

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.06.005

新型反软亚 BCI-代数

黄 昱¹, 廖祖华²

1. 无锡太湖学院 基础课教学部, 江苏 无锡 214064; 2. 江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122

摘要: 提出了新型反软亚 BCI-代数、软集的对偶投影、软集的软压缩和软集的对偶合成等新概念, 给出了新型反软亚 BCI-代数在软集的或、限制并、对偶投影、软平移、软压缩等运算下的基本性质, 运用软集的对偶合成、软集的反对偶和软集的反水平集分别给出了新型反软亚 BCI-代数的等价刻画, 最后利用软集的反扩张原理讨论了新型反软亚 BCI-代数在同态映射下反像和原像的性质.

关键词: 亚 BCI-代数; 软集; 反软亚 BCI-代数; 反对偶软集; 同态映射

中图分类号: O159

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2020)06-0038-08

BCK/BCI-代数是两类重要的逻辑代数, 分别对应于组合逻辑中的 BCK-系统和 BCI-系统. BCI-代数是 BCK-代数的推广. BCK/BCI-代数与量子逻辑及许多著名逻辑代数都有关联^[1]. BCH-代数是 BCI-代数的推广^[2]. 文献[3]提出了亚 BCI-代数及其理想的概念, 国外也有相同的研究工作, 称之为 Q-代数^[4], 亚 BCI-代数是 BCH-代数的推广. 随后, 文献[5-7]分别引入了亚 BCI-代数的模糊理想、Q-代数的区间值 $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -模糊子代数以及 Q-代数中具有界限的模糊子代数的概念并研究了它们的相关性质.

软集的概念是由文献[8]提出的, 它弥补了模糊集、粗糙集等理论在处理不确定性问题时所面临的参数工具上的不足. 软集理论已被应用于数据分析、近似推理、不确定性决策等诸多领域. 将软集与代数系统相融合是研究的热点之一. 文献[9]将软集与群论相结合, 提出了软群的概念, 由此开创了软集代数的研究领域. 文献[10]所引进的 I-V Fuzzy 子半群实质上是一种特殊的软代数结构. 文献[11]提出了模糊软环的概念, 并研究了生成模糊软环的充要条件. 文献[12-13]提出了软 BCK/BCI-代数和 BCK/BCI-代数的软理想概念. 文献[14]进一步把软集思想应用于 BCK-代数, 研究了软 BCK-代数的运算性质. 文献[15]将软集理论与格论相结合, 提出了软格和软子格的概念, 并讨论了它们的基本性质.

文献[16]将参数集赋予群的代数结构, 提出了新型软群的概念. 这种将参数集赋予代数结构的方法引入的软集代数可以得到更深刻的结果. 文献[17-19]利用这一思想, 研究了一系列新的软集代数, 并通过类比反模糊代数结构^[20]的思想, 给出了一些反软代数的代数结构^[21-23].

本文相对于新型软亚 BCI-代数的研究^[24-27], 提出了新型反软亚 BCI-代数的新概念. 因 BCI-代数在推理中有重要应用, 所得结果均为一个值, 但软集是子集, 推理取值一个范围更符合实际情况. 另外, 类似于模糊推理中的三 I 算法的反三 I 算法也在模糊推理中有用^[28], 于是新型反软亚 BCI-代数在近似推理中也有潜在的应用价值.

收稿日期: 2019-05-19

基金项目: 江苏省高等学校自然科学研究项目(19KJD100006); 国家自然科学基金项目(61170121); 江苏省自然科学基金项目(BK20151117).

作者简介: 黄 昱(1981-), 女, 副教授, 主要从事模糊集和软集代数的研究.

通信作者: 廖祖华, 教授.

1 预备知识

定义 1^[3] 一个 $(2, 0)$ -型代数 $(X, *, 0)$ 如果满足条件: $\forall x, y, z \in X$, 有

- (a) $x * 0 = x$;
- (b) $x * x = 0$;
- (c) $(x * y) * z = (x * z) * y$.

则称 X 为一个亚 BCI-代数.

定义 2^[3] 设 S 是亚 BCI-代数 X 的非空子集, 如果对 $\forall x, y \in S$, 有 $x * y \in S$, 则称 S 为 X 的子代数.

注 1 任意子代数 S 都包含 0 , 因为 $\forall x \in S$, 有 $0 = x * x \in S$.

定理 1^[18] 设 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一族亚 BCI-子代数, I 为一非空集合, 则 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 也是 X 的亚 BCI-子代数.

定义 3^[8] 设 U 是一个初始集合, E 是参数集, $A \subseteq E$, $P(U)$ 是 U 的幂集, 设 $F: A \longrightarrow P(U)$ 为一个映射, 则称 (F, A) 是 U 上的软集, 也称 F 为 A 的软集.

定义 4^[29] 设 X 是一个参数集, X 上的犹豫模糊集定义为从 X 到 $[0, 1]$ 幂集的一个函数, 数学表示如下:

$$H_X = \{(x, h_X(x)) \mid x \in X\}$$

其中 $h_X: X \longrightarrow P([0, 1])$.

定义 5 设 A, B 是两个非空集合, 称 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 为 A, B 的笛卡尔积.

定义 6^[30] 设 $(H_1, X_1), (H_2, X_2)$ 为 U 上的软集, 若 $H(x, y) = H_1(x) \cup H_2(y)$, $\forall (x, y) \in X_1 \times X_2$, 则称 $(H, X_1 \times X_2)$ 是 (H_1, X_1) 与 (H_2, X_2) 的或运算, 记作 $(H_1, X_1) \vee (H_2, X_2)$.

定理 2^[18] 设 X_1, X_2 是两个亚 BCI-代数, 那么在 $X_1 \times X_2$ 上规定运算 $*$:

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 * y_1, x_2 * y_2) \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$$

则 $(X_1 \times X_2, *, (0, 0))$ 也是亚 BCI-代数.

定义 7^[31] 设 $(H_1, X_1), (H_2, X_2)$ 为 U 上的软集, 若软集 $(H, X_1 \cap X_2)$ 满足:

- (a) $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$;
- (b) $\forall x \in X_1 \cap X_2$, 有 $H(x) = H_1(x) \cup H_2(x)$.

则称 $(H, X_1 \cap X_2)$ 是软集 (H_1, X_1) 和 (H_2, X_2) 的限制并, 记作 $(H, X_1 \cap X_2) = (H_1, X_1) \cup_R (H_2, X_2)$.

定义 8^[21] 设 $H: X \longrightarrow P(U)$, $x \in X$, $H(x)$ 为一个软集, 则称 $\bar{A}_H: U \longrightarrow P(X)$, $u \in U$, $\bar{A}_H(u) = \{x \mid u \notin H(x)\}$ 为软集 H 的反对偶.

设 $A: U \longrightarrow P(X)$ 为一个软集, 则称 $\bar{H}_A: X \longrightarrow P(U)$, $x \in X$, $\bar{H}_A(x) = \{u \mid x \notin A(u)\}$ 为软集 A 的反对偶.

定义 9^[26] 设 X 是任一参数集, $H: X \longrightarrow P(U)$ 是一个软集, $\lambda \in P(U)$, 对于 $\forall x \in X$, $H'_\lambda(x) = H(x) \cup \lambda$ 称为 H 相对于 λ 的一个软平移.

定义 10^[26] 设 (F, A) 是 A 上的软集, (G, B) 是 B 上的软集, 若满足:

- (a) $A \subseteq B$;
- (b) $\forall x \in A$, 有 $F(x) \subseteq G(x)$.

则称 (F, A) 是 (G, B) 的弱软子集, 记作 $(F, A) \subseteq (G, B)$.

注 2 显然, 若 $(F, A) \subseteq (G, B)$ 且 $(G, B) \subseteq (F, A)$, 则 $(F, A) = (G, B)$.

定义 11 设 X, Y 是两个亚 BCI-代数, 映射 $f: X \longrightarrow Y$, 若 $\forall x, y \in X$, 有 $f(x * y) = f(x) * f(y)$, 则称 f 为 X 到 Y 的同态.

当 f 分别是满射、单射、双射时, 称 f 分别是满同态、单同态、同构.

定义 12^[21] 设 $f: X_1 \longrightarrow X_2$ 是一个映射, $H_1: X_1 \longrightarrow P(U)$, $H_2: X_2 \longrightarrow P(U)$ 均为软集, $\forall x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, 定义

$$\tilde{f}(H_1)(x_2) = \begin{cases} \bigcap_{f(x_1)=x_2} H_1(x_1) & f^{-1}(x_2) \neq \emptyset \\ U & f^{-1}(x_2) = \emptyset \end{cases}$$

$$f^{-1}(H_2)(x_1) = H_2(f(x_1))$$

则 $\tilde{f}(H_1), f^{-1}(H_2)$ 分别是 X_2 和 X_1 上的软集, 称 $\tilde{f}(H_1)$ 为 H_1 的反像, $f^{-1}(H_2)$ 为 H_2 的原像.

定义 13^[18] 设 X_1, X_2 为两个集合, $f: X_1 \rightarrow X_2$ 是 X_1 到 X_2 的映射, H_1 是 X_1 上的软集, $\forall x, y \in X_1$, 当 $f(x) = f(y)$ 时, 有 $H_1(x) = H_1(y)$, 则称 H_1 是关于 f 不变的.

定义 14^[18] 设 (F, X) 是亚 BCI-代数 X 的一个软集合, 若 $\forall x \in X, F(x) \neq \emptyset$ 是 X 的一个子代数, 则称 (F, X) 为通常的亚 BCI-代数 X 上的软亚 BCI-代数.

定义 15^[18] 设 X 是亚 BCI-代数, $H: X \rightarrow P(U)$ 是一个软集, 若 $\forall x, y \in X$, 满足 $H(x * y) \supseteq H(x) \cap H(y)$, 则称 H 是 X 的一个新型软亚 BCI-代数, 记为 (H, X) .

2 新型反软亚 BCI-代数

将参数集赋予亚 BCI-代数, 得到新型反软亚 BCI-代数的概念, 并研究它们在软集运算下的相关性质.

定义 16 设 X 是亚 BCI-代数, $H: X \rightarrow P(U)$ 是一个软集, 若 $\forall x, y \in X$, 满足 $H(x * y) \subseteq H(x) \cup H(y)$, 则称 H 是 X 的一个新型反软亚 BCI-代数, 记为 $(H, X)_A$. 在不引起混淆的情况下, 简称为反软亚 BCI-代数, 简记为 (H, X) .

当 $U = [0, 1]$ 时, 相应地就得到反犹豫模糊亚 BCI-代数的定义.

定义 17 设 X 是亚 BCI-代数, $H: X \rightarrow P([0, 1])$ 是一个犹豫模糊集, 若 $\forall x, y \in X$, 满足

$$H(x * y) \subseteq H(x) \cup H(y)$$

则称 H 是 X 的反犹豫模糊亚 BCI-代数.

因此我们获得的反软亚 BCI-代数的性质对反犹豫模糊亚 BCI-代数也成立(反犹豫模糊代数到目前为止还未见研究).

下面的例子说明新型反软亚 BCI-代数的存在性.

例 1 设有初始集合 $U = X = \{0, 1, 2, 3\}$, 在 X 上 $*$ 运算的定义为

$*$	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	1	1
2	2	2	0	0
3	3	3	0	0

由文献[26]知 $(X, *, 0)$ 是亚 BCI-代数. 又令 $H: X \rightarrow P(U)$, $H(0) = \emptyset$, $H(1) = \{1, 3\}$, $H(2) = \{0\}$, $H(3) = \{0, 1, 2\}$, 由定义得 H 是 X 的反软亚 BCI-代数. 因为 $H(1) = \{1, 3\}$ 不是 X 的子代数, 所以 H 不是通常的软亚 BCI-代数. 又因为 $H(2 * 3) = H(0) = \emptyset$ 不包含 $H(2) \cap H(3) = \{0\}$, 所以 H 也不是新型软亚 BCI-代数. 因此反软亚 BCI-代数是一个新的代数结构.

由定义 16 易知, 如果 H 是一个反软亚 BCI-代数, 则 $\forall x \in X$, 有 $H(0) \subseteq H(x)$.

定理 3 设 X_1, X_2 是亚 BCI-代数 X 的两个子代数, H_1, H_2 分别是 X_1, X_2 的反软亚 BCI-代数, 若 $(H, X_1 \cap X_2) = (H_1, X_1) \cup_R (H_2, X_2)$, 则 H 是 $X_1 \cap X_2$ 的反软亚 BCI-代数.

证 因 X_1, X_2 是亚 BCI-代数 X 的两个子代数, 由定理 1 知, $X_1 \cap X_2$ 也是 X 的子代数. $\forall x, y \in X_1 \cap X_2$, 有 $x * y \in X_1$, 则

$$H(x * y) = H_1(x * y) \cup H_2(x * y) \subseteq [H_1(x) \cup H_1(y)] \cup [H_2(x) \cup H_2(y)] = [H_1(x) \cup H_2(x)] \cup [H_1(y) \cup H_2(y)] = H(x) \cup H(y)$$

所以, H 是 $X_1 \cap X_2$ 的反软亚 BCI-代数.

定义 18 设 $(F, X_1), (G, X_2)$ 是 U 上的软集, $X = X_1 \times X_2$, 且 $(H, X) = (F, X_1) \vee (G, X_2)$, 规定: $H_{X_1}: X_1 \rightarrow P(U)$, $H_{X_1}(x) = \bigcap_{y \in X_2} H(x, y)$, $\forall x \in X_1$, 则称 H_{X_1} 为 (H, X) 在 X_1 上的对偶投

影. 同理可定义 (H, X) 在 X_2 上的对偶投影 H_{X_2} .

定理 4 设 (F, X_1) 和 (G, X_2) 分别是亚 BCI-代数 X_1 和 X_2 上的软集, $X = X_1 \times X_2$, 且 $(H, X) = (F, X_1) \vee (G, X_2)$,

(i) 如果 (F, X_1) 和 (G, X_2) 分别是 X_1 和 X_2 上的反软亚 BCI-代数, 则 (H, X) 是 X 上的反软亚 BCI-代数;

(ii) 如果 (H, X) 是 X 上的反软亚 BCI-代数, 则 (H_{X_1}, X_1) 和 (H_{X_2}, X_2) 分别是 X_1 和 X_2 上的反软亚 BCI-代数.

证 (i) X_1, X_2 是两个亚 BCI-代数, 由定理 2 知, $X_1 \times X_2$ 也是亚 BCI-代数. $\forall x, y \in X_1 \times X_2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, 其中 $x_i, y_i \in X_i (i = 1, 2)$, 则

$$\begin{aligned} H(x * y) &= H((x_1, x_2) * (y_1, y_2)) = H(x_1 * y_1, x_2 * y_2) = F(x_1 * y_1) \cup G(x_2 * y_2) \subseteq \\ &[F(x_1) \cup F(y_1)] \cup [G(x_2) \cup G(y_2)] = \\ &[F(x_1) \cup G(x_2)] \cup [F(y_1) \cup G(y_2)] = H(x_1, x_2) \cup H(y_1, y_2) = \\ &H(x) \cup H(y) \end{aligned}$$

则 (H, X) 是 X 上的反软亚 BCI-代数.

(ii) $\forall x, y \in X_1$, 有

$$\begin{aligned} H_{X_1}(x) \cup H_{X_1}(y) &= (\bigcap_{w \in X_2} H(x, w)) \cup (\bigcap_{w_1 \in X_2} H(y, w_1)) = \\ &\bigcap_{w \in X_2} (H(x, w) \cup H(0, 0)) \cup (\bigcap_{w_1 \in X_2} H(y, w_1)) = \\ &\bigcap_{w \in X_2} (F(x) \cup G(w) \cup H(0, 0)) \cup (\bigcap_{w_1 \in X_2} H(y, w_1)) = \\ &H(0, 0) \cup F(x) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) \cup F(y) \cup (\bigcap_{w_1 \in X_2} G(w_1)) = \\ &F(0) \cup (F(x) \cup G(0)) \cup (F(y) \cup G(0)) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) \supseteq \\ &H(x, 0) \cup H(y, 0) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) \supseteq H((x, 0) * (y, 0)) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) = \\ &H(x * y, 0) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) = \\ &F(x * y) \cup G(0) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) \supseteq F(x * y) \cup (\bigcap_{w \in X_2} G(w)) = \\ &\bigcap_{w \in X_2} (F(x * y) \cup G(w)) = \bigcap_{w \in X_2} H(x * y, w) = H_{X_1}(x * y) \end{aligned}$$

所以, (H_{X_1}, X_1) 是 X_1 上的反软亚 BCI-代数. 同理可证 (H_{X_2}, X_2) 是 X_2 上的反软亚 BCI-代数.

定义 19 设 X 是任一参数集, $H: X \longrightarrow P(U)$ 是一个软集, $\lambda \in P(U)$, 对于 $\forall x \in X, H_\lambda^c(x) = H(x) \cap \lambda$ 称为 H 相对于 λ 的一个软压缩.

定理 5 设 X 为亚 BCI-代数, $H: X \longrightarrow P(U)$ 为一个软集, $\lambda \in P(U)$, 如果 H 是 X 的反软亚 BCI-代数, 则:

(i) H 相对于 λ 的软压缩 H_λ^c 是 X 的反软亚 BCI-代数;

(ii) H 相对于 λ 的软平移 H_λ' 是 X 的反软亚 BCI-代数.

证 (i) $\forall x, y \in X$, 有

$$\begin{aligned} H_\lambda^c(x * y) &= H(x * y) \cap \lambda \subseteq [H(x) \cup H(y)] \cap \lambda = \\ &[H(x) \cap \lambda] \cup [H(y) \cap \lambda] = H_\lambda^c(x) \cup H_\lambda^c(y) \end{aligned}$$

因此, H_λ^c 是 X 的反软亚 BCI-代数.

(ii) $\forall x, y \in X$, 有

$$\begin{aligned} H_\lambda'(x * y) &= H(x * y) \cup \lambda \subseteq [H(x) \cup H(y)] \cup \lambda = \\ &[H(x) \cup \lambda] \cup [H(y) \cup \lambda] = H_\lambda'(x) \cup H_\lambda'(y) \end{aligned}$$

因此, H_λ' 是 X 的反软亚 BCI-代数.

定理 6 设 X 为亚 BCI-代数, $H: X \longrightarrow P(U)$ 为一个软集, $\Sigma_H = U - \bigcup_{x \in X} H(x)$, 如果存在 $\lambda \subseteq \Sigma_H$, 使得 H 相对于 λ 的软平移 H'_λ 是 X 的反软亚 BCI-代数, 则 H 是 X 的反软亚 BCI-代数.

证 若存在 $\lambda \subseteq \Sigma_H$, 使得 H 相对于 λ 的软平移 H'_λ 是 X 的反软亚 BCI-代数, 则对 $\forall x, y \in X$, 有

$$H'_\lambda(x * y) \subseteq H'_\lambda(x) \cup H'_\lambda(y)$$

即

$$H(x * y) \cup \lambda \subseteq (H(x) \cup \lambda) \cup (H(y) \cup \lambda) = [H(x) \cup H(y)] \cup \lambda$$

$\forall z \in H(x * y)$, 有 $z \in H(x * y) \cup \lambda \subseteq [H(x) \cup H(y)] \cup \lambda$. 因为 $z \notin \lambda$, 所以 $z \in H(x * y)$, 即 $H(x) \cap H(y) \subseteq H(x * y)$.

因此, H 是 X 的反软亚 BCI-代数.

3 新型反软亚 BCI-代数的等价刻画

本节利用对偶合成运算、反对偶软集及软集的反水平集给出了新型反软亚 BCI-代数的等价刻画.

定义 20 设 X 是亚 BCI-代数, (F, X) 和 (G, X) 分别为 X 的两个软集. 定义 $(F \circ G, X)$ 为

$$(F \circ G)(z) = \bigcap_{x * y = z} (F(x) \cup G(y)) \quad \forall z \in X$$

则 $(F \circ G, X)$ 是 X 的软集, 并称 $F \circ G$ 为两个软集的对偶合成.

因 $\forall z \in X, z * 0 = z$, 于是 X 中的元素均有分解式 $x * y = z$ 成立, 所以定义 20 是合理的.

定理 7 设 X 为亚 BCI-代数, $H: X \longrightarrow P(U)$ 为一个软集, 则 H 是 X 的反软亚 BCI-代数的充要条件是 $(H^2, X) = (H, X)$.

证 必要性 $\forall z \in X$, 有

$$H^2(z) = \bigcap_{x * y = z} (H(x) \cup H(y)) \supseteq \bigcap_{x * y = z} H(x * y) = H(z)$$

故

$$(H, X) \subseteq_{\sim} (H^2, X)$$

又由定理 1 知

$$H(0) \subseteq H(x) \quad H(z) = H(z) \cup H(0) \supseteq \bigcap_{x * y = z} (H(x) \cup H(y)) = H^2(z)$$

故 $(H^2, X) \subseteq_{\sim} (H, X)$, 由注 2 知 $(H^2, X) = (H, X)$.

充分性 若 $(H^2, X) = (H, X)$, 则 $\forall x, y \in X$, 有

$$H(x * y) = H^2(x * y) = \bigcap_{x_1 * y_1 = xy} (H(x_1) \cup H(y_1)) \subseteq H(x) \cup H(y)$$

所以 H 是 X 的反软亚 BCI-代数.

定理 8 设 X 为亚 BCI-代数, 则下列结论成立:

(i) $H: X \longrightarrow P(U)$ 为 X 的反软亚 BCI-代数的充要条件是 $\forall u \in U, \overline{A}_H(u) \neq \emptyset$ 为 X 的一个亚 BCI-子代数;

(ii) $A: U \longrightarrow P(X)$ 是一个软集, 则 $\forall u \in U, A(u) \neq \emptyset$ 为 X 的一个亚 BCI-子代数的充要条件是 $\overline{H}_A$ 为 X 的反软亚 BCI-代数.

证 (i) 必要性 $\forall u \in U$, 若 $\overline{A}_H(u) \neq \emptyset$, 则 $\forall x, y \in \overline{A}_H(u)$, 有 $u \notin H(x)$ 且 $u \notin H(y)$, 故 $u \notin H(x) \cup H(y)$. 因 $H: X \longrightarrow P(U)$ 为 X 的反软亚 BCI-代数, 所以 $H(x * y) \subseteq H(x) \cup H(y)$, 故 $u \notin H(x * y)$, 即 $x * y \in \overline{A}_H(u)$, 因此 $\overline{A}_H(u)$ 是 X 的一个亚 BCI-子代数.

充分性 $\forall x, y \in X$, 当 $H(x) \cup H(y) = U$ 时, 有 $H(x * y) \subseteq H(x) \cup H(y)$; 当 $H(x) \cup H(y) \neq U$ 时, 对 $\forall u \notin H(x) \cup H(y)$, 有 $u \notin H(x)$ 且 $u \notin H(y)$, 进而 $x \in \overline{A}_H(u)$ 且 $y \in \overline{A}_H(u)$. 由 $\overline{A}_H(u) \neq \emptyset$ 为 X 的一个亚 BCI-子代数, 所以 $x * y \in \overline{A}_H(u)$, 故 $u \notin H(x * y)$, 从而 $H(x * y) \subseteq H(x) \cup H(y)$, 因此 H 是 X 的反软亚 BCI-代数.

(ii) 必要性 $\forall x, y \in X$, 当 $\overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y) = U$ 时, 有 $\overline{H}_A(x * y) \subseteq \overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y)$; 当 $\overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y) \neq U$ 时, 对 $\forall u \notin \overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y)$, 有 $x \in A(u)$ 且 $y \in A(u)$. 由 $A(u) \neq \emptyset$ 为 X 的一个亚 BCI-

子代数, 所以 $x * y \in A(u)$, 故 $u \notin \overline{H}_A(x * y)$, 从而 $\overline{H}_A(x * y) \subseteq \overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y)$, 因此 $\overline{H}_A$ 是 X 的反软亚 BCI-代数.

充分性 $\forall u \in U$, 若 $A(u) \neq \emptyset$, 则 $\forall x, y \in A(u)$, 有 $u \notin \overline{H}_A(x)$ 且 $u \notin \overline{H}_A(y)$, 故 $u \notin \overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y)$. 由 $\overline{H}_A$ 为 X 的反软亚 BCI-代数, 有 $\overline{H}_A(x * y) \subseteq \overline{H}_A(x) \cup \overline{H}_A(y)$, 故 $u \notin \overline{H}_A(x * y)$, 即 $x * y \in A(u)$, 因此 $A(u)$ 是 X 的亚 BCI-子代数.

定理 9 设 X 为亚 BCI-代数, $H: X \longrightarrow P(U)$ 为软集, 则 H 是 X 的反软亚 BCI-代数的充分必要条件是 H 的反 α -水平集 $\widetilde{H}_\alpha = \{x \mid H(x) \subseteq \alpha, \alpha \in P(U)\} \neq \emptyset$ 为 X 的子代数.

证 **必要性** 若 $\widetilde{H}_\alpha \neq \emptyset$, $\forall x, y \in \widetilde{H}_\alpha$, 则 $H(x) \subseteq \alpha$, $H(y) \subseteq \alpha$. 由 H 是 X 的反软亚 BCI-代数, 则 $H(x * y) \subseteq H(x) \cup H(y) \subseteq \alpha \cup \alpha = \alpha$, 即 $x * y \in \widetilde{H}_\alpha$, 所以 $\widetilde{H}_\alpha$ 是 X 的子代数.

充分性 $\forall x, y \in X$, 令 $H(x) \cup H(y) = \alpha$, 有 $H(x) \subseteq \alpha$ 且 $H(y) \subseteq \alpha$, 那么 $x \in \widetilde{H}_\alpha$ 且 $y \in \widetilde{H}_\alpha$. 由 $\widetilde{H}_\alpha \neq \emptyset$ 是 X 的子代数知 $x * y \in \widetilde{H}_\alpha$, 则 $H(x * y) \subseteq \alpha = H(x) \cup H(y)$.

因此, H 是 X 的反软亚 BCI-代数.

4 新型反软亚 BCI-代数的反像与原像

本节给出反软亚 BCI-代数的反像与原像的性质.

定理 10 设 X_1, X_2 为两个亚 BCI-代数, U 是初始集合. $f: X_1 \longrightarrow X_2$ 为同态映射, $H_1: X_1 \longrightarrow P(U)$, $H_2: X_2 \longrightarrow P(U)$ 为两个软集, 那么下列结论成立:

- (i) 若 H_1 为 X_1 的反软亚 BCI-代数, 则 $\widetilde{f}(H_1)$ 为 X_2 的反软亚 BCI-代数;
- (ii) 若 H_2 为 X_2 的反软亚 BCI-代数, 则 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的反软亚 BCI-代数.

证 (i) $\forall x_2, y_2 \in X_2$, 若 x_2 或 y_2 没有原像, 由反扩张原理知, $\widetilde{f}(H_1)(x_2) = U$ 或 $\widetilde{f}(H_1)(y_2) = U$, 所以 $\widetilde{f}(H_1)(x_2) \cup \widetilde{f}(H_1)(y_2) = U \supseteq \widetilde{f}(H_1)(x_2 * y_2)$. 若 x_2, y_2 均有原像, 当 $\widetilde{f}(H_1)(x_2) \cup \widetilde{f}(H_1)(y_2) = U$ 时, 结论显然成立; 当 $\widetilde{f}(H_1)(x_2) \cup \widetilde{f}(H_1)(y_2) \neq U$ 时, $\forall u \notin \widetilde{f}(H_1)(x_2) \cup \widetilde{f}(H_1)(y_2)$, 有 $u \notin \bigcap_{f(x)=x_2} H_1(x)$ 且 $u \notin \bigcap_{f(y)=y_2} H_1(y)$. 故存在 $x_1 \in X_1$, 使得 $f(x_1) = x_2$ 且 $u \notin H_1(x_1)$, 且存在 $y_1 \in X_1$, 使得 $f(y_1) = y_2$ 且 $u \notin H_1(y_1)$, 因此 $u \notin H_1(x_1) \cup H_1(y_1)$. 若 H_1 为 X_1 的反软亚 BCI-代数, 有 $H_1(x_1 * y_1) \subseteq H_1(x_1) \cup H_1(y_1)$, 则 $u \notin H_1(x_1 * y_1)$. 因 f 是同态映射, 有 $f(x_1 * y_1) = f(x_1) * f(y_1) = x_2 * y_2$, 故 $u \notin \bigcap_{f(x_1 * y_1)=x_2 * y_2} H_1(x_1 * y_1) = \widetilde{f}(H_1)(x_2 * y_2)$, 即 $\widetilde{f}(H_1)(x_2 * y_2) \subseteq \widetilde{f}(H_1)(x_2) \cup \widetilde{f}(H_1)(y_2)$.

(ii) 由于 H_2 为 X_2 的反软亚 BCI-代数, 所以 $\forall x_1, y_1 \in X_1$, 有

$$\begin{aligned} f^{-1}(H_2)(x_1) \cup f^{-1}(H_2)(y_1) &= H_2(f(x_1)) \cup H_2(f(y_1)) \supseteq H_2(f(x_1) * f(y_1)) = \\ &= H_2(f(x_1 * y_1)) = f^{-1}(H_2)(x_1 * y_1) \end{aligned}$$

故 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的反软亚 BCI-代数.

定理 11 设 X_1, X_2 为两个亚 BCI-代数, $f: X_1 \longrightarrow X_2$ 为一个满同态映射, $H_2: X_2 \longrightarrow P(U)$ 为软集, 则 H_2 为 X_2 的反软亚 BCI-代数的充要条件是 $f^{-1}(H_2)$ 为 X_1 的反软亚 BCI-代数.

证 **必要性** 由定理 10(ii) 知结论成立.

充分性 $\forall x_2, y_2 \in X_2$, 因为 f 是满同态映射, 所以存在 $x_1, y_1 \in X_1$, 使得 $x_2 = f(x_1)$, $y_2 = f(y_1)$, 且 $x_2 * y_2 = f(x_1) * f(y_1) = f(x_1 * y_1)$. 又因为 $f^{-1}(H_2)$ 是 X_1 的反软亚 BCI-代数, 所以

$$\begin{aligned} H_2(x_2) \cup H_2(y_2) &= H_2(f(x_1)) \cup H_2(f(y_1)) = \\ &= f^{-1}(H_2)(x_1) \cup f^{-1}(H_2)(y_1) \supseteq f^{-1}(H_2)(x_1 * y_1) = \\ &= H_2(f(x_1 * y_1)) = H_2(f(x_1) * f(y_1)) = H_2(x_2 * y_2) \end{aligned}$$

故 H_2 为 X_2 的反软亚 BCI-代数.

定理 12 设 X_1, X_2 为两个亚 BCI-代数, U 是初始集合. $f: X_1 \longrightarrow X_2$ 为一个同态映射, $H_1: X_1 \longrightarrow P(U)$ 为软集, 且 H_1 是关于 f 不变的, 则 H_1 为 X_1 的反软亚 BCI-代数的充要条件是 $\tilde{f}(H_1)$ 为 X_2 的反软亚 BCI-代数.

证 必要性 由定理 10(i) 知结论成立.

充分性 $\forall x_1, y_1 \in X_1$, 设 $f(x_1) = x_2, f(y_1) = y_2$, 因 f 是同态映射, 有

$$f(x_1 * y_1) = f(x_1) * f(y_1) = x_2 * y_2$$

由反扩张原理和 H_1 是 f -不变的, 有

$$H_1(x_1 * y_1) = \bigcap_{f(x)=x_2 * y_2} H_1(x) = \tilde{f}(H_1)(x_2 * y_2),$$

$$H_1(x_1) = \bigcap_{f(x)=x_2} H_1(x) = \tilde{f}(H_1)(x_2)$$

$$H_1(y_1) = \bigcap_{f(x)=y_2} H_1(x) = \tilde{f}(H_1)(y_2)$$

又因 $\tilde{f}(H_1)$ 为 X_2 的反软亚 BCI-代数, 所以有

$$H_1(x_1 * y_1) = \tilde{f}(H_1)(x_2 * y_2) \subseteq \tilde{f}(H_1)(x_2) \cup \tilde{f}(H_1)(y_2) = H_1(x_1) \cup H_1(y_1)$$

因此 H_1 是 X_1 的反软亚 BCI-代数.

5 结 论

本文给出了新型反软亚 BCI-代数的新的逻辑结构, 运用软集的多种运算研究了它们的一系列基本性质. 特别地, 当 $U = [0, 1]$ 时, 得到了反犹豫模糊亚 BCI-代数的定义及性质, 是对当前犹豫模糊代数相应结果的推广. 进一步将研究亚 BCI-代数的其它新型反软理想.

参考文献:

- [1] 刘用麟. BCK/BCI 代数若干理论综述 (I) [J]. 武夷学院学报, 2008, 27(2): 4-9.
- [2] WANG F X. T-Fuzzy -Ideals of BCH-Algebras [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2011, 33(12): 103-108.
- [3] 陈 露, 蒲义书. 亚 BCI-代数及其理想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2005, 21(3): 250-254.
- [4] NEGGERS J, AHN S S, KIM H S. On Q-Algebras [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2001, 27(12): 749-757.
- [5] 彭家寅. 亚 BCI-代数的模糊理想 [J]. 模糊系统与数学, 2010, 24(5): 37-41.
- [6] PENG J Y. Interval Valued $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -Fuzzy Subalgebras of Q-Algebras [J]. 内江师范学院学报, 2011, 26(6): 1-5.
- [7] PENG J Y. Fuzzy Subalgebras with Thresholds in Q-Algebras [J]. 内江师范学院学报, 2011, 26(8): 1-5.
- [8] MOLODTSOW D. Soft Set Theory-First Results [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4-5): 19-31.
- [9] AKTAS H, CAGMAN N. Soft Sets and Soft Groups [J]. Information Science, 2007, 177: 2726-2735.
- [10] 陈 露. 半群的 I-V Fuzzy 子半群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2010, 32(4): 93-96.
- [11] 鲍俊颖. 关于模糊软环的一点探讨 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(10): 7-12.
- [12] JUN Y B. Soft BCK/BCI-Algebras [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(5): 1408-1413.
- [13] JUN Y B, PARK C H. Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK/BCI-Algebras [J]. Information Sciences, 2008, 178: 2466-2475.
- [14] 伏文清, 李生刚. 软 BCK-代数 [J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(10): 5-6, 10.
- [15] 邵迎超, 朱振国, 秦克云. 软集与软格 [J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(3): 10-14.
- [16] 温永川. 关于软集的研究 [D]. 大连: 辽宁师范大学, 2008.
- [17] 张龙祥, 廖祖华, 王 琪, 等. 新型软域 [J]. 智能系统学报, 2015, 10(6): 858-864.
- [18] 廖翠萃, 廖祖华, 张龙祥, 等. 新型软亚 BCI-代数 [J]. 计算机科学, 2016, 43(1): 22-24, 60.
- [19] 李巧燕, 廖祖华, 刘维龙. (α, β) -软 BCK 代数 [J]. 计算机科学与探索, 2016, 10(10): 1493-1500.
- [20] BISWAS R. Fuzzy Subgroups and Anti Fuzzy Subgroups [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 35(1): 121-124.
- [21] 吴修竹, 廖祖华, 刘维龙, 等. 反软子半群 [J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(5): 44-50.

- [22] 童 娟, 廖祖华, 路 腾, 等. 反软子坡 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(2): 215-221.
- [23] 童 娟, 廖祖华, 赵衍才, 等. 格的反软理想 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(1): 33-39.
- [24] HUANG Y, LIAO Z H. (α, β) -Soft Ideals of Weak-BCI-Algebras [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2018, 38(6): 577-585.
- [25] 黄 昱, 廖祖华, 李 论. 亚 BCI-代数的新型软正关联理想 [J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(21): 31-36.
- [26] 黄 昱, 廖祖华, 李 论. 新型软亚 BCI-代数的进一步研究 [J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(23): 31-35, 67.
- [27] 黄 昱, 廖祖华. 亚 BCI-代数的新型软理想 [J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(5): 55-62.
- [28] 王国俊, 刘华文, 宋建社. 三 I 方法综述—它的提出、发展、应用和逻辑版本 [J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(6): 1-14.
- [29] TORRA V. Hesitant Fuzzy Sets [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [30] MAJI P K, BISWAS R, ROY A R. Soft Set Theory [J]. Computers Mathematics with Applications, 2003, 45(4): 555-562.
- [31] ALI M I, FENG F, LIU X Y, et al. On Some New Operations in Soft Set Theory [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(9): 1547-1553.

A New Type of Anti-soft Weak-BCI-Algebras

HUANG Yu¹, LIAO Zu-hua²

1. Department of Basic Course Teaching, Wuxi Taihu University, Wuxi Jiangsu 214064, China;

2. School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China

Abstract: In this paper, the notions of “a new-type of anti-soft weak-BCI-algebra”, “dual projection of soft sets”, “soft compression of soft sets” and “dual compositional operation of soft sets” are introduced. By using OR operation, restricted union, dual projection, soft translation and soft compression on soft sets, some properties of the anti-soft weak-BCI-algebra are obtained. The equivalent characterizations of the new type of anti-soft weak-BCI-algebras are given by applying dual compositional operation, anti-dual soft sets and anti-level sets on soft sets. Finally, the properties of the anti-image and inverse image of the new-type anti-soft weak-BCI-algebra under homomorphic mappings are discussed based on the anti-extension principle of soft sets.

Key words: weak-BCI-algebra; soft set; anti-soft weak-BCI-algebra; anti-dual soft set; homomorphic mapping

责任编辑 廖 坤