DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.02.008

Heisenberg 型群上的广义 Picone 恒等式及其应用

王胜军[1]，　窦井波[2]

1. 青海师范大学 数学与统计学院，西宁 810008；2. 陕西师范大学 数学与信息科学院，西安 710119

摘要：利用 Heisenberg 型群上 p-退化椭圆算子的广义 Picone 恒等式给出了 Hardy 不等式、Sturmiam 比较原理、Liouville 型定理和主特征值的单调性结论. 讨论了具有奇异项的拟线性方程的弱解问题.

关　键　词：Heisenberg 型群；广义 Picone 恒等式；Hardy 不等式；Sturmiam 比较原理；Liouville 型定理

中图分类号：O175.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)02-0048-07

在欧式空间上，经典的 Picone 恒等式为

$$|\nabla u|^2+\frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2-2\frac{u}{v}\nabla u\nabla v=|\nabla u|^2-\nabla\left(\frac{u^2}{v}\right)\nabla v\geqslant 0 \tag{1}$$

其中 $u\geqslant 0$，$v>0$，同时 u,v 是可微函数[1-3]. 文献[4]将(1)式推广到 p-Laplace 算子上，接着，文献[5]又将(1)式作了进一步的推广，得到了较为一般的 Picone 恒等式

$$|\nabla u|^2+\frac{|\nabla u|^2}{f'(v)}+\left(\frac{u\sqrt{f'(v)}\nabla v}{f(v)}-\frac{\nabla u}{\sqrt{f'(v)}}\right)^2=$$

$$|\nabla u|^2-\nabla\left(\frac{u^2}{f(v)}\right)\nabla v\geqslant 0 \tag{2}$$

最近，文献[6]将(2)式推广到 p-Laplace 算子上，给出了更加广义的 Picone 恒等式

$$|\nabla u|^p-\frac{pu^{p-1}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)}+\frac{u^pf'(v)|\nabla v|^p}{[f(v)]^2}=$$

$$|\nabla u|^p-\nabla\left(\frac{u^p}{f(v)}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\geqslant 0 \tag{3}$$

关于 Baouendi-Grushi p-退化椭圆算子，文献[7]给出了类似(3)式的结果. 本文将(3)式推广到 Heisenberg 型群的 p-退化椭圆算子上，得到了一类广义 Picone 恒等式，其结果包含了(3)式的情形. 作为应用，在第三部分，利用本文得到的广义 Picone 恒等式证明了 Hardy 不等式、Sturmiam 比较原理、主特征值的单调性结论和 Liouville 型定理，避免了正则性的讨论. 最后，讨论了具有奇异项的拟线性方程的弱解问题.

1　预备知识

文献[8]提出了 Heisenberg 型群，它是 Heisenberg 群的推广，是一类与亚椭圆问题相联系的 Carnot

收稿日期：2019-05-25
基金项目：国家自然科学基金项目(11571268)；青海省科技厅应用基础研究项目(2017-ZJ-768).
作者简介：王胜军(1968-)，男，教授，主要从事椭圆方程边值问题的研究.

型群. 作为满足 Hömander条件的一般向量场的重要模型，Heisenberg型群被更多学者广泛研究，并得到许多重要结果[9-12]. 关于 Heisenberg 型群，在这里作一个简要的叙述，详细内容可参考本文中提到的参考文献.

设 G 是具有李代数 $\mathscr{G}=V_1\oplus V_2$ 的一个 2 步 Carnot 群，且 $\mathscr{G}$ 被赋予内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$，定义映射 $J: V_2\longrightarrow \mathrm{End}(V_1)$：

$$\langle J(\xi_2)\xi_1',\ \xi_1''\rangle=\langle\xi_2,[\xi_1',\ \xi_1'']\rangle\qquad \xi_1',\xi_1''\in V_1,\ \xi_2\in V_2$$

若对任意 $\xi_2\in V_2$，$|\xi_2|=1$，映射 $J(\xi_2): V_1\longrightarrow V_1$ 是正交的，则称 G 是一个 Heisenberg 型群，简称 H 型群.

Heisenberg 型群 p- 退化椭圆算子形为

$$\Delta_p u=\mathrm{div}_L(|\nabla_L u|^{p-2}\nabla_L u)\tag{4}$$

其中 $p>1$.

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\langle[\xi,\ X_j],\ Y_i\rangle\frac{\partial}{\partial y_i}\qquad j=1,\cdots,m$$

是 V_1 的一组标准正交基，其中

$$\xi=\xi_1+\xi_2\in\mathscr{G}=V_1\oplus V_2$$

$$x=(x_1,\ \cdots,\ x_m)\in\mathbb{R}^m\qquad y=(y_1,\ \cdots,\ y_k)\in\mathbb{R}^n$$

$$\nabla_L=(X_1,\ \cdots,\ X_m)\qquad \mathrm{div}_L(u_1,\ \cdots,\ u_m)=\sum_{j=1}^{m}X_j u_j$$

相应于(4) 式的非迷向伸缩为

$$\delta_\tau(x,\ y)=(\tau x,\ \tau^2 y)\qquad \tau>0,\ (x,\ y)\in G\tag{5}$$

与此伸缩相应的 G 的齐次维数是 $Q=m+2n$.

设 $\xi=(x,\ y)$，$\tilde{\xi}=(\tilde{x},\ \tilde{y})\in G$，在 H 型群 G 上得到一个拟距离为

$$d(\xi)=(|x(\xi)|^4+16|y(\xi)|^2)^{\frac{1}{4}}$$

定义中心在 ξ，半径为 R 的拟开球为

$$B_R(\xi)=\{\xi\in G\mid d(\xi)<R\}$$

令 $\Omega\subset G$，Ω 是开子集，$C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中具有紧支集的函数构成的集合，

$$D^{1,p}(\Omega)=\{u: \Omega\longrightarrow\mathbb{R}\mid|\nabla_L u|\in L^p(\Omega)\}$$

$D_0^{1,p}(\Omega)(1<p<\infty)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\|u\|_{D_0^{1,p}}=\left(\int_\Omega|\nabla_L u|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

下的完备化.

2　Heisenberg 型群 p- 退化椭圆算子的一类广义 Picone 恒等式

下文中，总是假设 g 满足下列条件：$g: (0,\ \infty)\longrightarrow(0,\ \infty)$ 是局部 Lipchitz 函数，且在$(0,\ \infty)$ 上

$$g'(v)\geqslant(p-1)[g(v)]^{\frac{p-2}{p-1}}\tag{6}$$

几乎处处成立.

定理 1(广义 Picone 恒等式)　若 $1<p<\infty$，$\Omega\subset G$，u,v 是 Ω 上的可微函数，在 Ω 上几乎处处 $v>0$，且 g 满足(6) 式，设

$$L(u,\ v)=|\nabla_L u|^p-p\frac{|u|^{p-2}u}{g(v)}\nabla_L u\cdot\nabla_L v|\nabla_L v|^{p-2}+\frac{g'(v)|u|^p}{[g(v)]^2}|\nabla_L v|^p$$

$$R(u,\ v)=|\nabla_L u|^p-\nabla_L\left(\frac{|u|^p}{g(v)}\right)|\nabla_L v|^{p-2}\nabla_L v$$

则

$$L(u, v)=R(u, v) \geqslant 0$$

而且在 Ω 上，$L(u, v)=0$ 几乎处处成立的充要条件是 $\nabla_L\left(\frac{u}{v}\right)=0$ 几乎处处成立.

证 经计算，有

$$\nabla_L\left(\frac{|u|^p}{g(v)}\right)=p\frac{|u|^{p-2}u\nabla_L u}{g(v)}-\frac{g'(v)|u|^p\nabla_L v}{[g(v)]^2}$$

$$R(u, v)=|\nabla_L u|^p-p\frac{|u|^{p-2}u}{g(v)}\nabla_L u\cdot\nabla_L v|\nabla_L v|^{p-2}+\frac{g'(v)|u|^p}{[g(v)]^2}|\nabla_L v|^p$$

得到

$$L(u, v)=R(u, v)$$

因为

$$L(u, v)\geqslant|\nabla_L u|^p-|\nabla_L u|^p-(p-1)\frac{|u|^p|\nabla_L v|^p}{[g(v)]^{\frac{p-2}{p-1}}}+\frac{g'(v)|u|^p}{[g(v)]^2}|\nabla_L v|^p$$

并且 $g(v)$ 满足(6)式，所以

$$L(u, v)=R(u, v)\geqslant 0$$

当下面3个等式同时成立时，$L(u, v)=R(u, v)$：

$$g'(v)=(p-1)[g(v)]^{\frac{p-2}{p-1}} \tag{7}$$

$$\frac{|u|^{p-2}u}{g(v)}\nabla_L u\cdot\nabla_L v|\nabla_L v|^{p-2}=\frac{|u|^{p-1}}{g(v)}|\nabla_L v|^{p-1}|\nabla_L u| \tag{8}$$

$$|\nabla_L u|=\frac{|u\nabla_L v|}{g(v)^{\frac{1}{p-1}}} \tag{9}$$

令

$$\omega=\left\{\xi\in\Omega \,\middle|\, \frac{|u\nabla_L v|}{g(v)^{\frac{1}{p-1}}}=0\right\}$$

当 $\xi\in\omega$ 时，由(9)式得到

$$\frac{|u\nabla_L v|}{g(v)^{\frac{1}{p-1}}}=|\nabla_L u|=0 \tag{10}$$

在(7)式中，取 $g(v)=v^{p-1}$，结合(10)式得

$$\frac{u}{v}\nabla_L v=\nabla_L u=0 \tag{11}$$

当 $\xi\in\omega^c$ 时，设

$$\tilde{\omega}=\frac{|\nabla_L u|[g(v)]^{\frac{1}{p-1}}}{|u\nabla_L v|}$$

由 $L(u, v)=0$，得

$$\tilde{\omega}^p-p\tilde{\omega}+p-1=0$$

从而 $\tilde{\omega}=1$，即

$$\frac{|\nabla_L u|[g(v)]^{\frac{1}{p-1}}}{|u\nabla_L v|}=1$$

取 $g(v)=v^{p-1}$，得

$$\nabla_L u \cdot \left(\nabla_L u - \nabla_L v \frac{u}{v}\right) = 0 \tag{12}$$

综合(11)式和(12)式得到：在 Ω 上，$L(u, v) = 0$ 几乎处处成立的充要条件是 $\nabla_L \left(\frac{u}{v}\right) = 0$ 几乎处处成立.

注 1　在定理 1 中，当 $\Omega = G$ 时，结论仍然成立.

注 2　在定理 1 中，取 $g(v) = v^{p-1}$，$u \geqslant 0$，得到文献[13]中的 Picone 恒等式.

3　H 型群上的广义 Picone 恒等式的应用

作为应用，本节首先讨论 Hardy 不等式. 为此需要下面关键性的引理：

引理 1　若 $v \in C^1(G)$，在 Ω 上 $v > 0$，并且满足

$$-\Delta_p v \geqslant \lambda h\, g(v)$$

其中 $\lambda > 0$，h 是非负连续函数，g 满足(6)式，则对于 $u \in C_0^\infty(G)$，$u \geqslant 0$，有

$$\int_G |\nabla_L u|^p \mathrm{d}\xi \geqslant \lambda \int_G h\, |u|^p \mathrm{d}\xi \tag{13}$$

证　取 $\phi \in C_0^\infty(G)$，$\phi > 0$. 由注 1 得

$$0 \leqslant \int_G L(\phi, v)\mathrm{d}\xi \leqslant \int_G R(\phi, v)\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$\int_G |\nabla_L \phi|^p \mathrm{d}\xi - \lambda \int_G h\phi^p \mathrm{d}\xi$$

令 $\phi \to u$，就得到(13)式.

利用引理 1，取 $g(v) = v^{p-1}$，容易得到文献[14]中的下列 Hardy 不等式：

定理 2(Hardy 不等式)　设 $1 < p < Q$，$u \in C_0^\infty(G\backslash\{0\})$，有

$$\int_G |\nabla_L u|^p \mathrm{d}\xi \geqslant \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_G \left(\frac{|x|}{\mathrm{d}}\right)^{p\alpha} \frac{|u|^p}{\mathrm{d}^p}\mathrm{d}\xi$$

成立，其中 $Q = m + 2n$ 是相应于(5)式的齐次维数.

定理 3(Sturmiam 比较原理)　设 f_1, f_2 是两个权函数，$f_1 < f_2$，且 g 满足

$$g'(v) \geqslant (p-1)\left[g(v)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]$$

若 u 是方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_1(\xi)\, |u|^{p-2} u & \xi \in \Omega \\ u = 0 & \xi \in \partial\Omega \end{cases}$$

的正解，则方程

$$\begin{cases} -\Delta_p v = f_2(\xi) g(v) & \xi \in \Omega \\ v = 0 & \xi \in \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

的任意非平凡解一定改变符号.

证　假设 $v > 0$ 是方程(14)的解，由广义 Picone 恒等式，有

$$0 \leqslant \int_\Omega L(u, v)\mathrm{d}\xi = \int_\Omega R(u, v)\mathrm{d}\xi =$$
$$\int_\Omega |\nabla_L u|^p \mathrm{d}\xi - \nabla_L \left(\frac{u^p}{g(v)}\right) |\nabla_L v|^{p-2} \nabla_L v =$$
$$\int_\Omega (f_1(\xi) u^p - f_2(\xi)\, |u|^p)\mathrm{d}\xi =$$
$$\int_\Omega (f_1 - f_2) u^p \mathrm{d}\xi < 0$$

矛盾. 因此假设错误，即 v 在 Ω 上改变符号.

对于下列不确定特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta_p u=\lambda h(\xi)g(u) & \xi\in\Omega \\ u=0 & \xi\in\partial\Omega\end{cases} \tag{15}$$

其中 $h(\xi)$ 是不确定权函数，利用定理1给出的主特征值的严格单调性结论，$g(u)$ 满足(6)式.

定理4(主特征值的单调性结论) 设 $\lambda_1^+(\Omega)>0$ 是问题(15)的主特征值，若 $\Omega_1\subset\Omega_2$ 且 $\Omega_1\neq\Omega_2$，$\lambda_1^+(\Omega_1)$ 与 $\lambda_1^+(\Omega_2)$ 都存在，则 $\lambda_1^+(\Omega_1)>\lambda_1^+(\Omega_2)$.

证 设 u_1,u_2 分别是相应于 $\lambda_1^+(\Omega_1),\lambda_1^+(\Omega_2)$ 的正的特征函数，对于 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$，利用定理1，得到

$$0\leqslant\int_{\Omega_1}R(\varphi,\ u_2)\mathrm{d}\xi=\int_{\Omega_1}|\nabla_L\varphi|^p\mathrm{d}\xi-\int_{\Omega_1}\nabla_L\left(\frac{\varphi^p}{g(u_2)}\right)|\nabla_L u_2|^{p-2}\nabla_L u_2\mathrm{d}\xi=$$

$$\int_{\Omega_1}|\nabla_L\varphi|^p\mathrm{d}\xi+\int_{\Omega_1}\frac{\varphi^p}{g(u_2)}\Delta_{L,p}u_2\mathrm{d}\xi=$$

$$\int_{\Omega_1}|\nabla_L\varphi|^p\mathrm{d}\xi-\lambda_1^+(\Omega_2)\int_{\Omega_1}h\varphi^p\mathrm{d}\xi$$

在 $D_0^{1,p}(\Omega_1)$ 中，令 $\varphi\to u_1$，有

$$0\leqslant\int_{\Omega_1}R(u_1,\ u_2)\mathrm{d}\xi=(\lambda_1^+(\Omega_1)-\lambda_1^+(\Omega_2))\int_{\Omega_1}hu_1^p\mathrm{d}\xi \tag{16}$$

已知

$$\int_{\Omega_1}|\nabla_L u_1|^p\mathrm{d}\xi=\int_{\Omega_1}-(\Delta_p u_1)u_1\mathrm{d}\xi=\int_{\Omega_1}\lambda_1^+\ hg(u_1)u_1\mathrm{d}\xi$$

取 $g(u_1)=u_1^{p-1}$，得到

$$\int_{\Omega_1}|\nabla_L u_1|^p\mathrm{d}\xi=\int_{\Omega_1}\lambda_1^+\ hu_1^p\mathrm{d}\xi$$

从而

$$\int_{\Omega_1}hu_1^p\mathrm{d}\xi\geqslant 0$$

结合(16)式得到

$$\lambda_1^+(\Omega_1)-\lambda_1^+(\Omega_2)\geqslant 0$$

由已知条件知道

$$\lambda_1^+(\Omega_1)\neq\lambda_1^+(\Omega_2)$$

因此

$$\lambda_1^+(\Omega_1)>\lambda_1^+(\Omega_2)$$

定理5(Liouville型结果) 若 $c_0>0$，$p>1$，且 g 满足 $g'(y)\geqslant(p-1)\left[g(y)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]$，则

$$-\Delta_p v\geqslant c_0 g(v) \tag{17}$$

在 $D_{\mathrm{Loc}}^{1,p}(G)$ 中没有正解.

证 假设 v 是(17)式的正解，取 $R>0$，令 ϕ_1 是相应于第一特征值 $\lambda_1(B_R(\xi))$ 的第一特征函数，使得 $\lambda_1(B_R(\xi))<c_0$. 由文献[15]中的极大值原理知道：$\dfrac{\phi_1^p}{g(v)}$ 可以作为测试函数，且 $\dfrac{\phi_1^p}{g(v)}\in D^{1,p}(B_R(\xi))$. 因此

$$c_0\int_{B_R(\xi)}\phi_1^p\mathrm{d}\xi-\int_{B_R(\xi)}|\nabla_L\phi_1|^p\mathrm{d}\xi\leqslant-\int_{B_R(\xi)}R(\phi_1,\ v)\mathrm{d}\xi\leqslant 0$$

从而

$$c_0\leqslant\frac{\displaystyle\int_{B_R(\xi)}|\nabla_L\phi_1|^p\mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_{B_R(\xi)}\phi_1^p\mathrm{d}\xi}=\lambda_1(B_R(\xi))<c_0$$

矛盾. 因此假设错误，即(17) 式在 $D_{Loc}^{1,p}(G)$ 中没有正解.

文献[16] 讨论了具有奇异项的 p-Laplacian 方程解的问题，这里利用定理 1 来讨论这类问题.

定理 6(具有奇异项的拟线性方程组的弱解结论)　若 g 满足

$$g'(y) \geqslant (p-1)\left[g(y)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]$$

且(u, v) 是下列方程组的一组弱解：

$$\begin{cases} -\Delta_p u(\xi) = g(v(\xi)) & \xi \in \Omega \\ -\Delta_p v(\xi) = \dfrac{[g(v(\xi))]^2}{[u(\xi)]^{p-1}} & \xi \in \Omega \\ u(\xi) > 0,\ v(\xi) > 0 & \xi \in \Omega \\ u(\xi) = 0,\ v(\xi) = 0 & \xi \in \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

则 $u = c_1 v$，其中 c_1 是常数.

证　设 $\phi_1, \phi_2 \in D_0^{1,p}(\Omega)$，由方程组(18) 有

$$\int_\Omega |\nabla_L u|^{p-2} |\nabla_L u| \nabla_L \phi_1 \mathrm{d}\xi = \int_\Omega g(v)\phi_1 \mathrm{d}\xi \tag{19}$$

$$\int_\Omega |\nabla_L u|^{p-2} |\nabla_L u| \nabla_L \phi_2 \mathrm{d}\xi = \int_\Omega \frac{[g(v)]^2}{u^{p-1}}\phi_2 \mathrm{d}\xi \tag{20}$$

在(19),(20) 式中取 $\phi_1 = u$，$\phi_2 = \dfrac{u^p}{g(v)}$，得

$$\int_\Omega |\nabla_L u|^p \mathrm{d}\xi = \int_\Omega u g(v) \mathrm{d}\xi = \int_\Omega \nabla_L \left(\frac{u^p}{g(v)}\right) |\nabla_L v|^{p-2} \nabla_L v \mathrm{d}\xi$$

从而

$$\int_\Omega R(u, v) \mathrm{d}\xi = \int_\Omega |\nabla_L u|^p \mathrm{d}\xi - \nabla_L \left(\frac{u^p}{g(v)}\right) |\nabla_L u|^{p-2} \nabla_L v = 0$$

因此，由定理 1 中的 $R(u, v) > 0$，得

$$\nabla_L \left(\frac{u}{v}\right) = 0$$

即 $u = c_1 v$，其中 c 是常数.

参考文献：

[1] ALLEGRETTO W. Positive Solutions and Spectral Properties of Weakly Coupled Elliptic Systems [J]. J Math Anal Appl，1986，120(2)：723-729.

[2] ALLEGRETTO W. Sturmian Theorems for Second Order Systems [J]. Proc Amer Math Soc，1985，94(2)：291-296.

[3] ALLEGRETTO W. On the Principal Eigenvalues of Indefinite Elliptic Problems [J]. Math Zeitschrift，1987，195(1)：29-35.

[4] ALLEGRETTO W，HUANG Y X. A Picone's Identity for the p-Laplacian and Application [J]. Nonlinear Analysis，1998，32(7)：819-830.

[5] TYAGI J. A Nonlinear Picone's Identity and Its Applications [J]. Applied Mathematics Letters，2013，26(6)：624-626.

[6] BAL K. Generalized Picone's Indentity and Its Applications [J]. Electronic J Diff Equations，2013，2013(243)：1-6.

[7] 王胜军，韩亚洲. Baouendi-Grushi p-退化椭圆算子的广义 Picone 恒等式及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(3)：1-6.

[8] KAPLAN A. Fundamental Solutions for a Class of Hypoelliptic PDE Generated by Composition of Quadratic Forms [J]. Trans Am Math Soc，1980，258(1)：147-153.

[9] GAROFALO N，VASSILEV D. Regularity Near the Characteristic Set in the Non-Linear Dirichlet Problem and Conformal Geometry of Sub-Laplacians on Carnot Groups [J]. Math Ann，2000，318(3)：453-516.

[10] GAROFALO N, VASSILEV D. Symmetry Properties of Positive Entire Solutions of Yamabe-Type Equations on Groups of Heisenberg Type [J]. Duke Math J, 2001, 106(3): 411-448.

[11] GAROFALO N. Unique Continuation for a Class of Elliptic Operators which Degenerate on a Mannifold of Arbitrary Codimension [J]. J Differential Equations, 1993, 104(1): 117-146.

[12] GAROFALO N, NHIE D M. Isoperimetric and Sobolev Inequalities for Carnot-Caratheodory Spaces and the Existence of Minimum Surfaces [J]. Comm Pure Appl Math, 1996, XLIX: 1081-1144.

[13] DOU J B. Picone Inequlities for p-Sub-Laplacian on Heisenberg Group and Its Applications [J]. Comm Contem Math, 2010, 12(2): 295-307.

[14] 韩军强，钮鹏程，韩亚洲. Heisenberg 型群上的几类 Hardy 型不等式 [J]. 系统科学与教学，2005，25(5)：588-598.

[15] 原子霞，钮鹏程. H 型群上 p-次 Laplace 算子的 Hopf 型引理和强极大值原理 [J]. 数学研究与评论，2007，27(3)：605-612.

[16] 廖家锋，李红英，段　誉. 一类奇异 p-Laplacian 方程正解的唯一性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(6)：45-49.

Generalized Picone's Identity and Its Applications for the Heisenberg-Type Group

WANG Sheng-jun[1], DOU Jing-bo[2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining 810008, China;*
2. *School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China*

Abstract: This paper establishes a generalized version of the Picone's identity of p-degenerated elliptic operators for the Heisenberg-type group. As applications, Hardy-type inequality, Sturmian comparison principle, a Liouville-type theorem and the strict monotonicity of the principal eigenvalue are given. The weak solution of the quasi-linear system with singular nonlinearity is also studied.

Key words: Heisenberg-type group; generalized Picone's identity; Hardy-type inequality; Sturmian comparison principle; Liouville-type theorem

责任编辑　廖　坤