第 42 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2020 年 4 月
Vol. 42　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2020

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2020.04.010

涉及小函数的亚纯函数的角域唯一性

曾三桂，　龙见仁，　张青青

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：利用 Tsuji 角域特征函数研究了亚纯函数的角域唯一性，得到两个亚纯函数在某个角域上分担小函数的唯一性结果.

关　键　词：唯一性；分担值；Tsuji 特征函数；角域

中图分类号：O174.52　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2020)04－0077－05

本文假设读者熟悉 Nevanlinna 值分布理论中的基本记号和结果，其细节可以参看文献[1-3]. 复平面 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数的唯一性理论一直是很多学者关注的热点课题，其中最著名的是 Nevanlinna 五值定理和四值定理，其证明主要利用了 Nevanlinna 值分布理论，此外也可以用 Nevanlinna 去研究微分方程解的性质[4]. 为了叙述 Nevanlinna 五值定理和四值定理，先回顾分担值的定义. 设 f 和 g 是 $\mathbb{C}$ 上两个非常数的亚纯函数，$a \in \mathbb{C}$. 如果 $f-a$ 和 $g-a$ 在 D 内有相同的零点(不计重数)，则称 f 和 g 在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上 IM 分担值 a；如果 $f-a$ 和 $g-a$ 在 D 内不仅有相同的零点，而且零点的重数也相同，则称 f 和 g 在区域 D 上 CM 分担值 a. 类似地，如果 $f-a$ 和 $g-a$ 在 D 内有相同的极点(或者不仅有相同的极点，而且极点的重数也相同)，则称 f 和 g 在区域 D 上 IM(或 CM) 分担值 ∞.

文献[5] 使用值分布理论分别证明了下面著名的五值定理和四值定理：

定理 1[5]　设 f 和 g 是 $\mathbb{C}$ 上两个非常数的亚纯函数，$a_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 5 个判别值，$i=1,2,3,4,5$. 如果 f 和 g 在 $\mathbb{C}$ 上 IM 分担值 a_i，$i=1,2,3,4,5$，则 $f=g$.

定理 2[5]　设 f 和 g 是 $\mathbb{C}$ 上两个非常数的亚纯函数，$a_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 4 个判别值，$i=1,2,3,4$. 如果 f 和 g 在 $\mathbb{C}$ 上 CM 分担值 a_i，$i=1,2,3,4$，则 f 是 g 的分式线性变换.

很多学者研究了亚纯函数的唯一性，并且获得了一系列的研究成果[3,6]. 21 世纪初，文献[7-8] 最先讨论了角域上亚纯函数的唯一性，其文献中提出了一个问题：如果两个亚纯函数在角域上满足类似于复平面上的条件，那么两个亚纯函数是否有类似于复平面上的结果呢？即角域五值定理和四值定理是否成立？很多研究者关注了这个问题，并得到了很多相关角域的唯一性结果[9-14].

定理 1 是关于两个函数分担 5 个值的唯一性结果，一个自然的想法就是分担值能否被分担小函数所取代. 为此先回顾小函数的定义：设 $a(z)$ 和 f 是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，E 是线性测度有穷的 r-值集合，如果 $T(r, a)=o(T(r, f))(r \to \infty,\ r \notin E)$，则亚纯函数 $a(z)$ 称为亚纯函数 f 的小函数.

收稿日期：2019－03－20
基金项目：国家自然科学基金项目(11501142)；贵州省科技计划项目(黔科合平台人才[2018]5769-05 号)；贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字[2015]2112 号).
作者简介：曾三桂(1993－)，男，硕士研究生，主要从事函数论的研究.
通信作者：龙见仁，教授.

文献[15]研究了复平面上涉及分担小函数的五值定理，将 Nevanlinna 五值定理推广到小函数的情形，证明了下面的结果：

定理 3[15] 设 f 和 g 是 $\mathbb{C}$ 上两个非常数的亚纯函数，$a_i(z)$ 是 f 和 g 的 5 个判别小函数，$i=1,2,3,4,5$. 如果 f 和 g 在 $\mathbb{C}$ 上 IM 分担 $a_i(z)$，$i=1,2,3,4,5$，则 $f=g$.

文献[16]利用 Tsuji 角域特征函数 $\tau_{\alpha,\beta}(r, f)$，得到了下面形式的角域五值定理，其中角域 $\Omega(\alpha, \beta)=\{z: \alpha<\arg z<\beta\}$，$0 \leqslant \alpha<\beta \leqslant 2\pi$：

定理 4[16] 设 f 和 g 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上两个非常数的亚纯函数，且满足

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\tau_{\alpha,\beta}(r, f)}{\log r}=\infty \tag{1}$$

如果 f 和 g 在 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上 IM 分担 5 个判别值 a_i，$i=1,2,3,4,5$，则 $f=g$.

如果 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上的亚纯函数 f 满足(1)式，则称 f 在 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上是 Tsuji 意义下的超越亚纯函数. 如果不加以说明，本文讨论的角域上的超越亚纯函数都指满足(1)式的亚纯函数. 文献[16]也考虑了 CM 分担 4 个判别值的情况，在角域上得到了类似定理 2 的结果. 类似于复平面上的情形，分担小函数也是值得考虑的问题. 文献[16]得到下面分担 4 个小函数的唯一性结果：

定理 5[16] 设 f 和 g 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上两个非常数的亚纯函数，且 f 满足(1)式. 设 $a_i(z)$ 是 f 和 g 在 Tsuji 特征意义下的 4 个判别小函数，$i=1,2,3,4$. 如果 f 和 g 在 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上 CM 分担 $a_i(z)$，$i=1,2,3,4$，则 f 是 g 的分式线性变换.

设 $a(z)$ 和 $f(z)$ 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上的两个亚纯函数，如果 $\tau_{\alpha,\beta}(r, a)=o(\tau_{\alpha,\beta}(r, f))(r \to \infty, r \notin E)$，其中 E 是线性测度有穷的 r-值集合，则称 $a(z)$ 是 f 在 Tsuji 特征意义下的小函数. 如果不加以说明，本文讨论的角域上的小函数都指 Tsuji 特征意义下的小函数.

定理 5 仅考虑了 CM 分担小函数的情形，是因为 Tsuji 特征第二基本定理中 Tsuji 特征函数由 $f-a$ 的全部零点(考虑重数)的计数函数来控制(参看文献[16]的定理 2.3.2). 最近文献[17]考虑了 IM 分担 5 个小函数的情形，得到了涉及小函数的角域五值定理：

定理 6[17] 设 f 和 g 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上两个非常数的亚纯函数，且 f 满足(1)式. 设 $a_i(z)$ 是 f 和 g 的 5 个判别小函数，$i=1,2,3,4,5$. 如果 f 和 g 在 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上 IM 分担 $a_i(z)$，$i=1,2,3,4,5$，则 $f=g$.

从定理 6 看到，如果两个亚纯函数在角域上 IM 分担 5 个判别小函数，则这两个函数相等. 而定理 5 告诉我们，就算两个亚纯函数在角域上 CM 分担 4 个判别小函数，这两个函数也未必相同. 那么除了在角域上 IM 分担 5 个判别小函数外，在何种条件下能得到两个函数相同呢? 这是本文的研究目的，我们发现了一些判别条件使得两个函数相同. 在叙述主要结果之前，先回顾 Tsuji 亏函数的概念，该定义参见文献[16].

定义 1[16] f 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上的超越亚纯函数，$a(z)$ 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上 f 的小函数. 令

$$\delta_\tau(a, f; \alpha, \beta)=\liminf_{r \to \infty} \frac{m_{\alpha,\beta}\left(r, \dfrac{1}{f(z)-a(z)}\right)}{\tau_{\alpha,\beta}(r, f)}=1-\limsup_{r \to \infty} \frac{\hbar_{\alpha,\beta}\left(r, \dfrac{1}{f(z)-a(z)}\right)}{\tau_{\alpha,\beta}(r, f)}$$

如果 $\delta_\tau(a, f; \alpha, \beta)>0$，则称 $a(z)$ 是 f 的亏函数.

$m_{\alpha,\beta}\left(r, \dfrac{1}{f(z)-a(z)}\right)$ 和 $\hbar_{\alpha,\beta}\left(r, \dfrac{1}{f(z)-a(z)}\right)$ 是刻画 Tsuji 特征函数的两个重要指标. 本文利用亏函数研究了两函数在角域上 CM 分担 4 个小函数的唯一性，得到了下面的结果：

定理 7 设 f 和 g 是 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上两个非常数的亚纯函数，且 f 满足(1)式. 设 $a_i(z)$ 是 f 和 g 的 4 个判别小函数，$i=1,2,3,4$，且 f 和 g 在 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上 CM 分担 $a_i(z)$，$i=1,2,3,4$. 如果 f 还有一个不同于 $a_i(z)$ 的亏函数 $a(z)$，则 $f=g$.

相比较定理 5 的条件，定理 7 增加了“f 还有一个不同于 $a_i(z)$ 的亏函数”这一条件，得到了比定理 5 更好的结果. 利用定理 7，得到下面的两个推论：

推论 1　设 f 和 g 是 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上两个非常数的亚纯函数．设 $a_i(z)$ 是 f 和 g 的 4 个判别小函数，$i=1,2,3,4$，且 f 和 g 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上 CM 分担 $a_i(z)$，$i=1,2,3,4$．如果对某个 $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 和任意给定的 $\varepsilon>0$，f 满足

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,\Omega_\varepsilon;a,f)}{r^{\omega}\log r}=\infty \tag{2}$$

其中

$$\Omega_\varepsilon=\{z:\alpha+\varepsilon<\arg z<\beta-\varepsilon\}$$

$$N(r,\Omega_\varepsilon;a,f)=\int_1^r\frac{n(t,\Omega_\varepsilon;a,f)}{t}\mathrm{d}t$$

$n(t,\Omega_\varepsilon;a,f)$ 表示 f 在 $\Omega_\varepsilon\cap\{z:1<|z|<t\}$ 的 a- 值点个数(计算重数)，$\omega=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$．则 $f=g$．

推论 2　设 f 和 g 是 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上两个非常数的亚纯函数．设 $a_i(z)$ 是 f 和 g 的 4 个判别小函数，$i=1,2,3,4$，且 f 和 g 在 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上 CM 分担 $a_i(z)$，$i=1,2,3,4$．设 $\arg z=\theta\in(\alpha,\beta)$ 是从原点出发的一条半直线，使得对某个 $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 和任意给定的 $\varepsilon>0$，f 满足

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon);a,f)}{\log r}>\frac{\pi}{\beta-\alpha} \tag{3}$$

则 $f=g$．

注 1　由 Borel 方向的定义及其存在性[2] 知，满足(3)式的角域必存在．

为了证明本文的结果，Tsuji 角域特征的性质是需要的．设 f 为角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数．令

$$E(\alpha,\beta,r)=\{z=te^{i\theta}:\alpha<\theta<\beta,\ 1<t<r(\sin(\omega(\theta-\alpha)))^{\frac{1}{\omega}}\}$$

$$m_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{\arcsin(r^{-\omega})}^{\pi-\arcsin(r^{-\omega})}\log^+|f(re^{i(\alpha+\omega^{-1}\theta)}\sin^{\omega^{-1}}\theta)|\frac{1}{r^{\omega}\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\hbar_{\alpha,\beta}(r,f)=\sum_{1<|b_n|<r(\sin(\omega(\beta_n-\alpha)))^{\omega^{-1}}}\left(\frac{\sin(\omega(\beta_n-\alpha))}{|b_n|^{\omega}}-\frac{1}{r^{\omega}}\right)=\omega\int_1^r\frac{n_{\alpha,\beta}(t,f)}{t^{\omega+1}}\mathrm{d}t$$

$$\tau_{\alpha,\beta}(r,f)=m_{\alpha,\beta}(r,f)+\hbar_{\alpha,\beta}(r,f)$$

其中 $\omega=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$，$b_n=|b_n|e^{i\beta_n}$ 是 f 在 $E(\alpha,\beta,r)$ 内的极点，重级极点按其重数计算，$n_{\alpha,\beta}(r,f)$ 表示 f 在 $E(\alpha,\beta,r)$ 内的极点个数(计算重数)．如果不考虑极点的重数，类似地可定义 $\overline{\hbar}_{\alpha,\beta}(r,f)$．称 $\tau_{\alpha,\beta}(r,f)$ 为 f 在 $E(\alpha,\beta,r)$ 内的 Tsuji 特征函数．

引理 1[16]　设 f 为 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数．则对每一个 $a\in\mathbb{C}$，有

$$\tau_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\tau_{\alpha,\beta}(r,f)+O(1)$$

引理 2[16]　设 f 为 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数，k 为正整数．则对 $0<r<R$，有

$$m_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)\leqslant c\left\{\log^+\tau_{\alpha,\beta}(R,f)+\log\frac{R}{R-r}+1\right\}$$

其中 c 为一正常数．当 $r\to\infty$ 时，有

$$m_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O\{\log^+\tau_{\alpha,\beta}(r,f)+\log r\}$$

可能需除去一个线性测度有限的 r- 值集合 E．

引理 3[16]定理2.3.2　设 f 为 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数，$a_i(z)$ 是 f 的 q 个判别小函数，$j=1,\cdots,q$．则

$$(q-2)\tau_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a_j(z)}\right)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)$$

其中 $Q_{\alpha,\beta}(r,f)=O(\log r)+o(\tau_{\alpha,\beta}(r,f))$，$r\to\infty$，$r\notin E$，$E$ 为线性测度有限的 r- 值集合．

引理 4[16,引理2.3.3] 设 f 为 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数. 则对任意给定的 $\varepsilon>0$,有

$$\hbar_{\alpha,\beta}(r,f)\geqslant \omega c^{\omega}\frac{N(cr,\Omega_{\varepsilon},f)}{r^{\omega}}+\omega^{2}c^{\omega}\int_{1}^{cr}\frac{N(t,\Omega_{\varepsilon},f)}{t^{\omega+1}}\mathrm{d}t$$

其中 $c\in(0,1)$ 是一个仅依赖 ε 的常数,

$$N(r,\Omega_{\varepsilon},f)=\int_{1}^{r}\frac{n(t,\Omega_{\varepsilon},f)}{t}\mathrm{d}t$$

$n(t,\Omega_{\varepsilon},f)$ 表示 f 在 $\Omega_{\varepsilon}\cap\{z:1<|z|<t\}$ 的极点个数(计算重数),$\omega=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$.

定理 7 的证明 假设 $f\neq g$. 利用引理 1 和引理 3,有

$$\begin{aligned}2\tau_{\alpha,\beta}(r,f)&\leqslant\sum_{j=1}^{4}\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a_{j}(z)}\right)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\\&\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-g}\right)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\\&\tau_{\alpha,\beta}(r,f)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\\&\tau_{\alpha,\beta}(r,f)+\tau_{\alpha,\beta}(r,g)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $Q_{\alpha,\beta}(r,f)=O(\log r)+o(\tau_{\alpha,\beta}(r,f))$,$r\to\infty$,$r\notin E$,$E$ 为线性测度有限的 r- 值集合. 因此

$$\tau_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\tau_{\alpha,\beta}(r,g)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\tag{5}$$

类似地,有

$$\tau_{\alpha,\beta}(r,g)\leqslant\tau_{\alpha,\beta}(r,f)+Q_{\alpha,\beta}(r,g)\tag{6}$$

结合(5)式和(6)式得

$$Q_{\alpha,\beta}(r,f)=Q_{\alpha,\beta}(r,g)$$

根据假设,不妨设 $a(z)\neq\infty$. 利用引理 3,并结合(4),(5),(6)式,得

$$\begin{aligned}3\tau_{\alpha,\beta}(r,f)&\leqslant\sum_{j=1}^{4}\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a_{j}(z)}\right)+\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a(z)}\right)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\\&2\tau_{\alpha,\beta}(r,f)+\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a(z)}\right)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)\end{aligned}$$

因此

$$\tau_{\alpha,\beta}(r,f)\leqslant\hbar_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a(z)}\right)+Q_{\alpha,\beta}(r,f)$$

所以

$$m_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f(z)-a(z)}\right)=Q_{\alpha,\beta}(r,f)$$

根据 Tsuji 亏函数的定义,$a(z)$ 不是 f 的亏函数,与假设条件矛盾. 故 $f=g$.

推论 1、2 的证明 利用引理 4 和(2),(3)式,(1)式成立. 故利用定理 1 得 $f=g$.

参考文献:

[1] HAYMAN W K. Meromorphic Functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] YANG L. Value Distribution Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京:科学出版社,1995.

[4] 孙 煜,龙见仁,覃智高,等. 非线性复微分方程的解与 H_{ω}^{∞} 空间 [J]. 西南大学学报(自然科学版),2018,40(10):83-88.

[5] NEVANLINNA R. Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie de Functions Méromorphes [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

[6] 何 萍,杨泰泰,张德飞. 亚纯函数涉及 IM 分担值的唯一性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2016, 41(2):

16-20.
[7] ZHENG J H. On Uniqueness of Meromorphic Functions with Shared Values in Some Angular Domains [J]. Canadian Mathematical Bulletin，2004，47(1)：152-160.
[8] ZHENG J H. On Uniqueness of Meromorphic Functions with Shared Values in One Angular Domain [J]. Complex Variables Theory Appl，2003，48(9)：777-785.
[9] CAO T B，YI H X. On the Uniqueness of Meromorphic Functions That Share Four Values in One Angular Domain [J]. J Math Anal Appl，2009，358(1)：81-97.
[10] LIN W C，MORI S，TOHGE K. Uniqueness Theorems in an Angular Domain [J]. Tohoku Math J，2006， 58(4)：509-527.
[11] 龙见仁，伍鹏程. Borel 方向与亚纯函数的唯一性理论 [J]. 数学年刊，2012，33A(3)：261-266.
[12] LONG J R，QIU C H. Borel Directions and Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Five Values [J]. J Comput Anal Appl，2016，21(6)：1046-1059.
[13] ZHANG Q C. Meromorphic Functions Sharing Values in an Angular Domain [J]. J Math Anal Appl，2009，349(1)：100-112.
[14] XU J F，YI H X. On Uniqueness of Meromorphic Functions with Shared Four Values in Some Angular Domains [J]. Bull Malays Sci Soc，2008，31(1)：57-65.
[15] LI Y H，QIAO J Y. The Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Small Functions [J]. Sci China(Ser A)，2000，43(6)：581-590.
[16] ZHENG J H. Value Distribution of Meromorphic Functions [M]. New York：Springer，2010.
[17] LIU H F，MAO Z Q. On Uniqueness of Meromorphic Functions Sharing Five Small Functions in Some Angular Domains [J]. Taiwan J Math，2013，17(5)：1779-1790.

On Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Small Functions in an Angular Domain

Zeng San-gui，Long Jian-ren，Zhang Qing-qing

School of mathematical sciences，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：The uniqueness theory is studied by using Tsuji characteristic functions，some uniqueness results are obtained when two meromorphic functions share small functions in an angular domain.

Key words：uniqueness；share value；Tsuji characteristic functions；angular domain

责任编辑　廖　坤