DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.03.012

一类具有饱和发生率的虫媒传染病模型研究

张晋珠[1]，　梁　娟[2]，　苏铁熊[3]

1. 太原工业学院 经济与管理系，太原 030008；2. 太原工业学院 理学系，太原 030008；
3. 中北大学 机电工程学院，太原 030051

摘要：考虑虫媒传染病具有潜伏期的特征，研究了一类具有饱和发生率的时滞传染病模型的动力学行为，确定了疾病是否流行的阈值 R_0. 当 $R_0 < 1$ 时，无病平衡点全局渐近稳定，疾病将最终灭绝；当 $R_0 > 1$ 时，唯一地方病平衡点条件稳定，系统会产生 Hopf 分支.

关　键　词：虫媒传染病模型；饱和发生率；时滞；稳定性；Hopf 分支

中图分类号：O175.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)03-0088-06

虫媒传染病是由病媒生物传播的自然疫源性疾病，宿主种群被节肢动物媒介如蚊、虱等刺叮吸血而感染发病，常见的虫媒传染病有疟疾、登革热等. 这类疾病大多具有潜伏期，例如：恶性疟疾潜伏期为 8～15 d；登革热潜伏期 3～17 d，常见的是 5～7 d[1].

这类传染病分布广、危害大，易引起人畜爆发流行[2]. 目前尚无可靠的疫苗和特效的治疗药物，主要依靠蚊媒控制的办法来预防登革热的传播[3].

1　模型建立

文献[1]首先利用微分方程研究了疟疾在蚊子与人群之间传播的动态行为[4]. 研究结果显示，如果将蚊子的数量减少在临界值以下，疟疾的流行可以得到控制. 随后，虫媒传染病的传播和流行引起了许多数学工作者的兴趣，利用数学模型和方法研究疾病的传播规律已有一些研究成果[5-12].

文献[11]在研究霍乱时，提出了饱和发生率 $\frac{\beta I(t)S(t)}{1+\alpha I(t)}$. 文献[8]建立了具有该种非线性发生率的虫媒传染病模型

$$
\begin{cases}
\dot{S}_H(t)=\mu K-\dfrac{\beta_1 S_H(t)I_v(t)}{1+\alpha_1 I_v(t)}-\mu S_H(t)\\
\dot{I}_H(t)=\dfrac{\beta_1 S_H(t)I_v(t)}{1+\alpha_1 I_v(t)}-(\mu+\gamma)I_H(t)\\
\dot{R}_H(t)=\gamma I_H(t)-\mu R_H(t)\\
\dot{S}_v(t)=\Lambda-\dfrac{\beta_2 I_H(t)S_v(t)}{1+\alpha_2 I_H(t)}-mS_v(t)\\
\dot{I}_v(t)=\dfrac{\beta_2 I_H(t)S_v(t)}{1+\alpha_2 I_H(t)}-m I_v(t)
\end{cases}
$$

收稿日期：2017-11-20
基金项目：山西省自然科学基金项目(2012011002-2)；太原工业学院重点基金项目(2016LZ02).
作者简介：张晋珠(1969-)，女，教授，主要从事动力系统的稳定性研究.

证明了各类平衡点的全局稳定性，其中：$S_H(t)$，$I_H(t)$，$R_H(t)$ 为 t 时刻易感、染病和康复宿主种群的数量；$S_v(t)$，$I_v(t)$ 为 t 时刻易感和染病虫媒种群的数量，β_1，β_2 分别为相应的传染率系数；μK，Λ 分别表示宿主种群和虫媒种群的输入率；μ 为宿主种群的自然死亡率；γ 为宿主种群的移出率；m 为虫媒的自然死亡率.

本文考虑疾病在宿主种群中具有潜伏期的特征，假设易感宿主在 $t-\tau$ 时刻被染病虫媒叮咬后染病且具有传染性，t 时刻成为染病宿主，则易感宿主被染病虫媒叮咬并染病的概率可以表示为 $\dfrac{\beta_1 S_H(t-\tau) I_v(t-\tau)}{1+\alpha_1 I_v(t-\tau)}$. 假设虫媒种群具有常数输入量 M，得到模型：

$$\begin{cases} \dot{S}_H(t)=\mu K-\dfrac{\beta_1 S_H(t-\tau) I_v(t-\tau)}{1+\alpha_1 I_v(t-\tau)}-\mu S_H(t) \\ \dot{I}_H(t)=\dfrac{\beta_1 S_H(t-\tau) I_v(t-\tau)}{1+\alpha_1 I_v(t-\tau)}-(\mu+\gamma)\, I_H(t) \\ \dot{R}_H(t)=\gamma I_H(t)-\mu R_H(t) \\ \dot{S}_v(t)=M-\dfrac{\beta_2 I_H(t) S_v(t)}{1+\alpha_2 I_H(t)}-m S_v(t) \\ \dot{I}_v(t)=\dfrac{\beta_2 I_H(t) S_v(t)}{1+\alpha_2 I_H(t)}-m\, I_v(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中：μ，K，α_1，α_2，β_1，β_2，γ，M，m，τ 均是正数.

根据模型的生物学意义，系统(1) 的初始条件定义为

$$S_H(t)=\phi_1(\theta),\ I_H(t)=\phi_2(\theta),\ R_H(t)=\phi_3(\theta),\ S_v(t)=\phi_4(\theta),\ I_v(t)=\phi_5(\theta)$$
$$\phi_i(\theta)\geqslant 0,\ t\in[-\tau,0],\ \phi_i(0)>0 \qquad i=1,2,3,4,5 \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{W}=(\phi_1(\theta),\phi_2(\theta),\phi_3(\theta),\phi_4(\theta),\phi_5(\theta))\in\mathbb{C}$，$\mathbb{C}$ 是 Bnanch 空间 $\mathbb{C}=\mathbb{C}([-\tau,0],\mathbb{R}_+^5)$ 从 $[-\tau,0]$ 到 $\mathbb{R}_+^5$ 的连续映射，$\mathbb{R}_+^5=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5):x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,5\}$.

记

$$\Omega=\left\{(S_H,I_H,R_H,S_v,I_v)\in\mathbb{R}_+^5:0\leqslant S_H+I_H+R_H\leqslant K,\ 0\leqslant S_v+I_v\leqslant\frac{M}{m}\right\}$$

设

$$V(t)=(V_1(t),V_2(t))=(S_H+I_H+R_H,\ S_v+I_v)$$

则沿系统(1) 对时间 t 的导数

$$\dot{V}(t)=(\dot{V}_1(t),\dot{V}_2(t))=(\mu K-\mu N_H,\ M-mN_v)$$

注意到，当 $V_1\geqslant K$ 时，$\dot{V}_1=\mu K-\mu V_1\leqslant 0$. $V_2\geqslant\dfrac{M}{m}$ 时，$\dot{V}_2=M-mV_2\leqslant 0$，即 Ω 是系统(1) 的正向不变集. 另一方面，由比较原理有 $0\leqslant(V_1,V_2)\leqslant\left(k+V_1(0)\mathrm{e}^{-\mu t},\dfrac{M}{m}+V_2(0)\mathrm{e}^{-mt}\right)$. 当 $t\to\infty$ 时，$0\leqslant V(t)=(V_1,V_2)\leqslant\left(K,\dfrac{M}{m}\right)$.

综上所述，系统(1) 满足初始条件(2) 的解都是正的，最终进入并停留在有界域 Ω 中.

由于宿主种群和虫媒种群的总量为常数，可以将系统(1) 简化为三维系统

$$\begin{cases}\dot{S}_H(t)=\mu K-\dfrac{\beta_1 S_H(t-\tau)I_v(t-\tau)}{1+\alpha_1 I_v(t-\tau)}-\mu S_H(t)\\ \dot{I}_H(t)=\dfrac{\beta_1 S_H(t-\tau)I_v(t-\tau)}{1+\alpha_1 I_v(t-\tau)}-(\mu+\gamma)\ I_H(t)\\ \dot{I}_v(t)=\dfrac{\beta_2 I_H(t)}{1+\alpha_2 I_H(t)}\left(\dfrac{M}{m}-I_v(t)\right)-m\ I_v(t)\end{cases}\tag{3}$$

本文研究系统(3)在可行域Ω中的动力学性态．记

$$R_0=\frac{\beta_1\beta_2\ KM}{(\mu+\gamma)m^2}$$

系统(3)总有无病平衡点$\boldsymbol{E}_1=(K,0,0)$．当$R_0>1$时，系统(3)还存在地方病平衡点$\boldsymbol{E}_2=(S_H{}^*,I_H{}^*,I_v{}^*)$，其中

$$S_H{}^*=\frac{\mu K(1+\alpha_1 I_v^*)}{\mu+(\beta_1+\mu\alpha_1)I_v^*}$$

$$I_H{}^*=\frac{\mu(K-S_H{}^*)}{\mu+\gamma}$$

$$I_v{}^*=\frac{\mu m(\mu+\gamma)(R_0-1)}{m(\mu+\gamma)(\beta_1+\mu\alpha_1)+\beta_1\mu K(\beta_2+m\alpha_2)}$$

2　无病平衡点的全局稳定性

定理1　如果$R_0<1$，系统(3)的无病平衡点$\boldsymbol{E}_1$是渐近稳定的．

证　系统(3)在平衡点$\boldsymbol{E}_1$的线性化系统有一个特征根$-\mu$，其余特征根满足方程

$$f(\lambda)=\lambda^2+\lambda(\mu+\gamma+m)+m(\mu+\gamma)-\beta_1\beta_2 K\frac{M}{m}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0\tag{4}$$

当$\tau=0$时，如果$R_0<1$，无病平衡点$\boldsymbol{E}_1$是稳定的．设$\lambda=\mathrm{i}\omega(\omega>0)$是方程(4)的解，则$\omega$满足

$$\omega^4+\omega^2[(\mu+\gamma)^2+m^2]+m^2(\mu+\gamma)^2(1-R_0^2)=0\tag{5}$$

如果$R_0<1$，方程(5)没有正实根，即方程(4)的特征根均具有负实部．因此，当$R_0<1$时，系统(3)的无病平衡点$\boldsymbol{E}_1$是渐近稳定的．

定理2　如果$R_0<1$，系统(3)的无病平衡点$\boldsymbol{E}_1$全局渐近稳定．

证　定义Lyapunov泛函，

$$V(t)=\int_{t-\tau}^{t}\frac{\beta_1 S_H(\theta)I_v(\theta)}{1+\alpha_1 I_v(\theta)}\mathrm{d}\theta+I_H(t)+\frac{\beta_1 K}{m}I_v(t)$$

则

$$\begin{aligned}\dot{V}\mid_{(3)}(t)=&\frac{\beta_1 S_H(t)I_v(t)}{1+\alpha_1 I_v(t)}-(\mu+\gamma)I_H(t)+\frac{\beta_1 K}{m}\ \frac{\beta_2 I_H(t)}{1+\alpha_2 I_H(t)}\left(\frac{M}{m}-I_v(t)\right)-\beta_1 KI_v(t)\leqslant\\&\beta_1 S_H(t)I_v(t)-(\mu+\gamma)I_H(t)+\frac{\beta_1 K}{m}\beta_2 I_H(t)\left(\frac{M}{m}-I_v(t)\right)-\beta_1\ KI_v(t)\leqslant\\&-(\mu+\gamma)I_H(t)+\frac{\beta_1 K}{m}\ \frac{M}{m}\beta_2 I_H(t)-\frac{\beta_1\ K}{m}\beta_2 I_H(t)I_v(t)=\\&I_H(t)\left[(\mu+\gamma)(R_0-1)-\frac{\beta_1\beta_2 K}{m}I_v(t)\right]\end{aligned}$$

如果$R_0<1$，当且仅当$I_H(t)=0$，有$\dot{V}(t)=0$．因此，系统(3)在$\{(S_H,I_H,I_v)\in\Omega:\dot{V}=0\}$中的最大

不变集为单点集$\{\boldsymbol{E}_1\}$. 根据 Lyapunov-Lasalle 不变集原理[13]，当 $t\to\infty$ 时，$(S_H, I_H, I_v)\to(K, 0, 0)$. 结合定理 1 可知，当 $R_0<1$ 时，系统(3) 的无病平衡点 $\boldsymbol{E}_1$ 是全局渐近稳定的.

3 地方病平衡点的稳定性分析

系统(3) 在平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 处的特征多项式为

$$(\lambda^3+p_2\lambda^2+p_1\lambda+p_0)+(q_2\lambda^2+q_1\lambda+q_0)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0 \tag{6}$$

其中，

$$p_0=\mu(\mu+\gamma)\left(\frac{\beta_2 I_H{}^*}{1+\alpha_2 I_H{}^*}+m\right)$$

$$p_1=\mu(\mu+\gamma)+(2\mu+\gamma)\left(\frac{\beta_2 I_H{}^*}{1+\alpha_2 I_H{}^*}+m\right)$$

$$p_2=(2\mu+\gamma)+\left(\frac{\beta_2 I_H{}^*}{1+\alpha_2 I_H{}^*}+m\right)$$

$$q_0=(\mu+\gamma)\left(\frac{\beta_2 I_H{}^*}{1+\alpha_2 I_H{}^*}+m\right)\frac{\beta_1 I_v{}^*}{1+\alpha_1 I_v{}^*}-\mu\,\frac{\beta_1 S_H{}^*}{(1+\alpha_1 I_v{}^*)^2}\,\frac{\beta_2(Mm^{-1}-I_v{}^*)}{(1+\alpha_2 I_H{}^*)^2}$$

$$q_1=\left[(\mu+\gamma)+\left(\frac{\beta_2 I_H{}^*}{1+\alpha_2 I_H{}^*}+m\right)\right]\frac{\beta_1 I_v{}^*}{1+\alpha_1 I_v{}^*}-\frac{\beta_1 S_H{}^*}{(1+\alpha_1 I_v{}^*)^2}\,\frac{\beta_2(Mm^{-1}-I_v{}^*)}{(1+\alpha_2 I_H{}^*)^2}$$

$$q_2=\frac{\beta_1 I_v{}^*}{1+\alpha_1 I_v{}^*}$$

$\tau=0$ 时，由文献[8] 可知，平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 是全局渐近稳定的. 以下讨论 $\tau>0$ 时，系统(3) 的动力学性态.

设 $\lambda=\mathrm{i}\omega\,(\omega>0)$ 是(6) 式的解，则 ω 满足

$$\begin{aligned} p_2\omega^2-p_0&=(q_0-q_2\omega^2)\cos\omega\tau+q_1\omega\sin\omega\tau\\ \omega^3-p_1\omega&=(q_0-q_2\omega^2)\sin\omega\tau-q_1\omega\cos\omega\tau \end{aligned} \tag{7}$$

$$\omega^6+p\omega^4+q\omega^2+r=0 \tag{8}$$

其中：$p=p_2{}^2-q_2{}^2-2p_1$，$q=p_1{}^2-q_1{}^2-2p_0p_2+2q_0q_2$，$r=p_0{}^2-q_0{}^2$.

令 $z=\omega^2$，则(8) 式可以表示为

$$z^3+pz^2+qz+r=0 \tag{9}$$

记

$$h(z)=z^3+pz^2+qz+r$$

则 $3z^2+2pz+q=0$ 有两个实根 $z_1{}^*=\dfrac{-p+\sqrt{\Delta}}{3}$ 和 $z_2{}^*=\dfrac{-p-\sqrt{\Delta}}{3}$，其中 $\Delta=p^2-3q$.

引理 1 对方程(9)，

(i) 当 $r<0$ 时，方程(9) 至少有一个正根；

(ii) 当 $r\geqslant0$ 且 $\Delta=p^2-3q\leqslant0$ 时，方程(9) 没有正根；

(iii) 当 $r\geqslant0$ 且 $\Delta=p^2-3q\geqslant0$ 时，如果 $z_1{}^*=\dfrac{-p+\sqrt{\Delta}}{3}>0$，使得 $h(z_1{}^*)\leqslant0$，则方程(9) 存在正根.

定理 3 当 $R_0>1$ 时，在(8) 式中，如果 $p\geqslant0$，$q>0$，$r>0$，则系统(3) 的地方病平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 是绝对稳定的. 即对所有 $\tau\geqslant0$，平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 都是渐近稳定的.

证 当 $R_0>1$ 时，若 $r\geqslant0$，$p\geqslant0$，$q>0$，则 $h(0)=r\geqslant0$，并且 $h'(z)=3z^2+2pz+q>0$. 于

是，对所有 $z \geqslant 0$，都有 $h(z) > 0$，即方程(9)无正根. 说明方程(6)的特征根都具有负实部.

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时，在(8)式中如果以下两个条件任意一个满足

1) $r < 0$，

2) $r \geqslant 0$，$q < 0$ 且存在 $z_* = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$，使得 $h(z_*) \leqslant 0$，

则系统(3)的地方病平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 是条件稳定的. 即存在临界时滞 $\tau_0 > 0$，当 $\tau < \tau_0$ 时，平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 是渐近稳定的；当 $\tau > \tau_0$ 时，平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 是不稳定的；当 $\tau = \tau_0$ 时，系统(3)在 $\boldsymbol{E}_2$ 附近产生 Hopf 分支，其中

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{(\omega_0{}^3 - \omega_0 p_1)\omega_0 q_1 - (-p_2\omega_0{}^2 + p_0)(-q_2\omega_0{}^2 + q_0)}{(\omega_0 q_1)^2 + (-q_2\omega_0{}^2 + q_0)^2} \tag{10}$$

证 1) 当 $r < 0$ 时，注意到 $h(0) < 0$ 且 $\lim\limits_{t \to \infty} h(z) = +\infty$，方程(9)至少有一个正根，即方程(8)至少有一个正根.

2) 当 $r \geqslant 0$，$q < 0$，如果存在 $z_* = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$，使得 $h(z_*) \leqslant 0$，由文献[12]可知，方程(9)有正根，即方程(8)至少有一个正根.

如果方程(9)存在正根 z_0，则方程(8)至少存在正根 $\omega_0 = \sqrt{z_0}$，即特征方程(6)存在纯虚根 $\pm \mathrm{i}\omega_0$，由(7)式计算得到

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{(\omega_0{}^3 - \omega_0 p_1)\omega_0 q_1 - (-p_2\omega_0{}^2 + p_0)(-q_2\omega_0{}^2 + q_0)}{(\omega_0 q_1)^2 + (-q_2\omega_0{}^2 + q_0)^2} + \frac{2k\pi}{\omega_0} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

并且可以证明穿越条件 $\left.\dfrac{\mathrm{dRe}(\lambda(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda = \mathrm{i}\omega_0} > 0$ 成立.

综上所述，当 $R_0 > 1$ 时，如果条件 1) 或条件 2) 成立，则系统(3)的地方病平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 是条件稳定的，即存在临界时滞 τ_0，当 $\tau > \tau_0$ 时，系统(3)在平衡点 $\boldsymbol{E}_2$ 附近产生 Hopf 分支.

研究结果显示，系统(3)的动力学性态由阈值 R_0 和潜伏期时滞 τ 决定，时滞的引入使系统(3)的动力学性态与文献[8]中不考虑时滞(即 $\tau = 0$)的情形有本质的差异.

参考文献：

[1] 秦晓萍，王文军，秦红丽. 主要虫媒传染病的流行现状 [J]. 畜牧兽医科技信息，2003(7)：22-25.

[2] 国家质量监督检验检疫总局. 多国登革热疫情 [EB/OL]. (2017-4-3) [2017-11-20]. http://www.aqsiq.gov.cn/xxgk_3386/zxxxgk/201804/t20180403_515212.htm.

[3] 方美玉，林立辉，刘建伟. 我国虫媒传染病的流行病学及其预防 [C] //第九届全军流行病学、第八届全军防生物危害医学专业学术会议论文集. 北京：军事医学科学出版社，2007：315-320.

[4] ROSS R. The Prevention of Malaria [M]. London：Marray，1911.

[5] CRUZ-PAEHEEO G，ESTEVA L，MONTAFIO-HIROSE J A，et al. Modeling the Dynamics of West Nile Virus [J]. Bulletin of Mathematical Biology，2005，67(6)：1157-1172.

[6] BOWMAN C，GUMEL A B，VAN DEN DRISSCHE P，et al. A Mathematical Modelfor Assessing Control Strategies Against West Nile Virus [J]. Bulletin of Mathematical Biology，2005，67(5)：1107-1133.

[7] CAI Li-ming，LI Xue-zhi，LI Zhao-qiang. Dynamical Behavior of an Epidemic Modelfor a Vector-Borne Disease with Direct Transmission [J]. Chaos Solitons Fractals，2013，46(1)：54-64.

[8] CAI Li-ming，LI Xue-zhi. Global Analysis of a Vector-Host Epidemic Model with Nonlinear Incidences [J]. Applied Mathematics and Computation，2010，217(7)：3531-3541.

[9] COOKE K. Stability Analysis for a Vector Disease Model [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics，1979，9(1)：31-42.

[10] WEI Hui-ming，LI Xue-zhi，MARTEHEVA M. An Epidemic Model of a Vector-Borne Disease with Direct Transmission and Time Delay [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2008，342(2)：895-908.

[11] CAPSSO V，SERIO G. A Generalization of the Kermack-Mc Kendrick Deterministic Epidemic Model [J]. Mathematical Biosciences，1978，42(1)：43-61.

[12] SONG Yong-li，YUAN San-ling. Bifurcation Analysis in a Predator-Prey System with Time Delay [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications，2006，7(2)：265-284.

[13] KUANG Yang. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics [M]. Salt Lake：American Academic Press，1993.

Dynamics Analysis of a Vector-Borne Disease Model with Saturation Incidence Rate

ZHANG Jin-zhu[1]，　LIANG　Juan[2]，　SU Tie-xiong[3]

1. Department of Economics and Management，Taiyuan Institute of Technology，Taiyuan 030008，China；

2. Department of Mathematics，Taiyuan Institute of Technology，Taiyuan 030008，China；

3. School of Mechatronics Engineering，North University of China，Taiyuan 030051，China

Abstract：Taking into consideration the fact that insect-borne infectious diseases have a latent period，we study in this paper the dynamic behavior for a delayed vector-borne disease model with saturation infection rate. The threshold value R_0，which determines whether the disease dies out，is found. If $R_0<1$，the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable and the disease always dies out. If $R_0>1$，a unique endemic equilibrium is conditionally stable. The conditions for Hopf bifurcation to occur are derived.

Key words：vector-borne disease model；saturation incidence rate；time delay；stability；Hopf bifurcation

责任编辑　张　栒