DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.05.017

NSD 序列加权和的完全收敛性及其应用

蔡 婷， 胡宏昌

湖北师范大学 数学与统计学院，湖北 黄石 435002

摘要：研究了 NSD(negatively superadditive dependent) 随机变量序列的极限定理. 利用截尾技术和 NSD 随机变量序列的性质讨论了 NSD 随机变量加权和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ni}x_i$ 的完全收敛性，并将其结果应用于含参数 β 的最小二乘估计的线性回归模型中及关于 g 的权函数非参数回归模型估计中，分别得到了强相合性.

关 键 词：NSD 随机变量序列；加权和；完全收敛性

中图分类号：O211.1 **文献标志码：A** **文章编号：**1673-9868(2020)05-0126-06

设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 NSD 随机变量序列，a_{ni} 为双下标下三角常数列，即当 $i\geqslant n$ 时，$a_{ni}=0$. 考虑加权和：

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i$$

完全收敛性[1] 是极限理论中的重要研究内容. 在实际的应用中，更多的是随机变量序列加权和的情况，所以对相依序列加权和的完全收敛性问题的研究成为人们所关注的焦点.

定义 1[1] 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是定义在概率空间 (Ω, A, P) 上的随机变量序列. 若存在常数 θ，对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(|X_n-\theta|>\varepsilon)<\infty$$

则称 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 完全收敛于 θ.

很多学者对完全收敛性展开了广泛的研究[2-8]. 本文研究 NSD[5] 随机变量序列加权和的完全收敛性，并将其结果应用于含参数 β 的最小二乘估计[9-10] 的线性回归模型中及关于 g 的权函数非参数回归模型估计中，得到了强相合性定理[11-15]. 本文结论改进了文献[5] 中的相应结果，下面给出 NSD 随机变量的概念.

定义 2[5] 函数 Φ：$\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 称为超可加的，如果对任意的 $x, y\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\Phi(x\vee y)+\Phi(x\wedge y)\geqslant\Phi(x)+\Phi(y)$$

其中：记号"$\vee$"表示两者之间的最大值，"$\wedge$"表示两者之间的最小值.

定义 3[5] 随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为负超可加相依(NSD)，如果满足

$$\boldsymbol{E}\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n)\leqslant\boldsymbol{E}\phi(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$$

其中 $\phi(\cdot)$ 是超可加函数，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 相互独立，且对任意的 i，X_i 和 Y_i 同分布.

1 相关引理

引理 1[5] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 NSD 随机变量序列，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 均为非降的函数，则随机变量

收稿日期：2017-09-05
基金项目：国家自然科学基金项目(11471105)；湖北省教育厅科学技术研究项目(Q20172505).
作者简介：蔡 婷(1991-)，女，博士研究生，主要从事概率极限的研究.
通信作者：胡宏昌，教授.

$f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$ 仍是 NSD 随机变量序列.

引理 2[7]　设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是 NSD 随机变量序列，$\boldsymbol{E}X_n = 0$，$\boldsymbol{E}|X_n|^p < \infty$，$p \geqslant 2$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$，则存在一个仅与 p 和$\rho(\circ)$有关的正常数 $C = C(p, \rho(\circ))$，有

$$\boldsymbol{E}\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|^p \leqslant C\exp\left\{\left(C\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho(2^i)\right)\left(n\max_{1\leqslant m\leqslant n}\boldsymbol{E}|X_m|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\} +$$

$$n\exp\left\{\left(C\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho^{\frac{2}{p}}(2^i)\right)\max_{1\leqslant m\leqslant n}\boldsymbol{E}|X_m|^p\right\}$$

2　主要结果及证明

定理 1　设$\{X_i, i \geqslant 1\}$为 NSD 随机变量序列，$\boldsymbol{E}X_i = 0$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$. 对于 $1 < P \leqslant 2$，存在 $S \in \left(\frac{1}{P}, 1\right]$，有

$$\sup_{i\geqslant 1}\boldsymbol{E}|X_i|^p < \infty \tag{1}$$

对于 $P > 2$，存在 $S \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$，使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}| = O(n^{-s}) \tag{2}$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j| > \varepsilon) < \infty \tag{3}$$

证　分以下两种情况讨论.

(i) 对于 $1 < P \leqslant 2$ 与 S 必存在 $S_0 \in \left(\frac{1}{P}, S\right]$，使得

$$S_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{j}(a_{ni}X_i^{(n)} - a_{ni}\boldsymbol{E}X_i^{(n)}) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $X_i^{(n)} \triangleq X_i I_{(|x_i| \leqslant n^{s_0})}$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j| > \varepsilon) \leqslant P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| > n^{s_0}) + P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j^{n}| > \varepsilon) -$$

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{i=1}^{j} a_{ni}X_i^{(n)}|) \tag{4}$$

由 $\boldsymbol{E}X_i = 0$，(1) 及(2) 式可得

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\sum_{i=1}^{j} a_{ni}\boldsymbol{E}X_i^{(n)}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_{ni}\boldsymbol{E}X_i I(X_i) > n^{s_0}| \ll n^{1-s+s_0(1-p)} \to 0 \tag{5}$$

因此当 n 充分大时，由(4) 及(5) 式知

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j| > \varepsilon) < \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > n^{s_0}) + P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j^{(n)}| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

即证以下(6),(7) 式成立.

$$I =: \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > n^{s_0}) < \infty \tag{6}$$

$$II =: \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j^{(n)}| > \frac{\varepsilon}{2}) < \infty \tag{7}$$

由(1) 式得

$$I \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\boldsymbol{E}|X_j|^p}{n^{s_0 p}} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s_0 p} < \infty \tag{8}$$

由引理2知

$$
\begin{aligned}
II \ll & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \boldsymbol{E} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j^{(n)}|^q \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \Big\{ \exp((C \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i))(n \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |a_{ni} X_j^{(n)}|^2)^{\frac{q}{2}} + \\
& n \exp(C \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho^{\frac{2}{q}}(2^i)) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |a_{ni} X_j^{(n)}|^q \Big\} =: II_1 + II_2
\end{aligned} \tag{9}
$$

当 $i \to \infty$ 时，$\rho(2^i) \to 0$，故存在 $n_0 > 1$，$i > n_0$ 时，有

$$
\rho(2^i) \leqslant \frac{s - s_0}{C}
$$

则对 $\forall n \geqslant 1$，

$$
\exp(C \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)) = \exp(C \sum_{i=0}^{n_0} \rho(2^i)) \cdot \exp(C \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)) \ll n^{s-s_0} \tag{10}
$$

令 $q = 2$，则

$$
\begin{aligned}
II_1 = & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \exp(C \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)) n \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |a_{ni} X_j^{(n)}|^2 \leqslant \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-s_0} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |a_{ni} X_j^{(n)}|^2 I(|X_j| \leqslant n^{s_0}) \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s+s+s_0+(2-p)s_0} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |X_j|^p I(|X_j| \leqslant n^{s_0}) \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ps_0-(s-s_0)} < \infty \\
II_2 = & \sum_{n=1}^{\infty} \exp(C \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |a_{ni} X_j^{(n)}|^2 \leqslant \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-s_0} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |a_{ni} X_j^{(n)}|^2 I(|X_j| \leqslant n^{s_0}) \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s+s+s_0+(2-p)s_0} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \boldsymbol{E} |X_j|^p I(|X_j| \leqslant n^{s_0}) \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ps_0-(s-s_0)} < \infty
\end{aligned} \tag{11}
$$

将(11)式代入(9)式得 $II < \infty$，故(3)式完全成立.

(ⅱ) 对于 $p > 2$，对于情况(ⅱ)中的 s，存在 $s_0 \in \left(\frac{1}{2}, s\right)$，可得 $ps_0 > 1$. 由(ⅰ)的证明可得(3)式成立. 结合(ⅰ)和(ⅱ)两种情况，可得定理1成立. 证毕.

由(3)式可推得 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$ a.s.，故由定理1可推出文献[5]中的定理1.

推论1 设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为NSD随机变量序列，$\boldsymbol{E}X_i = 0$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$，且 $\sup\limits_{i \geqslant 1} \boldsymbol{E} |X_i|^p < \infty$ 对于 $p > 2$. 若 $s \in (\frac{1}{2}, 1]$，使得 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_{ni}| = O(n^{-s})$，则

$$
\lim_{n \to \infty} S_n = 0, \text{ a. s.}
$$

证 由(3)式，可得 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$ a.s.，故从定理1可得推论1成立.

注1 由推论1可得文献[5]中的推论，即推论1对比文献[5]放宽了对加权系数 a_{ni} 的限制.

定理2 设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为NSD随机变量序列，$\boldsymbol{E}X_i = 0$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$，若存在 $b_i \geqslant 0$，使

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| \geqslant b_i) < \infty \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}\boldsymbol{E}(X_i I(|X_i| \geqslant b_i)) \to 0 \qquad n \to \infty$$

若存在 $s_1 \in \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2}, 1\right]$，$s_2 > 2$ 对于 $r > 2$，有

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|a_{ni}|^2 \boldsymbol{E}X_i^{\,2} I(|X_i| < b_i)\}^{\frac{r}{2}} = O(n^{-s_1})$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|a_{ni}|^r \boldsymbol{E}X^r I(|X_i| < b_i)\} = O(n^{-s_2})$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| > \varepsilon) < \infty$$

证　$\forall i \geqslant 1$，令 $X_i^{(n)} = X_i I(|X_i| < b_i)$，$S_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{j}(a_{ni}X_i^{(n)} - a_{ni}\boldsymbol{E}X_i^{(n)})$. 则类似于定理 1 的证明可得定理 2 的证明.

推论 2　设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为 NSD 随机变量序列，$\boldsymbol{E}X_i = 0$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$，且 $\sup_{i \geqslant 1}\boldsymbol{E}X_i < \infty$，$r > 2$，若存在 $s \in \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2}, 1\right]$，使得

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_{ni}| = O(n^{-s})$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| > \varepsilon) < \infty$$

证　在定理 2 中取 $b_i = i^s$，易得定理 2 的条件满足，结合定理 2 的证明即得推论 2 成立.

3　线性回归模型中的应用

$$y_i = x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \cdots + x_{ip}\beta_p + e_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{12}$$

其中 $\{x_{ij}\}$ 为已知的设计点列，$\boldsymbol{\Lambda} = (\beta_1, \cdots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$ 为未知的回归系数向量，e_i 为随机误差，记 β 的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_n = (\hat{\beta}_{n1}, \cdots, \hat{\beta}_{np}^{\mathrm{T}})$. 则由文献[8] 知

$$\hat{\beta}_{nj} - \beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{(j)} e_i}{A_n^{(j)}} \qquad j = 1, 2, \cdots, p \tag{13}$$

其中 $A_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{n}(a_{ni}^{(i)})^2 = \frac{1}{V_{jj}^{(n)}}$，$(V_{ij}^{(n)})_{p \times p} = (\boldsymbol{X}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_n)^{-1}$，$\boldsymbol{X}_n = (x_{ij})_{n \times p}$.

于是，对固定的 $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$，令 $a_{nk} = \frac{a_{nk}^{(j)}}{A_n^{(j)}}$，$k = 1, 2, \cdots, n$. 则由定理 2 及(13) 式得以下定理 3.

定理 3　设(12) 式中随机误差 $\{e_i, i \geqslant 1\}$ 为 NSD 随机变量序列，满足 $\boldsymbol{E}e_i = 0$. 若存在 $b_i \geqslant 0$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |e_i| \geqslant b_i) < \infty$$

$$\frac{1}{A_n^{(j)}} \sum_{i=1}^{n} a_{ni}{}^j \boldsymbol{E}(e_i I(|e_i| \geqslant b_i)) \to 0 \qquad n \to \infty$$

对于 $r \geqslant 2$，若存在 $s_1 (s_1 > \frac{r}{2} + 1)$，$s_2 (s_2 > 2)$，使得

$$(A_n^{(j)})^{-r} \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|a_{ni}{}^j|^2 \boldsymbol{E}e_i{}^2(|e_i| < b_i)\}^{\frac{r}{2}} = O(n^{-s_1})$$

$$(A_n^{(j)})^{-r} \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|a_{ni}{}^j|^r \boldsymbol{E}e_i{}^r(|e_i| < b_i)\}^{\frac{r}{2}} = O(n^{-s_2})$$

则对于有 $j=1,2,\cdots,p$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\beta}_{nj}=\beta_j$, a. s..

2) 非参数回归模型中的应用

设 p 是一个正整数, A 是 $\mathbb{R}^p$ 中一个紧集, 考虑以下回归模型

$$Y_i^{(n)}=g(X_i^{(n)})+\varepsilon_i^{(n)} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

其中 $X_1^{(n)},\cdots,X_n^{(n)}\in A$ 为已知的非随机设计点列, g 为未知的实函数, $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(n)},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(n)}$ 为均值为 0 的随机向量. 取 $g(x)$ 的权函数估计为

$$g_n(x)=\sum_{i=1}^n W_{ni}(x)Y_i^{(n)} \qquad x\in A\subset\mathbb{R}^p \tag{15}$$

下面给出 $g_n(x)$ 在 NSD 序列下的强相合性, 现作如下基本假设

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n W_{ni}(x)=1$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^n|W_{ni}(x)|\leqslant C<\infty$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum\limits_{i=1}^n W_{ni}(x)(g(x_i)-g(x))I(|x_i^{(n)}-x|>a)\right|=0$, $\forall a>0$.

定理 4 设模型(14) 基本条件 (i),(ii) 和 (iii) 成立, $\{\varepsilon_i^{(n)}, i\geqslant 1\}$ 为 NSD 随机变量序列, 且当 $r>2$ 时,

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n,\ n\geqslant 1}\boldsymbol{E}|\varepsilon_i^{(n)}|^r<\infty \tag{16}$$

若存在某个正数 $s\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, 使

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|W_{ni}(x)|=O(n^{-s}) \tag{17}$$

则 $\forall x\in c(g)$, 其中 $c(g)$ 为 g 的连续点集, 有

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x), \text{ a. s.} \tag{18}$$

证 由于

$$|g_n(x)-g(x)|\leqslant|g_n(x)-\boldsymbol{E}g_n(x)|+|\boldsymbol{E}g_n(x)-g(x)|$$

由文献[13] 引理 3 知

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{E}g_n(x)=g(x) \qquad \forall x\in c(g)$$

由于

$$g_n(x)-\boldsymbol{E}g_n(x)=\sum_{i=1}^n W_{ni}(x)\varepsilon_i^{(n)}$$

再由推论 2 知

$$\lim_{n\to\infty}|g_n(x)-\boldsymbol{E}g_n(x)|=0 \text{ a. s.}$$

因此(18) 式得证.

参考文献:

[1] HSU P L, ROBBINS H. Complete Convergence and the Law of Large Numbers [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1947, 33(2): 25-31.

[2] 章 茜, 蔡光辉. WOD 随机变量序列的完全收敛性和矩完全收敛性 [J]. 数学物理学报(A 辑), 2019, 39(5): 1183-1191.

[3] 黄海午, 邹 航, 易艳春. 行为渐近几乎负相关随机变量阵列加权和的完全矩收敛性 [J]. 数学进展, 2019, 48(1): 110-120.

[4] SUNG S H. A Note on the Complete Convergence for Arrays of Dependent Random Variables [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2011, 2011: 76.

[5] HU T Z. Negatively Superadditive Dependence of Random Variables with Applications [J]. Chinese Journal of Applied

Probability and Statistics, 2000, 16(2): 133-144.

[6] ZHANG L R, ZHANG J J. Strong Consistency of Estimators under Missing Responses [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2019, 7(1): 93-103.

[7] FUK D K, NAGAEV S V. Probability Inequalities for Sums of Independent Random Variables [J]. Theory of Probability & Its Applications, 1971, 16(4): 643-660.

[8] LIANG H Y, JING B Y. Asymptotic Properties for Estimates of Nonparametric Regression Models Based on Negatively Associated Sequences [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2005, 95(2): 227-245.

[9] HU H C. Bahadur Representations of M-estimators and Their Applications in General Linear Models [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018: 123.

[10] DU J, ZHANG Z Z, XIE T F. A Weighted M-estimator for Linear Regression Models with Randomly Truncated Data [J]. Statistics & Probability Letters, 2018, 138: 90-94.

[11] BAO X H, LIN J J, WANG X J, et al. On Complete Convergence for Weighted Sums of Arrays of Rowwise END Random Variables and Its Statistical Applications [J]. Mathematica Slovaca, 2019, 69(1): 223-232.

[12] WANG X H, LI X Q, HU S H. On the Complete Convergence of Weighted Sums for an Array of Rowwise Negatively Superadditive Dependent Random Variables [J]. ScienceAsia, 2016, 42(1): 66.

[13] 邱德华，陈平炎，肖　娟. END 随机变量序列加权和的矩完全收敛性 [J]. 应用数学学报，2017，40(3)：436-448.

[14] YANG W Z, XU H Y, CHEN L, et al. Complete Consistency of Estimators for Regression Models Based on Extended Negatively Dependent Errors [J]. Statistical Papers, 2018, 59(2): 449-465.

[15] WANG X J, WU Y, HU S H. Strong and Weak Consistency of LS Estimators in the EV Regression Model with Negatively Superadditive-dependent Errors [J]. Advances in Statistical Analysis, 2018, 102(1): 41-65.

Complete Convergence for the Weighted Sums of NSD Sequences and Its Application

CAI Ting, HU Hong-chang

College of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi Hubei 435002, China

Abstract: In this paper, we investigate some limit theorems for weighted sums of sequences of NSD random variables. By using the truncation technique and the properties of sequences of NSD random variables, we obtain the complete convergence for weighted sums of sequences of NSD random variables. Applying these results to the linear regression model containing the least square estimation of parameter β, and to the estimation of the nonparametric regression model of the weight function about g, we obtain their strong consistency.

Key words: sequence of negatively superadditive dependent random variables; weighted sum; complete convergence

责任编辑　张　枸