) 中令 $y=0$，得 $I_{g,N}(x,0)=I_{g,N}(1,N'(x))$，即

$$g^{-1}(g(1)-g(N(N(x))))=g^{-1}(g(1)-g(N(N'(x))))$$

所以对任意的 $x\in[0,1]$，有

$$N(N(x))=N(N'(x)) \tag{2}$$

在等式(1) 中令 $x=1$，得 $I_{g,N}(1,y)=I_{g,N}(N'(y),0)$，即

$$g^{-1}(g(1)-g(N(y)))=g^{-1}(g(1)-g(N(N(N'(y)))))$$

从而得

$$N(y)=N(N(N'(y)))\qquad y\in[0,1] \tag{3}$$

由(2),(3) 式，可得 $N(x)=N(N(N(x)))$，即 N 为强的. 又由(2) 式可得 $N=N'$.

性质 6　若模糊否定 N 为强的，则模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 只关于 N 满足逆否对称性.

证　易证 $I_{g,N}(N(y),N(x))=I_{g,N}(x,y)$，再由性质5，可得模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 只关于 N满足逆否对称性.

性质 7　若 N 为连续的模糊否定，则模糊蕴涵 $I_{g,N}$ 满足交换原则当且当 N 为强的，且 g 为其生成子.

证　*必要性*　由 $I_{g,N}$ 满足交换原则，则

$$I_{g,N}(x,I_{g,N}(y,z))=I_{g,N}(y,I_{g,N}(x,z))\qquad x,y,z\in[0,1]$$

令 $z=0$，$y=1$，可得

$$I_{g,N}(x,0)=I_{g,N}(1,N_{I_{g,N}}(x))\qquad x\in[0,1]$$

所以有

$$N(N(x))=N(N_{I_{g,N}}(x))\qquad x\in[0,1]$$

从而

$$N(N(x))=N(g^{-1}(g(1)-g(N(N(x)))))\qquad x\in[0,1]$$

令

$$\widetilde{N}(x)=g^{-1}(g(1)-g(x))\qquad x\in[0,1]$$

显然，$\widetilde{N}$ 为强的，则有

$$N(N(x))=N(\widetilde{N}^{\circ}(N(N(x))))\qquad x\in[0,1]$$

令 $u=N(N(x))$，因为 N 为连续的模糊否定，则 $u=N(\widetilde{N}(u))$，$u\in[0,1]$. 注意到 $\widetilde{N}(\widetilde{N}(u))=u$，则 $N=\widetilde{N}$，即 N 为强的，且 g 为其生成子.

充分性　由 g 为强模糊否定 N 的生成子知 $N(x)=g^{-1}(g(1)-g(x))$，$x\in[0,1]$，从而

$$I_{g,N}(x,I_{g,N}(y,z))=\begin{cases}g^{-1}(g(z)-g(y)-g(x)+2g(1)) & y\geqslant z,\ g(x)\geqslant g(z)-g(y)+g(1)\\ 1 & \text{否则}\end{cases}$$

$$I_{g,N}(y, I_{g,N}(x, z)) = \begin{cases} g^{-1}(g(z) - g(x) - g(y) + 2g(1)) & x \geqslant z,\ g(y) \geqslant g(z) - g(x) + g(1) \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

考虑下面4种情形:

情形1 如果 $x \leqslant z$, $y \leqslant z$, 则 $I_{g,N}(y, I_{g,N}(x, z)) = 1 = I_{g,N}(x, I_{g,N}(y, z))$.

情形2 如果 $x \leqslant z$, $y > z$ 则 $I_{g,N}(y, I_{g,N}(x, z)) = 1$, 因为 $g(y) - g(z) \geqslant g(1) - g(x)$ 不成立, 则 $I_{g,N}(x, I_{g,N}(y, z)) = 1$, 所以 $I_{g,N}(y, I_{g,N}(x, z)) = I_{g,N}(x, I_{g,N}(y, z))$.

情形3 如果 $x > z$, $y \leqslant z$, 同情形2, $I_{g,N}(y, I_{g,N}(x, z)) = I_{g,N}(x, I_{g,N}(y, z))$.

情形4 如果 $x > z$, $y > z$, 显然, $I_{g,N}(y, I_{g,N}(x, z)) = I_{g,N}(x, I_{g,N}(y, z))$.

由以上讨论, 可得 $I_{g,N}$ 满足交换原则.

推论2 如果N为强的, 且 g 为其加法生成子, 则 $I_{g,N}$ 关于其自然否定满足逆否对称性.

推论3 如果N为连续模糊否定, 则下列结论等价:

(i) $I_{g,N}$ 满足交换原则;

(ii) $I_{g,N}$ 为(S, N)-蕴涵, 且S为阿基米德 t 余模 $S(x, y) = g^{-1}(\min\{g(1), g(x) + g(y)\})$;

(iii) $I_{g,N}$ 关于 t 模 T 满足输入律.

性质8 设 $g_1, g_2: [0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$ 为严格增且连续的函数, 满足 $g_1(0) = 0$, $g_2(0) = 0$, 模糊否定 N_1, N_2 连续, 则 $I_{g_1, N_1} = I_{g_2, N_2}$ 当且当 $N_1 = N_2$ 且存在常数 $k > 0$, 使得 $g_2 = kg_1$.

证 类似于文献[18]中命题2.2的证明.

本文提出了利用模糊否定及单调函数构建模糊蕴涵的方法. 当单调函数为恒等函数时, 则可直接利用模糊否定构造模糊蕴涵. 对所给模糊蕴涵的基本特性进行了探讨, 并得到了一些结果. 对于如何将所得的模糊蕴涵拓展到二值模糊集[19]或凸vague集环境[20]是一个值得研究的问题.

参考文献:

[1] OUYANG Y. On Fuzzy Implications Determined by Aggregation Operators [J]. Information Sciences, 2012, 193: 153-162.

[2] PRADERA A, BELIAKOV G, BUSTINCE H. A Review of the Relationships Between Implication, Negation and Aggregation Functions from the Point of View of Material Implication [J]. Information Sciences, 2016, 329: 357-380.

[3] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. On the Characterizations of (S, N)-Implications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158(15): 1713-1727.

[4] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. Fuzzy Implications, Studies in Fuzziness and Soft Computing [M]. Berlin: Springer, 2008.

[5] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. (S, N)-and R-Implications: A State of the Art Survey [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(14): 1836-1859.

[6] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. QL-Implications: Some Properties and Intersections [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(2): 158-188.

[7] BACZYŃSKI M, JAYARAM B. (U, N)-Implications and Their Characterizations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(14): 2049-2062.

[8] BAETS B D, FODOR J C. Residual Operators of Uninorms [J]. Soft Comput, 1999, 3(2): 89-100.

[9] GRZEGORZEWSKI P. Probabilistic Implications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 226: 53-66.

[10] YAGER R R. On Some New Classes of Implication Operators and Their Role in Approximate Reasoning [J]. Information Sciences, 2004, 167(1-4): 193-216.

[11] BALASUBRAMANIAM J. Contrapositive Symmetrisation of Fuzzy Implications-Revisited [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(17): 2291-2310.

[12] BALASUBRAMANIAM J. Yager's New Class of Implications J_f and Some Classical Tautologies [J]. Information Sciences, 2007, 177(3): 930-946.

[13] LIU H W. On a New Class of Implications: (g, min)-Implications and Several Classical Tautologies [J]. Int J Uncertain Fuzziness Knowl Based Syst, 2012, 20(1): 1-20.

[14] MASSANET S, Torrens J. On a New Class of Fuzzy Implication: h-Implication and Generalization [J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2112-2127.

[15] SU Y, XIE A F, LIU H W. On Ordinal Sum Implications [J]. Information Sciences, 2015, 293: 251-262.

[16] MASSANET S, TORRENS J. On Some Properties of Threshold Generated Implications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 205: 30-49.

[17] AGUILÓ I, SUNER J, TORRENS J. A Construction Method of Semicopulas from Fuzzy Negations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 226: 99-114.

[18] CARBONELL M, TORRENS J. Continuous R-Implications Generated from Representable Aggregation Functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(17): 2276-2289.

[19] 李冬梅，李　涛，赵　涛. 二型模糊推理的三 I 算法及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(9)：140-144.

[20] 彭祖明. 凸 Vague 集的定义及性质 [J]. 西南大学学报 (自然科学版)，2013，35(6)：59-64.

Fuzzy Implication from Fuzzy Negation and Generator and Its Properties

PENG Zu-ming

College of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100, China

Abstract: In this paper, a new way of generating fuzzy implications is introduced, which produces a fuzzy implication from a fuzzy negation and a continuous monotone function. The proposed method can generate a fuzzy implication from a fuzzy negation only. Also, some properties such as the left neutrality property, the exchange principle and the ordering property are studied, and some results are obtained.

Key words: fuzzy implication; fuzzy negation; aggregation function; property

责任编辑　廖　坤