DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.04.008

数论函数方程 $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ 的可解性

张四保

喀什大学 数学与统计学院,新疆 喀什 844008

摘要: 讨论数论函数方程 $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ 的可解性,其中 $k=15,17$,$\varphi_2(n)$ 为广义 Euler 函数,$S(n)$ 为 Smarandache 函数,$SL(n)$ 为 Smarandache LCM 函数. 基于广义欧拉函数 $\varphi_2(n)$、Smarandache 函数 $S(n)$ 与 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 这 3 个函数的性质,利用初等方法给出了这 2 个数论函数方程的一切正整数解.

关　键　词: 广义欧拉函数;Smarandache 函数;Smarandache LCM 函数;方程可解性

中图分类号:O156　　**文献标志码:A**　　**文章编号:** 1673-9868(2020)04-0065-05

令 $\varphi_e(n)$ 为广义 Euler 函数,它的值等于序列 $1,2,3,\cdots,\left[\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right]$ 中与 n 互素的数的个数. 关于函数 $\varphi_e(n)$ 有不少的研究成果(如文献[1-3]). 令 $S(n)$ 为 Smarandache 函数,它的值定义为

$$S(n)=\min\{m: m\in\mathbb{Z}_+,\ n\mid m!\}$$

其中 $\mathbb{Z}_+$ 为正整数集合. 关于函数 $S(n)$ 有不少的研究内容(如文献[4-5]). 令 $SL(n)$ 为 Smarandache LCM 函数,它是由函数 $S(n)$ 所派生出来的,它的值定义为 $SL(n)=\min\{k\in\mathbb{Z}_+: n\mid[1,2,\cdots,k]\}$. 对函数 $SL(n)$ 同样也有着不少研究内容(如文献[6-7]). 近些年来,对有关广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$、Smarandache 函数 $S(n)$ 与 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 三者混合的数论函数方程

$$\varphi_2(n)=S(SL(n^k)) \tag{1}$$

的可解性问题有着不少的研究成果. 文献[8]讨论了方程(1)中当 $k=1$ 时方程的可解性;文献[9]讨论了方程(1)中当 $k=2$ 时方程的可解性;文献[10]讨论了方程(1)中当 $k=3,4$ 时方程的可解性;文献[11]讨论了方程(1)中当 $k=5,6$ 时方程的可解性;文献[12]讨论了方程(1)中当 $k=9,10$ 时方程的可解性;文献[13]讨论了方程(1)中当 $k=11,12$ 时方程的可解性. 本文将讨论方程(1)中当 $k=15,17$ 时方程的可解性,利用初等的方法确定其正整数解的情况.

引理 1[14]　当 $n\geqslant 3$ 时,有 $\varphi_2(n)=2^{-1}\varphi(n)$.

引理 2[15]　如果 $n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_k^{\beta_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则

$$S(n)=\max\left\{S(q_1^{\beta_1}),\ S(q_2^{\beta_2}),\ \cdots,\ S(q_k^{\beta_k})\right\}$$

$$SL(n)=\max\left\{q_1^{\beta_1},\ q_2^{\beta_2},\ \cdots,\ q_k^{\beta_k}\right\}$$

引理 3[16]　对于素数 p 和正整数 k,有 $S(p^k)\leqslant kp$;特别地,当 $k<p$ 时,有 $S(p^k)=kp$.

引理 4[17]　当 $n>2$ 时,必有 $2\mid\varphi(n)$.

定理 1　数论函数方程

$$\varphi_2(n)=S(SL(n^{15})) \tag{2}$$

收稿日期:2019-02-01
基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2017D01A13).
作者简介:张四保(1978-),男,教授,主要从事数论的研究.

有正整数解 $n=280,352,448,576,625,1\ 250,3\ 721,7\ 742$.

证 显然 $n=1,2$ 不是方程(2)的正整数解. 此时可设 $n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_k^{\beta_k}\geqslant 3$ 是正整数 n 的标准分解式,由引理2有

$$SL(n^{15})=\max\left\{q_1^{15\beta_1},\ q_2^{15\beta_2},\ \cdots,\ q_k^{15\beta_k}\right\}=q^{15\beta} \tag{3}$$

其中 q 是 n 的素因子,且 β 是 q 在 n 的标准分解式中的指数. 根据引理1有

$$\varphi_2(n)=\frac{1}{2}\varphi(n)=\frac{1}{2}\varphi(q^{\beta})\varphi\left(\frac{n}{q^{\beta}}\right)=\frac{1}{2}q^{\beta-1}(q-1)\varphi(m)$$

其中 $n=q^{\beta}m$,且 $(q,m)=1$. 再由方程(2)有

$$q^{\beta-1}(q-1)\varphi(m)=2S(q^{15\beta}) \tag{4}$$

由引理3,有

$$30q\beta\geqslant 2S(q^{15\beta})=q^{\beta-1}(q-1)\varphi(m)\geqslant q^{\beta-1}(q-1)$$

即

$$30\beta\geqslant q^{\beta-2}(q-1) \tag{5}$$

情况1 当 $\beta=1$ 时,(4)式为 $(q-1)\varphi(m)=2S(q^{15})$. 若 $q=2$,则有 $\varphi(m)=2S(2^{15})=2\times 16=32$,因此 $m=51,64,68,80,96,102,120$. 由于 $(q,m)=1$,则 $m=51$,则 $n=2m=102$,但这 n 值均不满足(3)式,则此时方程(2)无解. 若 $q=3$,则有 $2\varphi(m)=2S(3^{15})=2\times 33$,则 $\varphi(m)=33$,由引理4可知此时方程(2)无解. 经计算可得,当 $q=5,7,11,13$ 时有 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$,则此时方程(2)无解. 若 $q\geqslant 17$,则有 $(q-1)\varphi(m)=30q$,则 $(q-1)\mid 30$,由于 q 为素数,从而 $q=31$,则 $\varphi(m)=31$,由引理4可知此时方程(2)无解.

情况2 当 $\beta=2$ 时,(4)式为 $q(q-1)\varphi(m)=2S(q^{30})$. 若 $q=2$,则有 $2\varphi(m)=2S(2^{30})=2\times 32$,因此 $\varphi(m)=32$,有 $m=51,64,68,80,96,102,120$. 由于 $(q,m)=1$,则 $m=51$,则 $n=2^2\times m=102$,此时 n 值均不满足(3)式,则此时方程(2)无解. 若 $q=3$,则有 $6\varphi(m)=2S(3^{30})=2\times 63$,因此 $\varphi(m)=21$,由引理4可知此时方程(2)无解. 经计算可得,当 $q=5,11,13,17,19,23,29$ 时有 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$,则此时方程(2)无解. 而当 $q=7$ 时,有 $42\varphi(m)=2S(7^{30})=2\times 189$,因此 $\varphi(m)=9$,由引理4可知此时方程(2)无解. 若 $q\geqslant 31$,则有 $60q=2S(q^{30})=q(q-1)\varphi(m)$,即有 $60=(q-1)\varphi(m)$,再由于 q 为素数,从而 $q=61$,则 $\varphi(m)=1$,则 $m=1,2$,则 $n=61^2\times m=3\ 721,7\ 742$,这些 n 值均满足(3)式,则此时方程(2)有整数解 $n=3\ 721,7\ 742$.

情况3 当 $\beta=3$ 时,(4)式为 $q^2(q-1)\varphi(m)=2S(q^{45})$,且(5)式为 $90\geqslant q(q-1)$,从而 $q=2,3,5,7$. 若 $q=2$,则有 $4\varphi(m)=2S(2^{45})=2\times 48$,因此 $\varphi(m)=24$,则 $m=35,39,45,52,56,70,72,78,84,90$. 由于 $(q,m)=1$,则 $m=35,39,45$,因此 $n=2^3\times m=280,312,360$,此时 n 值 $n=280$ 满足(3)式,则此时方程(2)有正整数解 $n=280$. 经计算可得,当 $q=3,5,7$ 时有 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$,则此时方程(2)无解.

情况4 当 $\beta=4$ 时,(4)式为 $q^3(q-1)\varphi(m)=2S(q^{60})$,且(5)式为 $120\geqslant q^2(q-1)$,从而 $q=2,3,5$. 若 $q=2$,则有 $8\varphi(m)=2S(2^{60})=2\times 64$,因此 $\varphi(m)=16$,则 $m=17,32,34,40,48,60$. 由于 $(q,m)=1$,则 $m=17$,因此 $n=2^4\times 17=272$,此时 n 值不满足(3)式,则此时方程(2)无解. 若 $q=3$,则有 $54\varphi(m)=2S(3^{60})=2\times 126$,此时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$,则此时方程(2)无解. 若 $q=5$,则有 $500\varphi(m)=2S(5^{60})=2\times 250$,因此 $\varphi(m)=1$,则 $m=1,2$,则 $n=625,1\ 250$,但这些 n 值均满足(3)式,则此时方程(2)有正整数解 $n=625,1\ 250$.

情况5 当 $\beta=5$ 时,(4)式为 $q^4(q-1)\varphi(m)=2S(q^{75})$,且(5)式为 $150\geqslant q^3(q-1)$,从而 $q=2,3$. 若 $q=2$,则有 $16\varphi(m)=2S(2^{75})=2\times 80$,因此 $\varphi(m)=10$,则 $m=11,22$,由于 $(q,m)=1$,则 $m=11$,则 $n=2^5\times 11=352$,此时 n 值满足(3)式,则此时方程(2)有正整数解 $n=352$. 若 $q=3$,则有 $162\varphi(m)=2S(3^{75})=2\times 156$,此时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$,则此时方程(2)无解.

情况6 当 $\beta=6$ 时,(4)式为 $q^5(q-1)\varphi(m)=2S(q^{90})$,且(5)式为 $180\geqslant q^4(q-1)$,从而 $q=2,3$. 若 $q=2$,则有 $32\varphi(m)=2S(2^{90})=2\times 96$,因此 $\varphi(m)=6$,则 $m=7,9,14,18$. 由于 $(q,m)=1$,则 $m=$

7,9，因此 $n=448,576$，此时 n 值满足(3) 式，则此时方程(2) 有正整数解 $n=448,576$. 若 $q=3$，则有 $486\varphi(m)=2S(3^{90})=2\times 186$，此时 $\varphi(m)\notin \mathbb{Z}_+$，则此时方程(2) 无解.

情况 7　当 $\beta=7$ 时，(4) 式为 $q^6(q-1)\varphi(m)=2S(q^{105})$，且(5) 式为 $210\geqslant q^5(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $64\varphi(m)=2S(2^{105})=2\times 110$，此时 $\varphi(m)\notin \mathbb{Z}_+$，则此时方程(2) 无解.

情况 8　当 $\beta=8$ 时，(4) 式为 $q^7(q-1)\varphi(m)=2S(q^{120})$，且(5) 式为 $240\geqslant q^6(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $128\varphi(m)=2S(2^{120})=2\times 126$，此时 $\varphi(m)\notin \mathbb{Z}_+$，则此时方程(2) 无解.

情况 9　当 $\beta=9$ 时，(4) 式为 $q^8(q-1)\varphi(m)=2S(q^{135})$，且(5) 式为 $270\geqslant q^7(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $256\varphi(m)=2S(2^{135})=2\times 138$，此时 $\varphi(m)\notin \mathbb{Z}_+$，则此时方程(2) 无解.

情况 10　当 $\beta=10$ 时，(4) 式为 $q^9(q-1)\varphi(m)=2S(q^{150})$，且(5) 式为 $300\geqslant q^8(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $512\varphi(m)=2S(2^{150})=2\times 154$，此时 $\varphi(m)\notin \mathbb{Z}_+$，则此时方程(2) 无解.

情况 11　当 $\beta\geqslant 11$ 时，有 $2^{\beta-2}>30\beta$，则 $30q\beta\geqslant q^{\beta-1}(q-1)$ 不成立，则此时方程(2) 无解.

结合以上推理可得，数论函数方程(2) 只有正整数解 $n=280,352,448,576,625,1\,250,3\,721,7\,742$. 定理 1 证毕.

定理 2　数论函数方程

$$\varphi_2(n)=S(SL(n^{17}))\tag{6}$$

有正整数解 $n=315,351,504,539,630,702,756,1\,078$.

证　显然 $n=1,2$ 不是方程(6) 的正整数解. 此时可设 $n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_k^{\beta_k}\geqslant 3$ 是正整数 n 的标准分解式，由引理 2 有

$$SL(n^{17})=\max\left\{q_1^{17\beta_1},\ q_2^{17\beta_2},\ \cdots,\ q_k^{17\beta_k}\right\}=q^{17\beta}\tag{7}$$

其中 q 是 n 的素因子，且 β 是 q 在 n 的标准分解式中的指数. 根据引理 1 有

$$\varphi_2(n)=\frac{1}{2}\varphi(n)=\frac{1}{2}\varphi(q^\beta)\varphi\left(\frac{n}{q^\beta}\right)=\frac{1}{2}q^{\beta-1}(q-1)\varphi(m)$$

其中 $n=q^\beta m$，且 $(q,m)=1$. 再由方程(6) 有

$$q^{\beta-1}(q-1)\varphi(m)=2S(q^{17\beta})\tag{8}$$

由引理 3，有

$$34q\beta\geqslant 2S(q^{17\beta})=q^{\beta-1}(q-1)\varphi(m)\geqslant q^{\beta-1}(q-1)$$

即

$$34\beta\geqslant q^{\beta-2}(q-1)\tag{9}$$

情况 1　当 $\beta=1$ 时，(8) 式为 $(q-1)\varphi(m)=2S(q^{17})$. 若 $q=2$，则有 $\varphi(m)=2S(2^{17})=2\times 20=40$，因此 $m=41,55,75,82,88,100,110,132,150$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=41,55,75$，则 $n=2m=82,110,150$，但这些 n 值均不满足(7) 式，则此时方程(6) 无解. 若 $q=3$，则有 $2\varphi(m)=2S(3^{17})=2\times 36$，因此 $\varphi(m)=36$，则 $m=37,57,63,74,76,108,114,126$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=37,74,76$，因此 $n=3m=111,222,228$，但这些 n 值均不满足(7) 式，则此时方程(6) 无解. 经计算可得，当 $q=5,7,11,13,17$ 时 $\varphi(m)\notin \mathbb{Z}_+$，则此时方程(6) 无解. 若 $q\geqslant 19$，则有 $(q-1)\varphi(m)=34q$，则有 $(q-1)\mid 34$，再由于 q 为素数，则此时方程(6) 无解.

情况 2　当 $\beta=2$ 时，(8) 式为 $q(q-1)\varphi(m)=2S(q^{34})$. 若 $q=2$，则有 $2\varphi(m)=2S(2^{34})=2\times 36$，因此 $\varphi(m)=36$，则 $m=37,57,63,74,76,108,114,126$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=37,57,63$，因此 $n=2^2\times m=148,228,252$. 但这些 n 值均不满足(7) 式，则此时方程(6) 无解. 若 $q=3$，则有 $6\varphi(m)=2S(3^{34})=2\times 72$，因此 $\varphi(m)=24$，则 $m=35,39,45,52,56,70,72,78,84,90$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=35,52,56,70$，则 $n=3^2\times m=315,468,504,630$，这些 n 值中 $n=315,504,630$ 满足(7) 式，则此时方程(6) 有正整数解 $n=315,504,630$. 若 $q=5$，则有 $20\varphi(m)=2S(5^{34})=2\times 140$，则 $\varphi(m)=14$，而 14 为非 Euler 商数，则此时方程(6) 无解. 若 $q=7$，则有 $42\varphi(m)=2S(7^{34})=2\times 210$，则 $\varphi(m)=10$，则 $m=11,22$，进而 $n=7^2\times m=539,1\,078$，这些 n 值均满足(7) 式，则此时方程(6) 有正整数解 $n=539,1\,078$. 经计算可得，

当 $q=11,13,17,19,29,31$ 时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解. 而当 $q=23$ 时，有 $506\varphi(m)=2S(23^{34})=2\times 759$，则 $\varphi(m)=3$，由引理 4 可知此时方程(6)无解. 若 $q\geqslant 37$，则有 $68q=2S(q^{34})=q(q-1)\varphi(m)$，即有 $68=(q-1)\varphi(m)$，再由于 q 为素数，则此时方程(6)无解.

情况 3　当 $\beta=3$ 时，(8)式为 $q^2(q-1)\varphi(m)=2S(q^{51})$，且(9)式为 $102\geqslant q(q-1)$，从此 $q=2,3,5,7$. 若 $q=2$，则有 $4\varphi(m)=2S(2^{51})=2\times 56$，则 $\varphi(m)=28$，则 $m=29,58$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=29$，则 $n=2^3\times 29=232$，此时 n 值不满足(7)式，则此时方程(6)无解. 若 $q=3$，则有 $18\varphi(m)=2S(3^{51})=2\times 108$，则 $\varphi(m)=12$，则 $m=13,21,26,28,36,42$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=13,26,28$，则 $n=3^3\times 13=351$，$n=3^3\times 26=702$，$n=3^3\times 28=756$，这些 n 值均满足(7)式，则此时方程(6)有整数解 $n=351,702,756$. 经计算可得，当 $q=5,7$ 时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 4　当 $\beta=4$ 时，(8)式为 $q^3(q-1)\varphi(m)=2S(q^{68})$，且(9)式为 $136\geqslant q^2(q-1)$，从而 $q=2,3,5$. 若 $q=2$，则有 $8\varphi(m)=2S(2^{68})=2\times 72$，则 $\varphi(m)=18$，则 $m=19,27,38,54$. 由于 $(q,m)=1$，则 $m=19,27$，因此 $n=2^4\times 19=304$，$n=2^4\times 3^3=432$，但这些 n 值均不满足(7)式，则此时方程(6)无解. 经计算可得，当 $q=3,5$ 时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 5　当 $\beta=5$ 时，(8)式为 $q^4(q-1)\varphi(m)=2S(q^{85})$，且(9)式为 $170\geqslant q^3(q-1)$，从而 $q=2,3$. 若 $q=2$，则有 $16\varphi(m)=2S(2^{85})=2\times 88$，则 $\varphi(m)=11$，由引理 4 可知此时方程(6)无解. 若 $q=3$，则有 $162\varphi(m)=2S(3^{85})=2\times 174$，得 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 6　当 $\beta=6$ 时，(8)式为 $q^5(q-1)\varphi(m)=2S(q^{102})$，且(9)式为 $204\geqslant q^4(q-1)$，从而 $q=2,3$. 经计算可得，当 $q=2,3$ 时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 7　当 $\beta=7$ 时，(8)式为 $q^6(q-1)\varphi(m)=2S(q^{119})$，且(9)式为 $238\geqslant q^5(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $64\varphi(m)=2S(2^{119})=2\times 124$，此时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 8　当 $\beta=8$ 时，(8)式为 $q^7(q-1)\varphi(m)=2S(q^{136})$，且(9)式为 $272\geqslant q^6(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $128\varphi(m)=2S(2^{136})=2\times 140$，此时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 9　当 $\beta=9$ 时，(8)式为 $q^8(q-1)\varphi(m)=2S(q^{153})$，且(9)式为 $306\geqslant q^7(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $256\varphi(m)=2S(2^{153})=2\times 158$，此时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 10　当 $\beta=10$ 时，(8)式为 $q^9(q-1)\varphi(m)=2S(q^{170})$，且(9)式为 $340\geqslant q^8(q-1)$，从而 $q=2$，则有 $512\varphi(m)=2S(2^{170})=2\times 176$，此时 $\varphi(m)\notin\mathbb{Z}_+$，则此时方程(6)无解.

情况 11　当 $\beta\geqslant 11$ 时，有 $2^{\beta-2}>34\beta$，则 $34q\beta\geqslant q^{\beta-1}(q-1)$ 不可能成立，则此时方程(6)无解.

结合以上推理可得，数论函数方程(6)只有正整数解 $n=315,351,504,539,630,702,756,1\ 078$. 定理 2 证毕.

参考文献：

[1] 张四保. 广义 Euler 函数方程 $\varphi_6(n)=2^{\omega(n)}$ 的解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(2)：36-41.

[2] 王　容，廖群英. 关于广义欧拉函数 $\varphi_5(n)$ [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2018，41(4)：445-449.

[3] 张四保，官春梅，杨燕妮. 广义 Euler 函数 $\varphi_2(n)$ 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 混合的一方程 [J]. 数学的实践与认识，2018，48(9)：265-268.

[4] 白海荣，廖群英. Smarandache 函数的一些推广 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2018，41(1)：32-38.

[5] 陈　斌. 一类包含 Smarandache 函数的条件方程的可解性问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(8)：71-75.

[6] 张利霞，赵西卿. 关于 Smarandache LCM 函数的 β 次混合均值 [J]. 湖北大学学报(自然科学版)，2016，38(4)：315-317.

[7] 杨衍婷，任刚练. 关于 Smarandache LCM 函数及 Smarandache 函数 $SM(n)$ 的混合均值 [J]. 黑龙江大学自然科学学报，2013，30(3)：318-320.

[8] 张利霞，赵西卿，郭　瑞. 关于数论函数方程 $S(SL(n))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 江汉大学学报(自然科学版)，2016，44(1)：18-21.

[9] 郭梦媛，高　丽，郑　璐. 关于数论函数方程 $S(SL(n^2))=\varphi_2(n)$ 解的讨论 [J]. 江西科学，2018，36(2)：217-219.

[10] 袁合才，林依梅，何　昊. 关于 Smarandache LCM 函数的数论函数方程 $S(SL(n^{3,4}))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 河南教育

学院学报(自然科学版)，2018，27(2)：15-18.

[11] 袁合才，廖丽娟，侯　洋. 关于 Smarandache LCM 函数的数论函数方程 $S(SL(n^{5,6})))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 湖北民族学院学报(自然科学版)，2018，36(3)：281-284.

[12] 袁合才，蒋菊霞，王晓峰. 关于 Smarandache LCM 函数的数论函数方程 $S(SL(n^{9,10}))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2018，36(4)：69-73.

[13] 袁合才，王晓峰. 关于 Smarandache LCM 函数的数论函数方程 $S(SL(n^{11,12}))=\varphi_2(n)$ 的可解性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：72-76.

[14] 蒋舒囡，沈忠燕. 数论函数方程 $\Phi(n)=S(n^{11})$ 和 $\Phi_2(n)=S(n^{11})$ 的解 [J]. 浙江外国语学院学报，2014(5)：31-37.

[15] 白继文，赵西卿. 关于数论函数方程 $S(SL(n^2))=\varphi(n)$ 的解 [J]. 云南师范大学学报(自然科学版)，2017，37(4)：31-33.

[16] 赵院娥，马彩艳，祁　兰. 一类包含 Smarandache 函数方程 $\varphi(n)=S(n^{10})$ [J]. 延安大学学报(自然科学版)，2012，31(2)：3-7.

[17] 陈　斌. 一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2012，34(2)：70-73.

The Solvability of Arithmetic Function Equation $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$

ZHANG Si-bao

School of Mathematics and Statistics，Kashi University，Kashi Xinjiang 844008，China

Abstract：The solvability of the arithmetic function equation $\varphi_2(n)=S(SL(n^k))$ was studied，where $k=15,17$，$\varphi_2(n)$ is generalized Euler function，$S(n)$ is Smarandache function and $SL(n)$ is Smarandache LCM function. Based on the properties of the three functions of generalized Euler function $\varphi_2(n)$，Smarandache function $S(n)$ and Smarandache LCM function $SL(n)$，all positive integer solutions of this two arithmetic function equations were given by elementary methods.

Key words：generalized Euler function；Smarandache function；Smarandache LCM function；solvability of equation

责任编辑　廖　坤