第 42 卷第 4 期 西南大学学报（自然科学版） 2020 年 4 月
Vol. 42 No. 4 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Apr. 2020

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2020.04.011

球空间中子流形上 L^p 调和 1-形式的消灭定理

姚中伟， 刘建成

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 设 $M^m(m \geqslant 3)$ 是 $m+n$ 维球空间 $\mathscr{S}^{m+n}$ 中的 m 维完备定向非紧子流形，考虑子流形 M^m 上的 $L^p(p \geqslant 2)$ 调和 1-形式的存在性问题. 记 $\boldsymbol{\Phi}$ 为子流形 M^m 的无迹张量，则 M^m 的全曲率定义为 $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L^m(M)} = \left(\int_M |\boldsymbol{\Phi}|^m \mathrm{d}M\right)^{\frac{1}{m}}$，其中 $\mathrm{d}M$ 表示 M^m 的体积元. 首先，在子流形 M^m 的全曲率有正上界的假设条件下，特别地，该正上界的取值仅依赖于子流形 M^m 的维数 m 和 p，使用 Bochner 公式及球空间中子流形 Ricci 曲率的下界估计和 Sobolev 不等式，并利用截断函数法和 L^p 条件，得到了子流形 M^m 上不存在非平凡的 L^p 调和 1-形式，即 L^p 调和 1-形式的消灭定理. 其次，考虑逐点条件，假设子流形 M^m 的无迹张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的最大模函数有正上界，该正上界的取值仅依赖于 m，使用同样的方法，证明了 M^m 上不存在非平凡的 L^p 调和 1-形式.

关 键 词： L^p 调和 1-形式；消灭定理；全曲率；无迹张量

中图分类号： O186.12 **文献标志码：** A **文章编号：** 1673-9868(2020)04-0082-06

黎曼流形上 r 次调和形式空间的性质与流形的拓扑性质之间有着密切的联系，如著名的 Hodge-de Rham 定理指出：紧致 m 维黎曼流形 M^m 上 $r(0 \leqslant r \leqslant m)$ 次调和形式空间的维数与其第 r 个贝蒂数相等；在非紧情形下，L^2 调和 r-形式空间与 r 次可约化上同调群同构，且其非抛物端的个数不超过 L^2 调和 1-形式空间的维数加 1[1-2]. 因此，对黎曼流形上调和形式的讨论具有重要意义.

文献[3]证明了：欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中可定向完备的非紧稳定极小超曲面上不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式. 随后，文献[4-5]在外围空间满足一定曲率假设的条件下，将文献[3]的工作完全推广到任意流形中具有常数平均曲率的子流形上. 文献[6]去掉了稳定性的假设，对欧氏空间 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的完备极小子流形 M^m 考虑类似的问题，并在 M^m 更弱的几何假设下，即 M^m 的第二基本型 A 满足 $\int_M |A|^m \mathrm{d}M < C_1$（$C_1$ 是常数）的条件下，得到了文献[3]中同样的结论，并进一步证明了 M^m 仅有一个端. 文献[7]考虑了 Hadamard 流形中的完备非紧子流形的情形，对 M^m 的 Laplace 算子的第一特征值作一定的限制，在全曲率有限或有界的条件下，分别证明了该类子流形上非平凡的 L^2 调和 1-形式空间的维数有限或为 0. 对于球空间 $\mathscr{S}^{m+n}$ 中的子流形 M^m，文献[8-9]同样对 M^m 的全曲率作一定的限制后，得到了关于 L^2 调和 1-形式的消灭定理以及有限性定理.

相比而言，L^2 调和形式的消灭定理及其应用较为常见，而对 L^p 调和形式[10]$(p \geqslant 2)$、L^p 调和 1-形式的讨论更为困难，进展更为缓慢. 文献[11]对黎曼流形中的完备非紧稳定极小超曲面的 Laplace 算子的第一特征值作以限制，得出了 L^{2p} 调和 1-形式的消灭定理. 文献[12]推广了文献[7]关于 L^2 调和 1-形式的结论，得到了 Hadamard 流形中完备非紧子流形上 L^p 调和 1-形式的消灭定理及有限性定理.

记 $A^1(M)$ 表示流形 M^m 上 1 次外微分形式空间，则 M^m 上的 L^p 调和 1-形式空间为

$$H^1(L^p(M^m)) = \left\{\boldsymbol{\omega} \in A^1(M^m): \Delta\boldsymbol{\omega} = 0, \int_M |\boldsymbol{\omega}|^p \mathrm{d}M < \infty\right\}$$

收稿日期：2019-04-02
基金项目：国家自然科学基金项目(11761061).
作者简介：姚中伟(1993-)，男，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

受上述工作的启发，本文考虑球空间中完备非紧子流形上的非平凡 L^p 调和 1- 形式的不存在性问题，得到如下两个消灭定理：

定理 1　设 $M^m(m\geqslant 3)$ 是球空间 $\mathscr{S}^{m+n}$ 中完备非紧子流形. 如果存在一个正常数 Λ，使得 M^m 的全曲率满足 $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L^m(M)}<\Lambda$，则 $H^1(L^p(M))=\{0\}(p\geqslant 2)$，即 M^m 上不存在非平凡的 L^p 调和 1- 形式. 特别地，可取

$$\Lambda=\min\left\{\sqrt{\frac{1}{C_0m(m-1)}},\ \sqrt{\frac{8(p-1)(m-1)+8}{C_0p^2(m-1)^2}}\right\}$$

其中 C_0 为引理 1 中的正常数.

定理 2　设 $M^m(m\geqslant 3)$ 是球空间 $\mathscr{S}^{m+n}$ 中完备非紧子流形. 如果无迹张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足

$$\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|<\frac{2\sqrt{m(m-1)}}{m}$$

则 $H^1(L^p(M))=\{0\}(p\geqslant 2)$，即 M 上不存在非平凡的 L^p 调和 1- 形式.

设 $M^m(m\geqslant 3)$ 是球空间 $\mathscr{S}^{m+n}$ 中的完备非紧子流形，A，$\boldsymbol{H}$ 分别表示 M^m 的第二基本形式和平均曲率向量，无迹张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 定义为 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=A(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})-\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle\boldsymbol{H}$，其中 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$ 为 M^m 上的切向量场，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 M^m 上的诱导度量. 直接计算得 $|\boldsymbol{\Phi}|^2=|A|^2-m|\boldsymbol{H}|^2$. 易见，$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当子流形 M^m 是全脐的[13].

引理 1[8]　设 $M^m(m\geqslant 3)$ 是球空间 $\mathscr{S}^{m+n}$ 中的完备非紧子流形，则对任意 $f\in C_0^\infty(M)$，有

$$\left(\int_M|f|^{\frac{2m}{m-2}}\mathrm{d}M\right)^{\frac{m-2}{m}}\leqslant C_0\left(\int_M|\nabla f|^2\mathrm{d}M+m^2\int_M(|\boldsymbol{H}|^2+1)f^2\mathrm{d}M\right)$$

其中 $C_0>0$ 是仅依赖于 m 的常数.

引理 2[14]　设 M^m 是完备单连通黎曼流形 N^{m+n} 中的子流形，若 N^{m+n} 的截面曲率 $K_N\geqslant k$(常数). 则对任意 $\boldsymbol{\omega}\in A^1(M^m)$，有

$$\mathrm{Ric}(\boldsymbol{\omega}^\#,\boldsymbol{\omega}^\#)\geqslant\left((m-1)(|\boldsymbol{H}|^2+k)^2-\frac{m-1}{m}|\boldsymbol{\Phi}|^2-\frac{(m-2)\sqrt{m(m-1)}}{m}|\boldsymbol{H}||\boldsymbol{\Phi}|\right)|\boldsymbol{\omega}|^2$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^\#$ 是 $\boldsymbol{\omega}$ 的对偶向量场，Ric 是子流形 M^m 的 Ricci 曲率张量.

引理 3[15]　设 M^m 是 m 维黎曼流形. 则对任意 $\boldsymbol{\omega}\in A^1(M)$，有

$$\frac{1}{2}\Delta|\boldsymbol{\omega}|^2=\langle\Delta\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}\rangle+|\nabla\boldsymbol{\omega}|^2+\mathrm{Ric}(\boldsymbol{\omega}^\#,\boldsymbol{\omega}^\#)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^\#$ 是 $\boldsymbol{\omega}$ 的对偶向量场.

对黎曼流形上的调和 1- 形式 $\boldsymbol{\omega}$，成立 Kato 不等式[16]

$$\frac{m}{m-1}|\nabla|\boldsymbol{\omega}||^2\leqslant|\nabla\boldsymbol{\omega}|^2$$

因此，对任意 $\boldsymbol{\omega}\in H^1(L^p(M))(p\geqslant 2)$，结合引理 2 和引理 3，直接计算可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\omega}|\Delta|\boldsymbol{\omega}|\geqslant&\frac{1}{m-1}|\boldsymbol{\omega}|^2+(m-1)|\boldsymbol{\omega}|^2+(m-1)|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^2-\frac{m-1}{m}|\boldsymbol{\Phi}|^2|\boldsymbol{\omega}|^2-\\&\frac{(m-2)\sqrt{m(m-1)}}{m}|\boldsymbol{H}||\boldsymbol{\Phi}||\boldsymbol{\omega}|^2\end{aligned}\tag{1}$$

此外，对任意的 $p\geqslant 2$，直接计算有

$$|\boldsymbol{\omega}|\Delta|\boldsymbol{\omega}|^{p-1}=(p-1)|\boldsymbol{\omega}|^{p-2}|\boldsymbol{\omega}|\Delta|\boldsymbol{\omega}|+\frac{4(p-1)(p-2)}{p^2}|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2\tag{2}$$

联立(1),(2) 式，便有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\omega}|\Delta|\boldsymbol{\omega}|^{p-1}\geqslant&\left(\frac{4(p-1)(p-2)}{p^2}+\frac{4(p-1)}{p^2(m-1)}\right)|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+(p-1)(m-1)|\boldsymbol{\omega}|^p+\\&(p-1)(m-1)|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p-\frac{(p-1)(m-1)}{m}|\boldsymbol{\Phi}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p-\\&\frac{(p-1)(m-2)\sqrt{m(m-1)}}{m}|\boldsymbol{H}||\boldsymbol{\Phi}||\boldsymbol{\omega}|^p\end{aligned}\tag{3}$$

定理1的证明　任取 $\eta \in C_0^{\infty}(M)$，对(3)式两边同时乘以 η^2，并在 M^m 上积分(以下为方便起见，积分都省去体积元)，则有

$$\begin{aligned}\int_M \eta^2 |\boldsymbol{\omega}| \Delta |\boldsymbol{\omega}|^{p-1} \geqslant & \left(\frac{4(p-1)(p-2)}{p^2}+\frac{4(p-1)}{p^2(m-1)}\right)\int_M \eta^2 |\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2 + \\ & +(p-1)(m-1)\int_M |\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2+(p-1)(m-1)\int_M |\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 - \\ & \frac{(p-1)(m-2)\sqrt{m(m-1)}}{m}\int_M |\boldsymbol{H}||\boldsymbol{\Phi}||\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 - \\ & \frac{(p-1)(m-1)}{m}\int_M |\boldsymbol{\Phi}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 \end{aligned} \tag{4}$$

一方面，对(4)式左边项运用散度定理及Cauchy-Schwarz不等式，即对任意常数 $c>0$，有

$$\int_M \eta^2 |\boldsymbol{\omega}| \Delta |\boldsymbol{\omega}|^{p-1} \leqslant -\frac{4(p-1)}{p^2}\int_M \eta^2 |\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\frac{2c}{p}\int_M \eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\frac{2}{pc}\int_M |\boldsymbol{\omega}|^p|\nabla\eta|^2 \tag{5}$$

同理，对(4)式右边第4项运用Cauchy-Schwarz不等式，对任意的 $a>0$，有

$$\int_M |\boldsymbol{H}||\boldsymbol{\Phi}||\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 \leqslant \frac{a}{2}\int_M |\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2+\frac{1}{2a}\int_M |\boldsymbol{\Phi}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 \tag{6}$$

另一方面，运用Hölder不等式，结合引理1和Cauchy-Schwarz不等式，对任意 $b>0$，记

$$S(\eta)=\left(\int_{\operatorname{supp}\eta}|\boldsymbol{\Phi}|^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

有

$$\begin{aligned}\int_M |\boldsymbol{\Phi}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 \leqslant & \left(\int_{\operatorname{supp}\eta}|\boldsymbol{\Phi}|^m\right)^{\frac{2}{m}}\left(\int_M (\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant \\ & S^2(\eta)C_0\left[(1+b)\int_M \eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\left(1+\frac{1}{b}\right)\int_M |\boldsymbol{\omega}|^p|\nabla\eta|^2+\right. \\ & \left. m^2\int_M (|\boldsymbol{H}|^2+1)(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})^2\right]\end{aligned} \tag{7}$$

将(5),(6)式代入(4)式，并结合(7)式，可以得到

$$C\int_M \eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+D\int_M |\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2+E\int_M |\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2 \leqslant F\int_M |\boldsymbol{\omega}|^p|\nabla\eta|^2 \tag{8}$$

记

$$\begin{cases} A(m,a)=(p-1)(m-1)-\dfrac{a(p-1)(m-2)\sqrt{m(m-1)}}{2m} \\ B(m,a)=\dfrac{(p-1)(m-1)}{m}+\dfrac{(p-1)(m-2)\sqrt{m(m-1)}}{2am} \end{cases}$$

则 C,D,E,F 分别为

$$C=\frac{4(p-1)^2}{p^2}+\frac{4(p-1)}{p^2(m-1)}-C_0(1+b)B(m,a)S^2(\eta)-\frac{2c}{p}$$

$$D=A(m,a)-m^2C_0B(m,a)S^2(\eta)$$

$$E=(p-1)(m-1)-m^2C_0B(m,a)S^2(\eta)$$

$$F=\left(1+\frac{1}{b}\right)C_0B(m,a)S^2(\eta)+\frac{2}{cp}$$

记 $B_{x_0}(r)$ 为 M^m 上以固定点 $x_0\in M^m$ 为球心，r 为半径的测地球. 取 M^m 上的光滑函数 η，使得

$$\begin{cases} \eta=1 & x\in B_{x_0}(r) \\ 0\leqslant\eta\leqslant 1,\ |\nabla\eta|<\dfrac{2}{r} & x\in B_{x_0}(2r)\backslash B_{x_0}(r) \\ \eta=0 & x\in M\backslash B_{x_0}(2r) \end{cases}$$

则(8)式中各项在 M^m 上的积分可看作是在 $B_{x_0}(r)$，$B_{x_0}(2r)\backslash B_{x_0}(r)$，$M\backslash B_{x_0}(2r)$ 这 3 部分区域上的积分和，由 η 的取值易得

$$C\int_{B_{x_0}(r)}|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+D\int_{B_{x_0}(r)}|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p+E\int_{B_{x_0}(r)}|\boldsymbol{\omega}|^p\leqslant F\frac{4}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)}|\boldsymbol{\omega}|^p \tag{9}$$

显然，$F>0$．令 $r\to\infty$，因为 $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{H}^1(L^p(M))$，所以(9)式右边趋于0．当 $C>0$，$D>0$，$E>0$ 时，便有 $|\boldsymbol{\omega}|=0$，即 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$，$M$ 上不存在非平凡的 L^p 调和 1-形式．下证存在 $\Lambda>0$，使得当 $S(\eta)<\Lambda$ 时有 $C>0$，$D>0$，$E>0$，并给出 $\Lambda>0$ 取值的具体估计．由于 $E>D$，故只需适当选取 Λ 使得 $C>0$，且 $D>0$ 即可．

取足够小的 b,c，由 C 的表达式，当 $S(\eta)<\Lambda$ 时，$C>0$ 当且仅当

$$\Lambda^2<\frac{1}{C_0}\frac{\dfrac{4(p-1)^2}{p^2}+\dfrac{4(p-1)}{p^2(m-1)}}{B(m,a)}$$

令

$$f_1(a)=\frac{1}{C_0}\frac{\dfrac{4(p-1)^2}{p^2}+\dfrac{4(p-1)}{p^2(m-1)}}{B(m,a)}$$

则函数 $f_1:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是增函数，且当 $a\to\infty$ 时，有

$$\sup f_1(a)=\frac{(4(p-1)(m-1)+4)m}{C_0p^2(m-1)^2}$$

因此，选取 Λ，使得 $\Lambda^2<\dfrac{(4(p-1)(m-1)+4)m}{C_0p^2(m-1)^2}$ 时有 $C>0$.

同理，由 D 的表达式，当 $S(\eta)<\Lambda$ 时，$D>0$ 当且仅当

$$\Lambda^2<\frac{1}{C_0m^2}\frac{m-\dfrac{a(m-2)}{2}\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}}{1+\dfrac{m-2}{2a}\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}}$$

令

$$f_2(a)=\frac{1}{C_0m^2}\frac{m-\dfrac{a(m-2)}{2}\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}}{1+\dfrac{m-2}{2a}\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}}$$

则函数 $f_2:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是凸函数，且在 $a=\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}$ 处取得最大值

$$\max f_2(a)=f_2\left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\right)=\frac{1}{C_0m(m-1)}$$

由此可见，选取 Λ 使得 $\Lambda^2<\dfrac{1}{C_0m(m-1)}$ 时，便有 $D>0$.

因此，当 $S(\eta)<\Lambda$ 时，要使得 $C>0$，且 $D>0$，对任意的 $a>0$，只需 $\Lambda^2=\min\{f_1(a),f_2(a)\}$. 由上述讨论，$f_1(a)$ 在 $(0,\infty)$ 上是增函数，$f_2(a)$ 在 $(0,\infty)$ 上是凸函数，且

$$\max f_2(a)=f_2\left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\right)$$

故取 $a=\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}$．则当 $2\leqslant p\leqslant 4m+\sqrt{16m^2-\dfrac{8m(m-2)}{m-1}}$ 时，$f_2(a)\leqslant f_1(a)$，取

$$\Lambda^2=\min\{f_1(a),f_2(a)\}=f_2\left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\right)=\frac{1}{C_0m(m-1)}$$

即

$$\Lambda=\sqrt{\frac{1}{C_0 m(m-1)}}$$

当 $p>4m+\sqrt{16m^2-\frac{8m(m-2)}{m-1}}$ 时，$f_2(a)>f_1(a)$，取

$$\Lambda^2=\min\{f_1(a),f_2(a)\}=f_1\left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\right)=\frac{8(p-1)(m-1)+8}{C_0 p^2(m-1)^2}$$

即

$$\Lambda=\sqrt{\frac{8(p-1)(m-1)+8}{C_0 p^2(m-1)^2}}$$

定理1证毕.

定理2的证明 对 $\boldsymbol{\omega}\in H^1(L^p(M))(p\geqslant 2)$，将(5)，(6)式代入(4)式，有

$$\begin{aligned}\frac{2}{pc}\int_M|\boldsymbol{\omega}|^p|\nabla\eta|^2\geqslant&\left(\frac{4(p-1)^2-2pc}{p^2}+\frac{4(p-1)}{p^2(m-1)}\right)\int_M\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\\&A(m,a)\int_M|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2+(p-1)(m-1)\int_M|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2-\\&B(m,a)\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|^2\int_M\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2\end{aligned}\tag{10}$$

整理(10)式便有

$$\overline{C}\int_M\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\overline{D}\int_M|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2+\overline{E}\int_M|\boldsymbol{\omega}|^p\eta^2\leqslant\overline{F}\int_M|\boldsymbol{\omega}|^p|\nabla\eta|^2\tag{11}$$

其中 $\overline{C}$，$\overline{D}$，$\overline{E}$，$\overline{F}$ 分别为

$$\overline{C}=\frac{4(p-1)^2}{p^2}+\frac{4(p-1)}{p^2(m-1)}-\frac{2c}{p}$$

$$\overline{D}=(p-1)(m-1)-B(m,a)\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|^2$$

$$\overline{E}=A(m,a)\qquad\overline{F}=\frac{2}{cp}$$

显然 $\overline{F}>0$，取足够小的 $c>0$，$0<a<\frac{2\sqrt{m(m-1)}}{(m-2)}$，则有 $\overline{C}>0$，且 $\overline{E}>0$. 此时 $\overline{D}>0$ 当且仅当

$$\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|^2<\frac{(p-1)(m-1)}{B(m,a)}$$

设 $f_3(a)=\frac{(p-1)(m-1)}{B(m,a)}$，则 $f_3(a)$ 在 $\left(0,\frac{2\sqrt{m(m-1)}}{m-2}\right)$ 上是增函数，且 $\sup f_3(a)=\frac{4(m-1)}{m}$，由 a 的任意性，令 $a\to\frac{2\sqrt{m(m-1)}}{m-2}$，则当

$$\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|^2<\frac{4(m-1)}{m}$$

即

$$\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|<\frac{2\sqrt{m(m-1)}}{m}$$

时，就有 $\overline{D}>0$.

同理，记 $B_{x_0}(r)$ 为 M 上以固定点 $x_0\in M$ 为球心 r 为半径的测地球，由 $\eta\in C_0^\infty(M)$ 的任意性可得

$$\overline{C}\int_{B_{x_0}(r)}|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\overline{D}\int_{B_{x_0}(r)}|\boldsymbol{H}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p+\overline{E}\int_{B_{x_0}(r)}|\boldsymbol{\omega}|^p\leqslant\overline{F}\frac{4}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)}|\boldsymbol{\omega}|^p\tag{12}$$

令 $r\to\infty$，由于 $\boldsymbol{\omega}\in H^1(L^p(M))$，(12)式右边项趋于0. 当 $\sup_{x\in M}|\boldsymbol{\Phi}|<2\frac{\sqrt{m(m-1)}}{m}$ 时已证得 $\overline{C}>0$，$\overline{E}>0$，$\overline{D}>0$，所以 $|\boldsymbol{\omega}|=0$，即 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$，$M^m$ 上不存在非平凡的 L^p 调和1-形式. 定理2证毕.

参考文献：

[1] CARRON G. L^2 Harmonic Forms on Non Compact Manifolds [J/OL]. 2007：arXiv：0704.3194 [math. DG]. https://arXiv. org/abs/0704. 3194.

[2] CHOI H，SEO K. L^p Harmonic 1-Forms on Minimal Hypersurfaces with Finite Index [J]. J Geom Phys，2018，129：125-132.

[3] PALMER B. Stability of Minimal Hypersurfaces [J]. Comment Math Helv，1991，66(1)：185-188.

[4] TANNO S. L^2 Harmonic Forms and Stability of Minimal Hypersurfaces [J]. J Math Soc Japan，1996，48(4)：761-768.

[5] CHENG X. L^2 Harmonic Forms and Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature [J]. Bol Sol Beas Mat，2000，31(2)：225-239.

[6] NI L. Gap Theorems for Minimal Submanifolds in R^{n+1} [J]. Gomm Anal Geom，2001，9(3)：641-656.

[7] CAVALCANTE M P，MIRANDOLA H，VITÓRIO F. L^2 Harmonic 1-Forms on Submanifolds with Finite Total Curvature [J]. J Geom Anal，2014，24(1)：205-222.

[8] ZHU P，FANG S W. A Gap Theorem on Submanifolds with Finite Total Curvature in Spheres [J]. J Math Anal Appl，2014，413(1)：195-201.

[9] ZHU P，FANG S W. Finiteness of Non-Parabolic Ends on Submanifolds in Spheres [J]. Ann Global Anal Geom，2014，46(2)：187-196.

[10] 周俞洁，张泽宇，王林峰. 黎曼流形上 p-Laplace 算子的 Liouville 定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(10)：62-68.

[11] SEO K. L^p Harmonic 1-Forms and First Eigenvalue of a Stable Minimal Hypersurface [J]. Pacific J Math，2014，268(1)：205-229.

[12] HAN Y B，PAN H. L^p Harmonic 1-Forms on Submanifolds in a Hadamard Manifold [J]. J Geom Phys，2016，107：79-91.

[13] 马　蕾，刘建成. 局部对称空间中常平均曲率超曲面的拼挤定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(2)：5-9.

[14] SHIOHAMA K，XU H W. The Topological Sphere Theorem for Complete Submanifolds [J]. Compos Math，1997，107(2)：221-232.

[15] LI P. Lecture Notes on Geometric Analysis [D]. California：University of California，1996.

[16] GALDERBANK D M，GAUDUCHON P，HERZLICH M. Refined Kato Inequalities and Conformal Weights in Riemannian Geometry [J]. J Funct Anal，2000，173(1)：214-255.

The Vanishing Theorems of L^p Harmonic 1-Forms on Submanifolds in Spheres

Yao Zhong-wei，　Liu Jian-cheng

School of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Let M^m ($m \geqslant 3$) be a complete noncompact submanifold in sphere $\mathscr{S}^{m+n}$. Studying the vanishing theorems of L^p ($p \geqslant 2$) harmonic 1-forms on M^m. Let $\boldsymbol{\Phi}$ denote the traceless second fundamental form of M^m, then the total curvature of M^m be defined by $\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L^m(M)} = (\int_M |\boldsymbol{\Phi}|^m \mathrm{d}M)^{\frac{1}{m}}$, where $\mathrm{d}M$ denotes the volume element of M^m. First, assume that the total curvature of M^m is less than a constant which only depends on the dimension of M^m and p, it shows that there is no nontrivial L^p harmonic 1-forms on M^m byusing Bochner formula, the bottom estimate of Ricci curvature and Sobolev inequality of M^m in spheres, themethod of cut off function and the condition of L^p. Second, assume that the maximal norm of $\boldsymbol{\Phi}$ arebounded from above by a constant only depends on m, it shows that there is no nontrivial L^p harmonic 1-forms on M^m by using the same method.

Key words：L^p harmonic 1-forms；vanishing theorem；total curvature；traceless tensor

责任编辑　廖　坤