DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.03.015

一类带空间记忆的分数阶热方程的快速能稳性

邓虹燕[1,2], 刘星岚[1], 周中成[1]

1. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 南部中学, 四川 南部 637300

摘要: 研究了一类带空间记忆的分数阶热方程的边界控制问题. 通过建立恰当的过渡系统避开了直接做 backstepping 变换时核方程求解的难点; 同时证明了两次 backstepping 变换的可逆性, 并由此得到了闭环系统的任意快速 L^2 Mittag-Leffler 稳定性.

关 键 词: 分数阶热方程; Caputo 分数阶; 边界控制; Mittag-Leffler 稳定性

中图分类号: O231.4 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2020)03-0107-05

分数阶微积分是整数阶微积分的自然推广. 分数阶扩散方程的研究与应用已被广泛重视. 在控制工程中, 经典的反应扩散方程的边界控制已有很多研究[1-3], 但分数阶反应扩散方程[4]的控制研究还很少[5]. 受文献[5-6]的启发, 本文考虑如下带空间记忆的分数阶热方程的边界控制问题

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \int_0^1 g(y)u(y,t)\mathrm{d}y & x \in (0,1),\ t \in (0,+\infty) \\ u_x(0,t)=0,\ u(1,t)=U(t),\ u(x,0)=u_0(x) & x \in (0,1),\ t \in (0,+\infty) \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\alpha \in (0,1]$, $u(\cdot,\cdot)$ 表示系统的状态, $U(\cdot)$ 是边界控制, $g(\cdot)$ 是一个正的连续函数, ${}_0^C D_t^\alpha u(x,t)$ 和 ${}_0 I_t^\beta u(x,t)$ 分别表示 Caputo 时间分数阶导数和 Riemann-Liouville 时间分数阶积分[7], 即

$${}_0 I_t^\beta u(x,t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\xi)^{\beta-1} u(x,\xi)\mathrm{d}\xi,\ \beta > 0$$

$${}_0^C D_t^\alpha u(x,t) := {}_0 I_t^{n-\alpha} \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n},\ n-1 < \alpha \leqslant n$$

本文采用反推控制(backstepping)方法来研究系统(1)的快速能稳性. 首先给出一个 L^2 Mittag-Leffler 稳定[8]的目标系统, 然后利用一类 Fredholm 和 Volterra 积分变换将原系统转化为目标系统, 但其核方程难于求解. 为了简化核方程的求解, 本文通过一个恰当的过渡系统, 先将原系统变到过渡系统, 再从过渡系统变到目标系统. 最后用 Lypunov 方法证明闭环系统是任意 L^2 Mittag-Leffler 稳定的.

1 控制器设计

为了得到系统(1)的任意快速能稳性, 我们需要选取一个恰当的变换, 将系统(1)转化为 L^2 Mittag-Leffler 稳定的目标系统, 从而得到控制律, 这样, 闭环系统的稳定性就可以通过该变换及其逆变换建立起来. 为此考虑如下变换

$$w(x,t) = u(x,t) - \int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y - \int_0^1 r(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y \tag{2}$$

收稿日期: 2017-12-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11671326, 11301472).

作者简介: 邓虹燕(1993-), 女, 硕士研究生, 主要从事分布参数系统控制的研究.

通信作者: 周中成, 博士, 教授.

其中 $k(x, y)$，$r(x, y)$ 为待定的核函数.

选取目标系统

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha w(x, t) = w_{xx}(x, t) - cw(x, t) & x \in (0, 1), t \in (0, +\infty) \\ w_x(0, t) = 0, w(1, t) = 0, w(x, 0) = w_0(x) & x \in (0, 1), t \in (0, +\infty) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $c > 0$ 为任意的常数.

设系统(1)在变换(2)下变为目标系统(3)，对变换(2)两边同时对 t 求 α 阶导数，再对 x 求二阶偏导数化简并结合(3)式可得

$$\begin{aligned} & {}_0^C D_t^\alpha w(x, t) - w_{xx}(x, t) + cw(x, t) = \\ & \int_0^x (k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - ck(x, y))u(y, t)\mathrm{d}y + 2k'(x, x)u(x, t) + \\ & cu(x, t) + \int_0^1 (r_{xx}(x, y) - r_{yy}(x, y) - cr(x, y))u(y, t)\mathrm{d}y + \\ & \int_0^1 g(y)(1 - \int_0^x k(x, z)\mathrm{d}z - \int_0^1 r(x, z)\mathrm{d}z)u(y, t)\mathrm{d}y + \\ & (k_y(x, 0) + r_y(x, 0))u(0, t) - r(x, 1)u_x(1, t) + r_y(x, 1)u(1, t) = 0 \end{aligned}$$

其中

$$k_x(x, x) = \left.\frac{\partial k(x, y)}{\partial x}\right|_{y=x} \qquad k_y(x, x) = \left.\frac{\partial k(x, y)}{\partial y}\right|_{y=x} \qquad k'(x, x) = k_x(x, x) + k_y(x, x)$$

从而选取核函数满足

$$\begin{cases} k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) - ck(x, y) = 0, 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ 2k'(x, x) + c = 0, k_y(x, 0) + r_y(x, 0) = 0, r_y(x, 1) = 0, r(x, 1) = 0 \\ r_{xx}(x, y) - r_{yy}(x, y) - cr(x, y) + g(y)(1 - \int_0^x k(x, z)\mathrm{d}z - \int_0^1 r(x, z)\mathrm{d}z) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

方程组(4)的求解困难主要原因在于该方程组是定义在三角区域上带积分的非常规耦合方程组. 当 $c = 0$ 时，方程组(4)可通过 $k(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ 表示出来，而后再对 $r(x, y)$ 采用分离变量法证明其解的存在唯一性[6]. 而当 $c \neq 0$ 时，此求解过程不再有效. 为此，引入如下过渡系统

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha z(x, t) = z_{xx}(x, t) & x \in (0, 1), t \in (0, +\infty) \\ z_x(0, t) = 0, z(1, t) = U_1(t), z(x, 0) = z_0(x) & x \in (0, 1), t \in (0, +\infty) \end{cases} \tag{5}$$

来降低核方程的求解难度，接下来我们通过两步将原系统(1)转化到目标系统(3).

1) 用如下变换将系统(1)转化为系统(5).

$$z(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t)\mathrm{d}y - \int_0^1 r(x, y)u(y, t)\mathrm{d}y \tag{6}$$

通过类似的计算得到相应核函数满足

$$\begin{cases} k_{xx}(x, y) - k_{yy}(x, y) = 0, 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ k'(x, x) = 0, k_y(x, 0) + r_y(x, 0) = 0, r_y(x, 1) = 0, r(x, 1) = 0 \\ r_{xx}(x, y) - r_{yy}(x, y) + g(y)(1 - \int_0^x k(x, z)\mathrm{d}z - \int_0^1 r(x, z)\mathrm{d}z) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

由文献[6]可知方程(7)解为

$$r(x, y) = \frac{b}{2a}\cosh(ax)(\mathrm{e}^{-ay}\int_y^1 g(z)\mathrm{e}^{az}\mathrm{d}z - \mathrm{e}^{ay}\int_y^1 g(z)\mathrm{e}^{-az}\mathrm{d}z)$$

$$k(x, y) = -\frac{b}{a}\sinh(a(x - y))\int_0^1 g(z)\cosh(az)\mathrm{d}z$$

其中

$$a^2 = \int_0^1 g(z)\mathrm{d}z, b = a^2(\int_0^1 g(z)\cosh(az)\mathrm{d}z)^{-1}$$

从而控制

$$U(t)=U_1(t)+\int_0^1 k(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 r(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y$$

2）将过渡系统(5)转化为目标系统(3)，为此引入另一个变换

$$w(x,t)=z(x,t)-\int_0^x l(x,y)z(y,t)\mathrm{d}y \tag{8}$$

可以得到核函数 $l(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} l_{xx}(x,y)-l_{yy}(x,y)-cl(x,y)=0 & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1 \\ 2l'(x,x)+c=0,\ l_y(x,0)=0 & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases} \tag{9}$$

从而

$$l(x,y)=-cx\frac{I_1(\sqrt{c(x^2-y^2)})}{\sqrt{c(x^2-y^2)}}$$

其中 $I_1(\cdot)$ 是修正的 Bessel 函数. 再根据 $w(1,t)=0$ 得到控制为

$$U_1(t)=\int_0^1 l(1,y)z(y,t)\mathrm{d}y$$

故

$$U(t)=\int_0^1 l(1,y)z(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 k(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 r(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y \tag{10}$$

2　闭环系统的稳定性

2.1　逆变换

为了证明闭环系统(1)在控制(10)下是稳定的，需要证明目标系统(3)是稳定的，而且变换(6)和(8)是可逆的. 设变换(8)的逆变换形式为

$$z(x,t)=w(x,t)+\int_0^x h(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y \tag{11}$$

其中 $h(x,y)$ 为待定核函数，并且该变换将目标系统转换到过渡系统. 类似 $l(x,y)$ 求解的思路和方法可得

$$h(x,y)=-cx\frac{J_1(\sqrt{c(x^2-y^2)})}{\sqrt{c(x^2-y^2)}}$$

其中 $J_1(\cdot)$ 是修正的 Bessel 函数. 设变换(6)的逆变换形式为

$$u(x,t)=z(x,t)+\int_0^x \lambda(x,y)z(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 q(x,y)z(y,t)\mathrm{d}y$$

其中 $\lambda(x,y)$,$q(x,y)$ 为待定的核函数，该变换将过渡系统(5)变为原系统(1)，由文献[6]可知核函数的解为

$$\lambda(x,y)=\frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{-ay}\int_y^1\left(g(z)-a^2\int_z^1 g(\eta)(\eta-z)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{e}^{az}\mathrm{d}z-\right.$$
$$\left.\mathrm{e}^{ay}\int_y^1\left(g(z)-a^2\int_z^1 g(\eta)(\eta-z)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{e}^{-az}\mathrm{d}z\right)$$
$$q(x,y)=-a^2(x-y)$$

2.2　闭环系统的稳定性

在证明闭环系统稳定性之前，我们先引入下面的引理.

引理[9]　设 $x(\cdot)$ 是 $[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 上的连续函数，则对任意 $t>0$，有

$$\frac{1}{2}{}_0^C D_t^\alpha x^2(t)\leqslant x(t){}_0^C D_t^\alpha x(t)\qquad \alpha\in(0,1] \tag{12}$$

定理 1　对任意 $c>0$，$u_0\in L^2(0,1)$，闭环系统(1)在控制(10)下是任意 L^2 Mittag-Leffler 稳定的.

即存在 $M>0$，使得

$$\| u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant M \| u_0(\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} E_\alpha(-2ct^\alpha)$$

其中

$$\| u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 u^2(x,t)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_\alpha(t):=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{\Gamma(\alpha i+1)} \qquad t\in\mathbb{R}^+$$

$E_\alpha(t)$ 是单参数 Mittag-Leffler 函数，它是指数函数的自然推广.

证 易知，变换(6) 和(8) 定义了一个从 $L^2(0,1)\longrightarrow L^2(0,1)$ 的有界线性算子，即

$$z(x,t)=(Ku)(x):=u(x,t)-\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^1 r(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y$$

$$w(x,t)=(K_1 z)(x):=z(x,t)-\int_0^x l(x,y)z(y,t)\mathrm{d}y$$

又因为 $h(x,y)$，$\lambda(x,y)$，$q(x,y)$ 都是$[0,1]$上的有界函数，所以 K^{-1}，K_1^{-1} 也是 $L^2(0,1)\longrightarrow L^2(0,1)$ 上的有界线性算子，故存在 $m>0$ 使得

$$\begin{gathered}\| u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \leqslant m\| w(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)} \\ \| w_0(\cdot)\|_{L^2(0,1)} \leqslant m\| u_0(\cdot)\|_{L^2(0,1)}\end{gathered} \tag{13}$$

对目标系统(3)，考虑 Lyapunov 函数

$$W(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\mathrm{d}x \tag{14}$$

对(14) 式关于时间 t 求 α 阶导数，结合(12) 式有

$${}_0^C D_t^\alpha W(t)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 w(x,t){}_0^C D_t^\alpha w(x,t)\mathrm{d}x=-\int_0^1 w_x{}^2(x,t)\mathrm{d}x-c\int_0^1 w^2(x,t)\mathrm{d}x$$

再结合 Poincaré 不等式，可得

$${}_0^C D_t^\alpha W(t)\leqslant -c_1\int_0^1 w^2(x,t)\mathrm{d}x-c\int_0^1 w^2(x,t)\mathrm{d}x=-2(c_1+c)W(t)$$

其中 c_1 是 Poincaré 常数. 记

$$M(t):=-2(c_1+c)W(t)-{}_0^C D_t^\alpha W(t) \tag{15}$$

则 $M(t)$ 是$[0,\infty)$ 上的非负函数. 对(15) 式两边作 Laplace 变换，有

$$\hat{M}(s)=-2(c_1+c)\hat{W}(s)-s^\alpha\hat{W}(s)+s^{\alpha-1}W(0)$$

其中：$W(0)=\frac{1}{2}\int_0^1 w_0^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\| w_0(\cdot)\|^2_{L^2(0,1)}$；$\hat{M}(s)$，$\hat{W}(s)$ 分别表示其对应的 Laplace 变换. 因而

$$\hat{W}(s)=\frac{s^{\alpha-1}W(0)-\hat{M}(s)}{s^\alpha+2(c_1+c)} \tag{16}$$

再对(16) 式作逆 Laplace 变换[10] 得到(15) 式的解为

$$W(t)=E_\alpha(-2(c_1+c)t^\alpha)W(0)-M(t)*[t^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-2(c_1+c)t^\alpha)] \qquad t>0$$

其中 * 表示卷积，即

$$M(t)*[t^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-2(c_1+c)t^\alpha)]=\int_0^t M(u)(t-u)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-2(c_1+c)(t-u)^\alpha)\mathrm{d}u\geqslant 0$$

由此可得

$$W(t)\leqslant E_\alpha(-2(c_1+c)t^\alpha)W(0) \qquad t>0$$

故

$$\| w(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant \| w_0(\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} E_\alpha(-2(c_1+c)t^\alpha) \qquad t>0$$

再结合(13) 式，并记 $M:=m^2$，有

$$\| u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}\leqslant M\| u_0(\cdot)\|^2_{L^2(0,1)} E_\alpha(-2ct^\alpha) \qquad t>0$$

从而闭环系统(1) 在控制(10) 下是任意 L^2 Mittag-Leffler 稳定的.

参考文献：

[1] 任采璇. 时间分数阶扩散方程反问题的稳定性及反演 [D]. 上海：复旦大学，2013.

[2] KRSTIC M，SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs：A Course on Backstepping Design [M]. Philadelphia：SIAM，2008：1-200.

[3] 甄志远，谢成康，何翠华. N 个耦合反应扩散方程的边界控制 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(3)：75-80.

[4] 马亮亮. 一种 Caputo 分数阶反应-扩散方程初边值问题的隐式差分格式 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2013，31(2)：58-61.

[5] GE F D，CHEN Y Q，KOU C H. Boundary Feedback Stabilisation for the Time Fractional-Order Anomalous Diffusion System [J]. IET Control Theory and Applications，2016，10(11)：1250-1257.

[6] GUO C，XIE C . Stabilization of Spatially Non-Causal Reaction-Diffusion Equation [C] // 24th Control and Decision Conference (CCDC). New York：IEEE Computer Society Press，2012.

[7] 吴　强，黄建华. 分数阶微积分 [M]. 北京：清华大学出版社，2016：1-87.

[8] LI Y，CHEN Y Q，PODLUBNY I. Technical Communique：Mittag-Leffler Stability of Fractional-Order Nonlinear Dynamic Systems [J]. Automatica，2009，45(8)：1965-1969.

[9] AGUILA C N，DUARTE M A，GALLEGOSALL J A. Lyapunov Functions for Fractional-Order Systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2014，19(9)：2951-2957.

[10] CRUZ V-D-L. Volterra-Type Lyapunov Functions for Fractional-Order Epidemic Systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2015，24(1-3)：75-85.

Rapid Stabilization of a Fractional-Order Heat Equation with Spatial Memory

DENG Hong-yan[1,2]，　LIU Xing-lan[1]，　ZHOU Zhong-cheng[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University ，Chongqing 400715，China；

2. Nanbu High School of Sichuan Province，Nanbu，Sichuan 637300，China

Abstract：This paper considers the boundary control problem for a fractional-order heat equation with spatial memory. Via constructing an appropriate transition system，we obtain the existence of kernels and avoid the difficulty in solving the kernels in direct backstepping transformation. Meanwhile，we prove the invertibility of two-step backstepping transformation and obtain the rapid L^2 Mittag-Leffler stability of closed-loop systems.

Key words：fractional-order heat equation；Caputo fractional-order；boundary control；Mittag-Leffler stability

责任编辑　张　枸