

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.04.009

关于模糊收缩列拟阵的研究

吴德垠

重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331

摘要: 首先从普通拟阵、子拟阵、对偶拟阵和子集套出发, 利用模糊拟阵的导出拟阵的序列分解和合成性质, 生成了模糊收缩列拟阵和模糊约束列拟阵. 再通过对某些模糊拟阵的导出拟阵序列取对偶, 构造了模糊上对偶拟阵. 然后, 在研究模糊收缩列拟阵性质的基础上, 找到了模糊拟阵是模糊收缩列拟阵的一个充要条件, 同时, 证明了所有模糊收缩列拟阵都是闭正规模糊拟阵. 随后, 证明了: 所有准模糊图拟阵都有模糊上对偶拟阵, 并且利用模糊收缩列拟阵和模糊上对偶拟阵的性质描述了闭模糊拟阵是准模糊图拟阵的充要条件. 最后, 证实了: 在模糊拟阵中, 模糊上对偶拟阵、模糊约束列拟阵和模糊收缩列拟阵之间的关联关系类似于在拟阵中, 对偶拟阵、约束拟阵和收缩拟阵之间的关联关系.

关键词: 模糊拟阵; 正规模糊拟阵; 准模糊图拟阵; 模糊约束列拟阵; 模糊收缩列拟阵; 模糊上对偶拟阵
中图分类号: O157; O159 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2020)04-0070-07

构造具有独特性质的模糊拟阵, 研究这些模糊拟阵的特点, 一直是模糊拟阵理论研究的重要方面. 比如闭模糊拟阵^[1]、正规模糊拟阵^[2]、准模糊图拟阵^[3]、精炼模糊拟阵^[4]和模糊截短列拟阵^[5]等, 吸引了许多学者的关注. 从普通拟阵出发, 通过连续的约束^[6]和截短^[6]操作可以分别构造出准模糊图拟阵和模糊截短列拟阵. 那么, 对一个普通拟阵, 通过一系列的收缩^[6]操作, 是否可以构造出一类具有特殊性质的模糊拟阵? 这种模糊拟阵与已有的一些特殊模糊拟阵有什么关系? 这些就是本文想要探讨的主要内容.

1 预备知识

设 $E = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 是非空有限集合, E 上的模糊集 μ 是一个映射 $\mu: E \longrightarrow [0, 1]$. E 上模糊集的全体记为 $F(E)$. 关于模糊数学的有关概念和符号主要参照文献[1], 关于拟阵的理论主要参照文献[6]. 本文所讨论的模糊拟阵首先被文献[1]所定义, 部分学者称这种模糊拟阵为 G - V 模糊拟阵^[4]. 本文主要研究 G - V 模糊拟阵. 关于这种模糊拟阵更多的知识, 参见文献[1-5, 7-16].

定理 1^[1] 设 $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ 是模糊拟阵. $\forall r \in (0, 1]$, 令 $I_r = \{C_r(\mu) \mid \forall \mu \in \mathcal{I}\}$. 则 $\mathbf{M}_r = (E, I_r)$ 是 E 上的拟阵, 而且有有限实数列 $r_0 < r_1 < \dots < r_n$, 使得:

- (i) $r_0 = 0, r_n \leq 1$;
- (ii) 当 $0 < r \leq r_n$ 时, $I_r \neq \emptyset$; 当 $r > r_n$ 时, $I_r = \emptyset$;
- (iii) $\forall s, t \in (r_i, r_{i+1})$, 有 $I_s = I_t (i = 0, 1, \dots, n-1)$;
- (iv) 若 $r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$, 则 $I_s \supset I_t (i = 0, 1, \dots, n-2)$.

我们称序列 $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n \leq 1$ 为 $\mathbf{M}$ 的基本序列.

对 $1 \leq i \leq n$, 设 $\bar{r}_i = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$, 称拟阵序列

$$\mathbf{M}_{\bar{r}_1} = (E, I_{\bar{r}_1}) \supset \mathbf{M}_{\bar{r}_2} = (E, I_{\bar{r}_2}) \supset \cdots \supset \mathbf{M}_{\bar{r}_n} = (E, I_{\bar{r}_n})$$

为 $\mathbf{M}$ 的导出拟阵序列. 若 $\mathbf{M}_{\bar{r}_i} = \mathbf{M}_{\bar{r}_j}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则称 $\mathbf{M}$ 是闭模糊拟阵^[1]. 如果 $\forall i, j$ ($i < j$; $i=1, 2, \dots, n-1$; $j=2, 3, \dots, n$), 对 $\mathbf{M}_{\bar{r}_i}$ 的基 B_1 都有相应的 $\mathbf{M}_{\bar{r}_j}$ 的基 B_2 , 使得 $B_1 \supseteq B_2$, 则称 $\mathbf{M}$ 为正规模糊拟阵^[2].

定理 1 可以看作是模糊拟阵的普通拟阵分解定理, 通过定理 1 可以将模糊拟阵分解为一个普通拟阵序列和一个数列. 反过来, 通过普通拟阵和一个数列也可以合成模糊拟阵.

定理 2^[7] 设 $\mathbf{M}_i = (E, I_i)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 是 E 上的拟阵序列, 使得 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m$, 取

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

令

$$\psi = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0, 1], C_r(\mu) \in I_r\}$$

其中: $\forall r \in (0, 1]$, 当 $r \in (\delta_{i-1}, \delta_i]$ 时, $I_r = I_i$ ($i=1, 2, \dots, m$); 当 $\delta_m < 1$, $r \in (\delta_m, 1]$ 时, $I_r = \emptyset$. 则:

(i) $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 是闭模糊拟阵;

(ii) 保留 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m$ 中每个等式段的最后一项, 去掉其余部分, 则

$$\mathbf{M}_{i_1} = (E, I_{i_1}) \supset \mathbf{M}_{i_2} = (E, I_{i_2}) \supset \cdots \supset \mathbf{M}_{i_k} = (E, I_{i_k})$$

组成 $\mathbf{M}$ 的导出拟阵序列. 由下标对应, $0 = \delta_0 < \delta_{i_1} < \delta_{i_2} < \cdots < \delta_{i_k} \leq 1$ 为其基本序列.

由定理 2, 容易得出以下推论:

推论 1 设 $\mathbf{M}_i = (E, I_i)$, $\mathbf{M}'_i = (E, I'_i)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 是 E 上的两个拟阵序列, 分别使得

$$\begin{aligned} I_1 &\supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m \\ I'_1 &\supseteq I'_2 \supseteq \cdots \supseteq I'_m \end{aligned}$$

同时还有 $I_i \supseteq I'_i$. 取

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

根据定理 2, 分别得到两个闭模糊拟阵 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ (针对 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m$) 和 $\mathbf{M}' = (E, \psi')$ (针对 $I'_1 \supseteq I'_2 \supseteq \cdots \supseteq I'_m$), 则 $\mathbf{M} \supseteq \mathbf{M}'$.

取 E 的子集 $A_1, A_2, \dots, A_s$, 使得 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_s$, 我们称 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ 为 E 的子集套. 如果 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_s$, 则称 A 为严格子集套.

定理 3 设 $\mathbf{M} = (E, I)$ 是 E 上的拟阵序列, 取 E 的子集套

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_m$$

任取

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

令

$$I_i = \{X \subseteq E \mid X \subseteq A_i, X \in I\} = I|_{A_i} \quad i=1, 2, \dots, m$$

即 I_i 是 I 在 A_i 上的约束^[6]. 对 $\forall r \in (0, 1]$, 若

$$\delta_{i-1} < r \leq \delta_i \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

取 $I_r = I_{\delta_i}$. 如果 $\delta_n < r \leq 1$, 取 $I_r = \emptyset$, 令

$$\psi = \{\mu \in F(E) \mid C_r(\mu) \in I_r, \forall r \in (0, 1]\}$$

则 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 是一个闭模糊拟阵.

定理 3 的证明可以通过文献[6]的定理 4.3.1(a) 和本文定理 2 得出. 得到的 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 称为由拟阵 $\mathbf{M}$ 针对子集套 A 和数列 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$ 产生的模糊约束列拟阵, 简称模糊约束列拟阵, 记为 $\mathbf{M} = \mathbf{M}|_A, \psi = I|_A$.

2 模糊收缩列拟阵

下面, 我们来讨论模糊收缩列拟阵. 文献[6]的定理 4.2.1 定义了收缩拟阵的概念.

命题 1^[6] 设 $\mathbf{M} = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, $A \subseteq E$, 令

$$I \cdot A = \{X \mid X \subseteq A, X \cup Y \in I, Y \text{ 是 } E \setminus A \text{ 的极大独立子集}\}$$

则 $\mathbf{M} \cdot A = (A, I \cdot A)$ 是拟阵. 我们称其为 $\mathbf{M}$ 到 A 的收缩拟阵.

命题 2^[6] 设 $\mathbf{M} = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, 任取 $A, B \subseteq E$ 且 $A \subseteq B$, 则 $\mathbf{M}$ 的收缩拟阵有如下关系:

$$\mathbf{M} \cdot A = (\mathbf{M} \cdot B) \cdot A$$

由此得出 $\mathbf{M} \cdot A \subseteq \mathbf{M} \cdot B$.

定理 4(模糊收缩列拟阵构造定理) 设 $\mathbf{M} = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, 取 E 的子集套

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_m$$

任取

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m \leq 1$$

设 $I_i = I \cdot A_i (i=1, 2, \dots, m)$ (即 I_i 是 I 在 A_i 上的收缩^[6]). 对 $\forall r \in (0, 1]$, 若

$$\delta_{i-1} < r < \delta_i \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

取 $I_r = I_{\delta_i}$. 如果 $\delta_n < r \leq 1$, 取 $I_r = \emptyset$. 令

$$\psi = \{\mu \in F(E) \mid C_r(\mu) \in I_r, \forall r \in (0, 1]\}$$

则 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 是闭模糊拟阵.

我们称 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 为由拟阵 $\mathbf{M}$ 针对子集套 A 和数列 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m \leq 1$ 产生的模糊收缩列拟阵, 简称模糊收缩列拟阵, 记为 $\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot A$. 拟阵 $\mathbf{M}$ 和子集套 A 分别称为生成 $\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot A$ 的生成拟阵和生成子集套.

证 令 $\mathbf{M}_i = (E, I_i) (i=1, 2, \dots, m)$. 根据命题 2 知

$$I_i = I \cdot A_i \supseteq I \cdot A_{i+1} = I_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, m-1$$

因此, 由

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m \leq 1 \quad I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m$$

以及 ψ 的构造, 再利用定理 2 知 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 是闭模糊拟阵.

而且易证: $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 的导出拟阵列是 $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbf{M}_m$ 的子序列, 基本序列是 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m \leq 1$ 的对应的子序列.

下面的定理 5 说明: 任何模糊收缩列拟阵的生成子集套都可以取严格子集套.

定理 5 设 $\mathbf{M} = (E, \psi)$ 是闭模糊拟阵, 则 $\mathbf{M}$ 是模糊收缩列拟阵的充要条件是: 存在严格子集套 $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_k$, 使得拟阵列 $\mathbf{N}_1 \supset \mathbf{N}_2 \supset \dots \supset \mathbf{N}_k$ 就是 $\mathbf{M}$ 的导出拟阵序列. 其中 $\mathbf{N}_i = (E, H_i)$, $H_i = H_1 \cdot B_i (i=1, 2, \dots, k)$ (即 $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_1 \cdot B_i$).

证 充分性 取生成子集套为 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$, 取生成拟阵为 $\mathbf{M} = \mathbf{N}_1$, 取数列就是 $\mathbf{M}$ 的基本列. 则由定理 4 可知, 充分性是显然的.

必要性 延用定理 4 的符号. $\mathbf{M}$ 是模糊收缩列拟阵, 则 $\mathbf{M} = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, E 的子集套

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_m$$

以及数列

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m \leq 1$$

有 $I_i = I \cdot A_i (i=1, 2, \dots, m)$, 使得

$$\psi = \{\mu \in F(E) \mid C_r(\mu) \in I_r, \forall r \in (0, 1]\}$$

其中 $r \in (0, 1]$, 若 $\delta_{i-1} < r \leq \delta_i (i=1, 2, \dots, m-1)$, 取 $I_r = I_{\delta_i}$; 如果 $\delta_n < r \leq 1$, 取 $I_r = \emptyset$.

由定理 2, $\mathbf{M}$ 的导出拟阵列为 $\mathbf{M}_1 = (E, I_1) \supset \mathbf{M}_2 = (E, I_2) \supset \dots \supset \mathbf{M}_m = (E, I_m)$ 的子序列

$$\mathbf{M}_{i_1} = (E, I_{i_1}) \supset \mathbf{M}_{i_2} = (E, I_{i_2}) \supset \dots \supset \mathbf{M}_{i_k} = (E, I_{i_k})$$

其基本序列通过下标对应得到

$$0 = \delta_0 < \delta_{i_1} < \delta_{i_2} < \cdots < \delta_{i_k} \leq 1$$

注意到

$$\begin{aligned} I_{i_j} &= I \cdot A_{i_j} & j &= 1, 2, \cdots, k \\ I_{i_j} &\supseteq I_{i_{j+1}} & j &= 1, 2, \cdots, k-1 \end{aligned}$$

则 $A_{i_j} \supseteq A_{i_{j+1}}$.

令

$$B_j = A_{i_j} \quad H_j = I \cdot A_{i_j} = I \cdot B_j \quad N_j = (E, H_j) \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

当 $j = 2, 3, \cdots, k$ 时, 由命题 2 知

$$H_j = I \cdot B_j = (I \cdot B_1) \cdot B_j = H_1 \cdot B_j$$

当 $j = 1$ 时, 有

$$H_1 = I_{i_1} = I \cdot A_{i_1} = (I \cdot A_{i_1}) \cdot A_{i_1} = H_1 \cdot B_1$$

3 模糊收缩列拟阵的性质

本段主要讨论模糊收缩列拟阵的一些特点, 以及与其它特殊模糊拟阵的关系. 由文献[6], 可以得到一个拟阵的基与其收缩拟阵的基的关系.

命题 3 设 $M = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, 取 $T \subseteq E$. 则对 M 的任何基 B , 都有 $M \cdot T$ 的基 B' , 使得 $B' \subseteq B$.

通过文献[6] 的定理 4.2.2, 可得出命题 3 的证明.

由命题 3 可以得到模糊收缩列拟阵的一个性质:

定理 6 模糊收缩列拟阵都是闭正规模糊拟阵.

由定理 5、命题 2 和命题 3 以及正规模糊拟阵的定义即可证明定理 6.

但是, 可以找到例子说明: 有闭正规模糊拟阵不是模糊收缩列拟阵.

同样的条件下, 模糊收缩列拟阵的模糊独立集是模糊约束列拟阵的独立集的一部分. 即有如下定理:

定理 7 设 $M = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, 取 E 上的子集套

$$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_m$$

任取

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

根据定理 3, 分别得到模糊约束列拟阵 $M_1 = M|_A$ 和模糊收缩列拟阵 $M_2 = M \cdot A$. 则 $M_2 \subseteq M_1$.

证 对 $\forall i (=1, 2, \cdots, m)$, 分别设

$$M_i = (E, I|_{A_i}) \quad M'_i = (E, I \cdot A_i)$$

由

$$I|_{A_i} = \{X \subseteq A_i \mid X \in I\}$$

$$I \cdot A_i = \{X \subseteq A_i \mid X \in I, \text{ 存在 } E - A_i \text{ 在 } M \text{ 中的极大独立子集 } Y \in I, \text{ 使得 } X \cup Y \in I\}$$

得出, $I \cdot A_i \subseteq I|_{A_i}$. 即 $M'_i \subseteq M_i$.

据定理 3, 模糊约束列拟阵 $M_1 = M|_A = (E, \psi)$, 其构造由拟阵列

$$M_1 = M|_{A_1} = (E, I|_{A_1}) \supseteq M_2 = M|_{A_2} = (E, I|_{A_2}) \supseteq \cdots \supseteq M_m = M|_{A_m} = (E, I|_{A_m})$$

和数列

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

以及

$$\psi = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0, 1], C_r(\mu) \in I_r\}$$

所确定, 其中: 当 $r \in (0, 1]$, $r \in (\delta_{i-1}, \delta_i]$ 时, $I_r = I|_{A_i}$ ($i = 1, 2, \cdots, m$); 当 $\delta_m < 1$, $r \in (\delta_m, 1]$ 时,

$$I_r = \emptyset.$$

据定理 4, 有模糊收缩列拟阵 $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \cdot A = (E, \psi')$, 其构造由拟阵列

$$\mathbf{M}'_1 = \mathbf{M} \cdot A_1 = (E, I \cdot A_1) \supseteq \mathbf{M}'_2 = \mathbf{M} \cdot A_2 = (E, I \cdot A_2) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}'_m = \mathbf{M} \cdot A_m = (E, I \cdot A_m)$$

和数列

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

以及

$$\psi' = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0, 1], C_r(\mu) \in I'_r\}$$

所确定, 其中: 当 $r \in (0, 1], r \in (\delta_{i-1}, \delta_i]$ 时, $I'_r = I \cdot A_i (i=1, 2, \cdots, m)$; 当 $\delta_m < 1, r \in (\delta_m, 1]$ 时, $I'_r = \emptyset$.

现在有 $\mathbf{M}'_i \subseteq \mathbf{M}_i$, 由推论 1 即知 $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2$.

文献[6] 的定理 3.1.1 定义了拟阵的对偶拟阵.

定义 1 设 $\mathbf{M} = (E, \iota)$ 是模糊拟阵, 基本序列是

$$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leq 1$$

导出拟阵序列为

$$\mathbf{M}_{r_1}^- = (E, I_{r_1}^-) \supseteq \mathbf{M}_{r_2}^- = (E, I_{r_2}^-) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_{r_n}^- = (E, I_{r_n}^-)$$

其中

$$I_{r_i}^- = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

如果有

$$\mathbf{M}_{r_1}^* = (E, I_{r_1}^*) \supseteq \mathbf{M}_{r_2}^* = (E, I_{r_2}^*) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_{r_n}^* = (E, I_{r_n}^*)$$

其中 $\mathbf{M}_{r_2}^*$ 表示 $\mathbf{M}_{r_2}^-$ 的对偶拟阵, 则由定理 2, 针对此拟阵列和数列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leq 1$, 可以得到闭模糊拟阵 $\mathbf{M}^d = (E, \iota^d)$, 我们称闭模糊拟阵 $\mathbf{M}^d = (E, \iota^d)$ 为模糊拟阵 $\mathbf{M} = (E, \iota)$ 的模糊上对偶拟阵. 其中

$$\iota^d = \{\mu \in F(E) \mid \forall r \in (0, 1], C_r(\mu) \in \bar{I}_r\}$$

当 $r \in (0, 1], r \in (r_{i-1}, r_i]$ 时, $\bar{I}_r = I_{r_i}^* (i=1, 2, \cdots, m)$; 当 $r_n < 1, r \in (r_n, 1]$ 时, $\bar{I}_r = \emptyset$.

在后续的内容中会看到, 准模糊图拟阵的模糊上对偶拟阵总存在.

下面定理 8 说明: 模糊上对偶拟阵的模糊上对偶拟阵存在, 而且等于原闭模糊拟阵. 这个性质与普通拟阵及其对偶的关系一样.

定理 8 如果闭模糊拟阵 $\mathbf{M} = (E, \iota)$ 的模糊上对偶拟阵 $\mathbf{M}^d$ 存在, 则有 $(\mathbf{M}^d)^d = \mathbf{M}$.

由文献[6] 的定理 3.1.1、本文的定理 2 和定义 1 可得到定理 8 的证明.

下面讨论模糊上对偶拟阵、模糊约束列拟阵和模糊收缩列拟阵之间的关系.

定理 9 设 $\mathbf{M} = (E, I)$ 是 E 上的拟阵, $\mathbf{M}^* = (E, I^*)$ 为其对偶拟阵. 取 E 的子集套

$$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_m$$

取

$$0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$$

则: (i) $\mathbf{M}$ 在 A 上的模糊约束列拟阵 $\mathbf{M} = \mathbf{M}|_A$ 的模糊上对偶拟阵 $\mathbf{M}^d$ 必定存在, 而且 $(\mathbf{M}|_A)^d = \mathbf{M}^* \cdot A$;

(ii) $\mathbf{M}$ 在 A 上的模糊收缩列拟阵 $\mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot A$ 的模糊上对偶拟阵必定存在, 而且 $(\mathbf{M} \cdot A)^d = \mathbf{M}^*|_A$.

证

(i) 根据定理 3, 模糊约束列拟阵 $\mathbf{M} = \mathbf{M}|_A$ 的导出拟阵列是 $\mathbf{M}_1 = (E, I|_{A_1}) \supseteq \mathbf{M}_2 = (E, I|_{A_2}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_m = (E, I|_{A_m})$ 的子序列

$$\mathbf{M}_{i_1} = (E, I|_{A_{i_1}}) \supseteq \mathbf{M}_{i_2} = (E, I|_{A_{i_2}}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_{i_q} = (E, I|_{A_{i_q}})$$

基本序列也是 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$ 的对应的子序列

$$0 = \delta_0 < \delta_{i_1} < \delta_{i_2} < \cdots < \delta_{i_q} \leq 1$$

将每个导出拟阵取对偶，并应用文献[6]的定理 4.2.3，有

$$\mathbf{M}_{i_j}^* = (E, (I \mid_{A_{i_j}})^*) = (E, (I^* \cdot A_{i_j})) \quad j = 1, 2, \cdots, q$$

由 $A_{i_j} \supseteq A_{i_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \cdots, q-1$) 及命题 2 知

$$\mathbf{M}^* \cdot A_{i_j} \supseteq \mathbf{M}^* \cdot A_{i_{j+1}}$$

因此

$$\mathbf{M}_{i_1}^* = (E, I^* \cdot A_{i_1}) \supseteq \mathbf{M}_{i_2}^* = (E, I^* \cdot A_{i_2}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_{i_q}^* = (E, I^* \cdot A_{i_q})$$

根据定义 1, $\mathbf{M}$ 的模糊上对偶拟阵 $\mathbf{M}^d$ 存在，并且由拟阵列

$$\mathbf{M}_{i_1}^* = (E, I^* \cdot A_{i_1}) \supseteq \mathbf{M}_{i_2}^* = (E, I^* \cdot A_{i_2}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_{i_q}^* = (E, I^* \cdot A_{i_q})$$

和数列

$$0 = \delta_0 < \delta_{i_1} < \delta_{i_2} < \cdots < \delta_{i_q} \leq 1$$

来确定。

我们断言拟阵列 $\mathbf{M}_{i_1}^* = (E, I^* \cdot A_{i_1}) \supseteq \mathbf{M}_{i_2}^* = (E, I^* \cdot A_{i_2}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_{i_q}^* = (E, I^* \cdot A_{i_q})$ 中的拟阵包含了拟阵列 $\mathbf{M}_1^* = (E, I^* \cdot A_1) \supseteq \mathbf{M}_2^* = (E, I^* \cdot A_2) \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{M}_m^* = (E, I^* \cdot A_m)$ 中的全部不同拟阵。因此，由定理 2，它们所产生的闭模糊拟阵是相同的。即 $\mathbf{M}^d = (\mathbf{M} \mid_A)^d = \mathbf{M}^* \cdot A$ 。

否则，假设有 $\mathbf{M}_i^* = (E, I^* \cdot A_i)$ 不在 $\{\mathbf{M}_{i_1}^*, \mathbf{M}_{i_2}^*, \cdots, \mathbf{M}_{i_q}^*\}$ 中，相应地取对偶，则 $\mathbf{M}_i = (E, I \mid_{A_i})$ 不在 $\{\mathbf{M}_{i_1}, \mathbf{M}_{i_2}, \cdots, \mathbf{M}_{i_q}\}$ 中。这与定理 2“导出拟阵序列必须包含 $\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots, \mathbf{M}_m\}$ 中全部不同的拟阵”矛盾。

因此，再根据定义 1, $\mathbf{M}^d$ 也是拟阵 $\mathbf{M}$ 针对子集套 A 和数列 $0 = \delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m \leq 1$ 产生的模糊对偶收缩列拟阵，即 $\mathbf{M}^d = \mathbf{M}^* \cdot A$ 。

(ii) 完全类似于 (i) 的方法即可证明。

由定理 9，结合定理 8，得到如下推论：

推论 2 $(\mathbf{M} \mid_A)^d = \mathbf{M}^* \cdot A$ ； $(\mathbf{M} \cdot A)^d = \mathbf{M}^* \mid_A$ 。 $\mathbf{M} \mid_A = (\mathbf{M}^* \cdot A)^d$ ； $\mathbf{M} \cdot A = (\mathbf{M}^* \mid_A)^d$ 。

比较推论 2 与文献[6]的定理 4.2.3，会发现：模糊拟阵的模糊上对偶拟阵类似于拟阵的对偶拟阵；模糊收缩列拟阵类似于收缩拟阵；模糊约束列拟阵类似于约束拟阵；模糊收缩列拟阵与模糊约束列拟阵通过模糊上对偶拟阵存在转换关系。

定理 10 设 $\mathbf{M} = (E, \iota)$ 是闭模糊拟阵，则 $\mathbf{M}$ 是准模糊图拟阵的充要条件是 $\mathbf{M}$ 的模糊上对偶拟阵 $\mathbf{M}^d$ 存在，并且 $\mathbf{M}^d$ 为模糊收缩列拟阵。

定理 10 的证明可从文献[3]的定理 18、本文的定理 9、定理 8、推论 2、定义 1 和准模糊图拟阵的定义得出。

定理 10 也说明：准模糊图拟阵的模糊上对偶拟阵必定存在。

4 结束语

本文首先从普通拟阵、子拟阵、对偶拟阵和子集套出发，利用拟阵与对偶拟阵的关系，结合模糊拟阵的导出拟阵合成，得到一系列新的模糊拟阵：模糊约束列拟阵、模糊收缩列拟阵和模糊上对偶拟阵。然后，本文提出并证明了模糊拟阵是模糊收缩列拟阵的一个充要条件，也证明了所有模糊收缩列拟阵都是闭正规模糊拟阵。最后还证实了在模糊拟阵中，模糊上对偶拟阵、模糊约束列拟阵和模糊收缩列拟阵之间有类似于拟阵中，对偶拟阵、约束拟阵和收缩拟阵之间的关系。

参考文献:

- [1] GOETSCHER R J, VOXMAN W. Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1988, 27(3): 291-302.
- [2] GOETSCHER R J, VOXMAN W. Bases of Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(2): 253-261.
- [3] 吴德垠. 准模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报, 1996, 19(3): 100-109.
- [4] LI X N, LIU S Y, LI S G. Connectedness of Refined Goetschel-Voxman Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161: 2709-2723.
- [5] 吴德垠, 王 彭. 关于模糊截短列拟阵的研究 [J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(5): 125-131.
- [6] 刘桂真, 陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994.
- [7] 吴德垠. 模糊横贯拟阵的再研究 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(3): 1-18.
- [8] 吴德垠. 一个准模糊图拟阵的新特征 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(2): 35-39.
- [9] 吴德垠. 模糊拟阵的独立模糊壳 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(8): 89-94.
- [10] 吴德垠, 张 忠. 研究模糊拟阵的一种新方法 [J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(4): 24-31.
- [11] 吴德垠, 张晓婷. “模糊横贯拟阵”的反例 [J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(3): 88-93.
- [12] 吴德垠. 关于模糊拟阵的独立模糊集生成问题的一些结果 [J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(5): 1-8.
- [13] 李尧龙. 闭正则模糊拟阵单点延拓的基有序性质 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2018, 42(6): 600-603.
- [14] 吴德垠. 关于模糊横贯拟阵表示的初步研究 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(4): 1-10.
- [15] 吴德垠. 关于模糊拟阵的模糊秩研究 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(5): 1-9.
- [16] 吴德垠. 模糊拟阵的导出集合函数 [J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(1): 1-11.

The Research on Fuzzy Contraction Sequence Matroids

WU De-yin

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: With help of properties of induced matroids sequence composing and decomposing, the paper has composed fuzzy contraction sequence matroids and a series of new fuzzy matroids from crisp matroids, submatroids, dual matroids, and subsets sets. Fuzzy upward dual matroids have been constructed from dual matroids of induced matroids. Then, this paper has found a sufficient and necessary condition for fuzzy contraction sequence matroids, and proven that all fuzzy contraction sequence matroids are closed regular fuzzy matroids. Last, a sufficient and necessary condition for quasi-fuzzy graph matroids has been got from fuzzy contraction sequence matroids and fuzzy upward dual matroids.

Key words: fuzzy matroids; regular fuzzy matroids; quasi-fuzzy graph matroids; fuzzy restriction sequence matroids; fuzzy contraction sequence matroids; fuzzy upward dual matroids

责任编辑 廖 坤