DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.05.016

一类带有分数拉普拉斯算子的抛物方程的解在任意初始能量下的爆破性[①]

江蓉华[1,2]，　周　军[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 抚州一中，江西 抚州 344100

摘要：研究了一类带有分数拉普拉斯算子的抛物方程. 在任意初始能量的条件下，证明了解在有限时刻爆破，且得到了爆破时间的上界估计.

关　键　词：分数拉普拉斯算子；爆破；爆破时间

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)05-0121-05

本文研究如下带有分数拉普拉斯算子的抛物方程：

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u = |u|^{q-2} u & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$ 是一个任意有界的开集，$0 < s < 1$，

$$2 \leqslant q \leqslant 2^* \begin{cases} = \dfrac{2N}{N-2s} & N > 2s \\ \in [2, \infty) & N \leqslant 2s \end{cases} \tag{2}$$

其中 2^* 定义见文献[1]. $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 是分数拉普拉斯算子，其定义如下：

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x) := C_{N,s} \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}y \tag{3}$$

其中

$$C_{N,s} := \frac{s 2^{2s} \Gamma\left(\frac{2s+N}{2}\right)}{\prod^{\frac{N}{2}} \Gamma(1-s)}$$

是标准化的常数，Γ 是通常的 Gamma 函数.

分数次 Sobolev 空间[2-3]. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个任意开子集，对于 $s \in (0,1)$，我们定义

$$W^{s,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega): \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+ps}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y < \infty \right\}$$

其范数定义为

---

① 收稿日期：2017-12-18

基金项目：国家自然科学基金项目(11201380)；重庆市基础科学与前沿技术研究专项项目(cstc2016jcyjA0804).

作者简介：江蓉华(1994-)，女，硕士，主要从事非线性偏微分方程的研究.

通信作者：周　军，教授.

$$\| u \|_{W^{s,2}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^2 \mathrm{d}x + \frac{C_{N,s}}{2}\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

对一个任意开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$，我们令

$$W_0^{s,2}(\overline{\Omega}) = \{u \in W^{s,2}(\mathbb{R}^N): u = 0 \text{ a.e. } on\ \mathbb{R}^N \backslash \Omega\}$$

显然 $W_0^{s,2}(\overline{\Omega})$ 是 $W^{s,2}(\Omega)$ 的子空间，且通过简单计算可知 $W_0^{s,2}(\overline{\Omega})$ 存在等价范数 $|||\cdot|||$，其定义为

$$||| u |||^2 = \left(\frac{C_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

由文献[4] 知存在一个常数 $C > 0$ 使得对任意 $u \in W_0^{s,2}(\Omega)$ 有

$$\| u \|_q \leqslant C\, ||| u |||_{W_0^{s,2}(\Omega)},\ \forall q \in [2, 2^*] \tag{4}$$

特别地，如果 Ω 是有界的，则(4) 式对任意的 $q \in [1, 2^*]$ 成立.

初始值 $u_0(x) \in W_0^{s,2}(\overline{\Omega})$，$W_0^{s,2}(\overline{\Omega})$ 是分数次 Sobolev 空间，其范数定义为

$$||| u |||_{W_0^{s,2}(\overline{\Omega})} = \left(\frac{C_{N,s}}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

近期，关于分数拉普拉斯算子的抛物方程被广泛研究[5-14]. 在文献[2] 中，作者研究了对于问题(1) 的弱解($u_0 \in L^2(\Omega)$) 和强解($u_0 \in L^\infty(\Omega)$) 的存在条件. 此外，作者还研究了解的动力学行为，如有限维全局吸引子的存在性，平衡态解的全局稳定性等. 文献[3] 利用势井法研究了问题(1)，并在假设初始能量 $J(u_0) < E_0$ 的条件下得到了解的爆破条件，其中，J 定义为

$$J(u) := \frac{C_{N,s}}{4}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{1}{q}\int_{\Omega} |u|^q \mathrm{d}x,\ \forall u \in W_0^{s,2}(\overline{\Omega}) \tag{6}$$

$$E_0 := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)C^{-\frac{2q}{q-2}}$$

这里 $C > 0$ 是由(4) 式给出的 Sobolev 常数.

本文将继续研究问题(1) 解的爆破条件. 为了介绍本文的主要结果，首先介绍文献[2] 中的一些定义和结论：

$$I(u) := \frac{C_{N,s}}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\Omega} |u|^q \mathrm{d}x,\ \forall u \in W_0^{s,2}(\overline{\Omega})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(u(t)) = -\| u_t \|_2^2 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\| u(t) \|_2^2\right) = -I(u)$$

本文的主要结论是如下定理，该定理揭示了问题(1) 的解在任意初始能量下都可能发生爆破.

定理 1　设 $q \in (2, 2^*]$ 且初始值 $u_0 \in W_0^{s,2}(\overline{\Omega})$ 满足：

$$J(u_0) < \frac{q-2}{2C^2 q}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\| u_0 \|_2^2 \tag{8}$$

其中 $C > 0$ 是(4) 式给出的 Sobolev 常数，则问题(1) 的解 $u(t)$ 在有限时间 $T_{\max}$ 爆破且

$$T_{\max} \leqslant \frac{2qC^2\| u_0 \|_2^2}{(q-2)^2|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\| u_0 \|_2^2 - 2C^2 q(q-2)J(u_0)}$$

我们将通过下面引理 1 来证明定理 1. 引理 1 的证明可参见文献[15].

引理 1　若 $F(t) \in C^2[0, T)$ 是一个非负函数且满足

$$F''(t)F(t) - (1+r)(F'(t))^2 \geqslant 0$$

其中 $0 < T \leqslant +\infty$，r 是一个正常数. 如果 $F(0) > 0$ 和 $F'(0) > 0$，则有

$$T \leqslant \frac{F(0)}{rF'(0)} < +\infty$$

且当 $t \to T$ 时，$F(t) \to +\infty$.

定理 1 的证明　定理的证明分为解的爆破及爆破时间的上界估计两个步骤.

第一步（解的爆破）　若 $u(t)$ 是问题(1)的初始值满足不等式(8)的解. 如果存在时间 t_0 使得 $J(u(t_0)) \leqslant 0$，则由文献[3]的结论可知解在有限时间内爆破. 因此在下面的证明中我们始终假设 $J(u(t)) \geqslant 0$. 我们用反证法来证明定理，假设 $u(t)$ 全局存在，定义函数

$$\phi(t) := \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 - \frac{C^2 q}{q-2}|\Omega|^{\frac{q-2}{q}} J(u(t)),\ t \geqslant 0$$

根据(7)式、不等式(4)和 Hölder 不等式以及 $J(u(t)) \geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= -I(u(t)) + \frac{C^2 q}{q-2}|\Omega|^{\frac{q-2}{q}}\|u_t\|_2^2 \geqslant \\ &\frac{q-2}{2}|||u|||^2_{W_0^{s,2}(\bar{\Omega})} - qJ(u(t)) \geqslant \\ &\frac{q-2}{2C^2}\|u\|_q^2 - qJ(u(t)) \geqslant \\ &\frac{q-2}{2C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u\|_2^2 - qJ(u(t)) = \frac{q-2}{C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\phi(t)\end{aligned}$$

以及

$$\phi(0) = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{C^2 q}{q-2}|\Omega|^{\frac{q-2}{q}}J(u_0) > 0$$

于是由 Gronwall 不等式可知

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 \geqslant \phi(t) \geqslant \phi(0)\mathrm{e}^{\frac{q-2}{C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}t} \tag{9}$$

另一方面，由(7)式、Hölder 不等式以及 $J(u(t)) \geqslant 0$ 可得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_2 &\leqslant \|u_0\|_2 + \int_0^t \|u_s\|_2 \mathrm{d}s \leqslant \\ &\|u_0\|_2 + t^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t \|u_s(s)\|_2^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\|u_0\|_2 + t^{\frac{1}{2}}[J(u_0) - J(u(t))]^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\|u_0\|_2 + J(u_0)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{10}$$

根据不等式(9),(10)，我们可以得到

$$\sqrt{2\phi(0)}\,\mathrm{e}^{\frac{q-2}{2C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}t} \leqslant \|u_0\|_2 + J(u_0)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}},\ t \geqslant 0$$

当 t 足够大时，上述不等式不可能成立，故矛盾. 因此 $u(t)$ 在有限时间 $T_{\max}$ 内爆破.

第二步（爆破时间的上界）　我们先证明 $I(u(t)) < 0$，$t \in [0, T_{\max})$. 我们知道

$$\begin{aligned}I(u_0) &= \frac{2-q}{2}|||u_0|||^2_{W_0^{s,2}(\bar{\Omega})} + qJ(u_0) \leqslant \\ &\frac{2-q}{2C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2 + qJ(u_0) < 0\end{aligned}$$

如果 $I(u(t)) < 0$，$t \in [0, T_{\max})$ 不成立，则存在 $t_0 \in [0, T_{\max})$，使得 $I(u(t_0)) = 0$ 和 $I(u(t)) < 0$，$t \in [0, t_0)$. 根据(7)式知 $\|u(t)\|_2^2$ 在 $t \in [0, t_0]$ 是单调递增的，则有

$$J(u_0) < \frac{q-2}{2C^2 q}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2 \leqslant \frac{q-2}{2C^2 q}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u(t_0)\|_2^2 \tag{11}$$

根据 $J(u(t))$ 的单调递减性、(4)式和 Hölder 不等式有

$$J(u_0) \geqslant J(u(t_0)) = \frac{q-2}{2q}|||u(t_0)|||^2_{W_0^{s,2}(\bar{\Omega})} \geqslant$$

$$\frac{q-2}{2C^2q}\|u_0\|_q^{\ 2}\geqslant\frac{q-2}{2C^2q}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2$$

与(11)式矛盾，故 $I(u(t))<0$，$t\in[0,T_{\max})$.

下面我将利用引理 1 估计 $T_{\max}$ 的上界. 取

$$\beta=\frac{q-2}{2qC^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2-J(u_0)$$

$$\alpha=\frac{\|u_0\|_2^4}{\beta}=\frac{2qC^2\|u_0\|_2^4}{(q-2)|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2-2qC^2J(u_0)}$$

并构建一个新函数

$$F(t):=\int_0^t\|u\|_2^2\mathrm{d}s+t\|u_0\|_2^2+\alpha$$

由(7)式和 $\|u(t)\|_2^2$ 在 $t\in[0,T_{\max})$ 上的严格单调递增性有

$$F'(t)=\|u\|_2^2+\|u_0\|_2^2\geqslant 0$$

$$F''(t)=-2I(u(t))\geqslant\frac{q-2}{C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|^2-2qJ(u_0)+2q\int_0^t\|u_s\|_2^2\mathrm{d}s$$

$$F(0)=\alpha>0,\ F'(0)=2\|u_0\|_2^2>0$$

取

$$A(t)=\left[\int_0^t\|u_s(s)\|_2^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B(t)=\left[\int_0^t\|u(s)\|_2^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}}$$

根据 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}-(F'(t))^2=&-4\left[\frac{1}{2}(\|u(t)\|_2^2-\|u_0\|_2^2)+\|u_0\|_2^2\right]^2=\\&-4\left[\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(s)\|_2^2\mathrm{d}s+\|u_0\|_2^2\right]^2=\\&-4\left[\int_0^t\int_\Omega u(s)u_s(s)\mathrm{d}s+\|u_0\|_2^2\right]^2\geqslant\\&-4[A(t)B(t)+\|u_0\|_2^2]^2=\\&4\{[A^2(t)+\beta][B^2(t)+\alpha]-[A(t)B(t)+\|u_0\|_2^2]^2\}-\\&4[F(t)-t\|u_0\|_2^2][A^2(t)+\beta]\geqslant\\&-4F(t)[A^2(t)+\beta]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F''(t)F(t)-\frac{q}{2}(F'(t))^2\geqslant&F''(t)F(t)-2qF(t)[A^2(t)+\beta]=\\&F(t)[F''(t)-2qA^2(t)-2q\beta]=\\&F(t)\left[\frac{q-2}{C^2}|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2-2qJ(u_0)-2q\beta\right]\geqslant 0\end{aligned}$$

于是由引理 1 可得

$$T_{\max}\leqslant\frac{2qC^2\|u_0\|_2^2}{(q-2)^2|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}\|u_0\|_2^2-2C^2q(q-2)J(u_0)}$$

参考文献:

[1] CAPONI M, PUCCI P. Existence Theorems for Entire Solutions of Stationary Kirchhoff Fractional p-Laplacian Equations [J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2016, 195(6): 2099-2129.

[2] FISCELLA A，SERVADEI R，VALDINOCI E. Density Properties for Fractional Sobolev Spaces [J]. Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica，2015，40(1)：235-253.

[3] GAL C G，WARMA M. Reaction-Diffusion Equations with Fractional Diffusion on Non-SmoothDomains with various Boudary Conditions [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems，2016，36(3).

[4] LIONS J L，MAGENES E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications [M]. Berlin：Springer-Verlag，1972.

[5] ADAMS D R，HEDBERG L I. Function Spaces and Potential Theory [M]. Berlin：Springer-Verlag，1996，265(2)：249-263.

[6] DIPIERRO S，PALATUCCI G，VALDINOCI E. Existence and Symmetry Results for a SchrödingerType Problem Involving the Fractional Laplacian [J]. Le Matematiche (Catania)，2013，68(1)：201-216.

[7] FELMER P，QUAAS A，TAN J. Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with theFractional Laplacian [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh，2012，142(6)：1237-1262.

[8] FISCELLA A，PUCCI P. p-Fractional Kirchhoff Equations Involving Critical Nonlinearities [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2017，35：350-378.

[9] 赵文波，李中平. 一类指数边界非局部扩散方程的爆破 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(3)：69-73.

[10] GAL C G，WARMA M. On some Degenerate Non-Local Parabolic Equation Associated with theFractionalp-Laplacian [J]. Dynamics of Partial Differential Equations，2016，14(1).

[11] LEVINE H A. Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equation of the Form $Pu_{tt}=-Au+F(u)$ [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1974，192：1-21.

[12] XIANG M Q，GIOVANNI M B，TIAN G H，et al. Infinitely Many Solutions for theStationary Kirchhoff Problems Involving the Fractional p-Laplacian [J]. Nonlinearity，2016，29(2)：357.

[13] NEZZA E D，PALATUCCI G，VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bulletin Des Sciences Mathématiques，2012，136(5)：521-573.

[14] WARMA M. The Fractional Relative Capacity and the Fractional Laplacian with Neumann and Robin Boundary Conditions on Open Sets [J]. Potential Analysis，2015，42(2)：499-547.

[15] GRISVARD P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains [M]. Marshfield：Pitman Publishing Inc，1985.

Blow-up of the Solutions to a Parabolic Equation with Fractional Laplace Operator at the Arbitrary Initial Energy Level

JIANG Rong-hua[1,2]，　ZHOU　Jun[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. Fuzhou No. 1 Midddle School，Fuzhou Jiangxi 344100，China

Abstract：In this paper，we consider a parabolic equation with the fraction Laplace operator. We prove that there exist blow-up solutions with arbitrary initial energy，and then we estimate the upper bound of the blow-up time.

Key words：fractional Laplace operator；blow-up；blow-up time

责任编辑　张　枸