第 42 卷第 6 期 西南大学学报(自然科学版) 2020 年 6 月
Vol. 42 No. 6 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jun. 2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.06.006

Vague 软 Clifford 半群

于晓丹, 孔祥智

江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122

摘要: Vague 软集融合了 Vague 集和软集的优点, 是一种处理不确定性问题的重要工具, 关于它的代数结构的研究有很多. Clifford 半群是一种完全正则半群, 它是逆半群中很特殊也很重要的一个类别. 基于 Vague 软集和 Clifford 半群的现有理论知识, 首次将 Vague 软集和 Clifford 半群相结合, 把 Clifford 半群模糊化, 提出新概念 Vague 软 Clifford 半群, 它是 Vague 软集的一个新代数结构, 接着给出了 Vague 软 Clifford 半群的等价性和 Vague 软 Clifford 子半群的定义, 并研究了 Vague 软 Clifford 半群的基本代数性质. 首先, 证明了: 任意两个 Vague 软 Clifford 半群的交集、并集仍是 Vague 软 Clifford 半群. 其次, 证明了: Vague 软 Clifford 半群是群的半格且是群的强半格, 并且它是正则半群, 给出了 Vague 软 Clifford 半群的半群结构分解. 最后, 给出了两个 Vague 软 Clifford 半群间的同态定义, 并且验证了 Vague 软 Clifford 半群之间的同态关系.

关 键 词: Vague 软集; Clifford 半群; Vague 软 Clifford 半群; 半群同态

中图分类号: O159 **文献标志码: A** **文章编号:** 1673-9868(2020)06-0046-08

在现实生活中, 由于事物变化的随机性和复杂性, 以及人类知识的不完全、不可靠、不精确和不一致性, 人类对客观事物的认识都会有不确定性. 为解决这些不确定性问题, 文献[1]首先开创了 Fuzzy 集理论, 但这一理论存在一定缺陷, 它限制隶属函数值为唯一的单值, 为解决这一缺陷, 文献[2]提出了 Vague 集理论, 它是 Fuzzy 集理论的推广, 通过引入一对真、假隶属度函数, 可以同时显示出决策者进行一项决策时所掌握的支持度、反对度和未知度等相关信息. 但是 Fuzzy 集和 Vague 集理论存在共同的缺陷: 它们都只能处理一部分模糊信息. 文献[3]通过引入软集理论弥补了这一缺陷, 该理论引入了参数化思想, 克服了 Vague 集只能处理部分不确定性信息的不足. 文献[4]将 Vague 集和软集相结合, 首次提出了 Vague 软集的概念, Vague 软集目前已经成为一种新的研究方向. 关于 Vague 软集的代数结构的相关研究也有很多[5-8], 这些代数结构不但为代数研究提供新思路, 同时为 Vague 软集的深入研究提供了理论基础, 为解决工程学、医疗科学、经济学等复杂的不确定问题的研究提供了有力的数学工具. 半群代数理论是在群论、环论之后发展起来的代数理论分支, 它的研究方法与研究内容与群论、环论有很大差别[9], 这一理论在组合数学、数据挖掘及算子理论等方面都有很好的应用, 得到国内外众多学者的关注[10-11]. 逆半群作为半群理论的重要组成部分, 研究内容比较丰富, Clifford 半群就是一种特殊的逆半群, 它是一种完全正则半群[9], 由于其特殊性, 它有一些重要的性质, 如: Clifford 半群是由群构成的半格, 其幂等元与半群中的任

收稿日期: 2019-09-04
基金项目: 国家自然科学基金项目(11371174, 11301227).
作者简介: 于晓丹(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事模糊代数的研究.
通信作者: 孔祥智, 教授.

意元素可交换等. Clifford 半群是逆半群的重要类别，关于它的相关研究有很多[12-16]，因此十分重要.

本文试图将 Vague 软集和 Clifford 半群联系在一起，提出新概念 Vague 软 Clifford 半群，这样做不仅可以把二者的研究方法及理论应用到对方的研究中去，还能为二者的研究提供新思路，并为以后的深入研究奠定基础.

1　预备知识

定义 1[2]　设 U 是点(对象)空间，其中任意元素用 x 表示，U 上的 Vague 集用真隶属度函数 $t_A(x)$ 和假隶属度函数 $f_A(x)$ 表示，$t_A(x)$ 是从支持 x 的证据导出的 x 的肯定隶属度下界，$f_A(x)$ 是从反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界，$t_A(x)$：$U \longrightarrow [0, 1]$，$f_A(x)$：$U \longrightarrow [0, 1]$，其中 $t_A(x)+f_A(x) \leqslant 1$. 称$[t_A(x), 1-f_A(x)]$ 为 x 在 A 中的 Vague 值，记为 $A(x)$，论域 U 上 Vague 集的全体用 $V(U)$ 表示.

定义 2[3]　设 U 是论域，$P(U)$ 是 U 的幂集，E 是参数集，$A \subseteq E$，且 F：$A \longrightarrow P(U)$ 是一个映射，称 $F(A)$ 为 U 上的软集.

定义 3[4]　设 U 是论域，E 是参数集，$A \subseteq E$，且 F：$A \longrightarrow V(U)$ 是一个映射，即 $\forall e \in A$，$F(e)$ 是 U 上的一个 Vague 集，称 $F(A)$ 为 U 上的一个 Vague 软集.

定义 4[9]　设 S 为非空集合且具有二元运算($\cdot$)，若二元运算满足结合律，即 $\forall a, b, c \in S$，$(ab)c = a(bc)$，那么称 S 为半群. 若半群 S 还具有一元运算“${}^{-1}$”，且满足：

1) $(a^{-1})^{-1}=a$；

2) $aa^{-1}a=a$；

3) $aa^{-1}=a^{-1}a$；

4) $(aa^{-1})(bb^{-1})=(bb^{-1})(aa^{-1})$.

称 S 为 Clifford 半群.

定义 5[9]　令 S 是半群，如果关于 $\forall a \in S$，存在 $a^{-1} \in S$，使得 $a=aa^{-1}a$，$(a^{-1})^{-1}=a$，$aa^{-1}=a^{-1}a$，则称半群 S 是完全正则半群.

定义 6[9]　完全单半群是满足以下条件的完全正则半群 S：

$$xx^{-1}=(xyx)(xyx)^{-1} \qquad \forall x, y \in S$$

定义 7　在偏序集$(L, \leqslant)$中，如果任意两元 x, y 都有上确界 $x \vee y$ 和下确界 $x \wedge y$，则称偏序集$(L, \leqslant)$(或简称 L)为一个格. 格实质上就是带有两种二元运算($\wedge$，$\vee$)且满足幂等律、交换律、结合律及吸收律(L_1-L_4)的一个代数系统：对 $\forall x, y, z \in L$，有：

幂等律：$x \wedge x=x$，$x \vee x=x$.

交换律：$x \wedge y=y \wedge x$，$x \vee y=y \vee x$.

结合律：$x \wedge (y \wedge z)=(x \wedge y) \wedge z$，$x \vee (y \vee z)=(x \vee y) \vee z$.

吸收律：$x \wedge (x \vee y)=x=x \vee (x \wedge y)$.

定义 8　称带有一个二元运算且满足幂等律、交换律及结合律的代数系统为一个半格.

定义 9[7]　令 $F(A)$ 和 $G(B)$ 分别是论域 U 和 V 上的两个 Vague 软集，令 f：$U \longrightarrow V$ 和 g：$A \longrightarrow B$ 是两个函数，那么(f, g)被称为从 U 到 V 的 Vague 软函数，也就是说，(f, g)是从 U 上的 Vague 软集 $F(A)$ 到 V 上的 Vague 软集 $G(B)$ 的 Vague 软函数.

2　主要定理及证明

首先给出 Vague 软 Clifford 半群及 Vague 软 Clifford 子半群的定义.

定义 10　令 S 是 Clifford 半群，且 $\widetilde{F}(A)$ 是 S 上的 Vague 软集，如果对于 $\forall a \in A$，$\forall x, y \in S$，以

下条件成立：

$$\widetilde{F}_a(x \cdot y) \geqslant \min\{\widetilde{F}_a(x), \widetilde{F}_a(y)\}$$

$$\widetilde{F}_a(x^{-1}) \geqslant \widetilde{F}_a(x) \qquad \widetilde{F}_a(x^0) = [1, 1]$$

那么 $\widetilde{F}(A)$ 是 S 上的 Vague 软 Clifford 半群.

注 1 $\min\{\widetilde{F}_a(x), \widetilde{F}_a(y)\}$ 是取 $\widetilde{F}_a(x)$ 和 $\widetilde{F}_a(y)$ 中区间较小者，如果区间相同，则取左端点值较小者，例如：若 $\widetilde{F}_a(x) = [0, 0.2]$，$\widetilde{F}_a(y) = [0.1, 0.5]$，则 $\min\{\widetilde{F}_a(x), \widetilde{F}_a(y)\} = \widetilde{F}_a(x)$；若 $\widetilde{F}_a(x) = [0, 0.2]$，$\widetilde{F}_a(y) = [0.1, 0.3]$，则 $\min\{\widetilde{F}_a(x), \widetilde{F}_a(y)\} = \widetilde{F}_a(x)$.

注 2 $\widetilde{F}_a(x^{-1}) \geqslant \widetilde{F}_a(x)$ 也可以写成 $\widetilde{F}_a(x^{-1}) = \widetilde{F}_a(x)$，理由如下：

因为

$$\widetilde{F}_a(x^{-1}) \geqslant \widetilde{F}_a(x) \Rightarrow \widetilde{F}_a((x^{-1})^{-1}) \geqslant \widetilde{F}_a(x^{-1}) \Rightarrow \widetilde{F}_a(x) \geqslant \widetilde{F}_a(x^{-1})$$

从而得到 $\widetilde{F}_a(x^{-1}) = \widetilde{F}_a(x)$.

接下来给出的例子有助于更好地理解定义 10.

例 1 令集合 $S = \{m, n, k\}$，$(S, \cdot, ^{-1})$ 为 Clifford 半群，$\widetilde{F}(A)$ 是 S 上的 Vague 软集，其中 $A = \{a, b\}$，那么 $\widetilde{F}(a)$，$\widetilde{F}(b)$ 是 S 上的 Vague 集，定义为

$$\widetilde{F}(a) = \{[1, 1]/m, [0.5, 0.5]/n, [1, 1]/k\}$$

$$\widetilde{F}(b) = \{[1, 1]/m, [1, 1]/n, [0.8, 0.8]/k\}$$

不难验证 $\widetilde{F}(A)$ 是 S 上的 Vague 软 Clifford 半群.

定义 11 令 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 是 Clifford 半群 S 上的两个 Vague 软 Clifford 半群，如果以下条件成立：

1) $A \subset B$；

2) $\forall x \in A$，$\widetilde{F}(x)$ 是 $\widetilde{G}(x)$ 的 Vague 子 Clifford 半群.

则称 $\widetilde{F}(A)$ 是 $\widetilde{G}(B)$ 的 Vague 软 Clifford 子半群，记作 $\widetilde{F}(A) \leqslant \widetilde{G}(B)$.

Vague 软 Clifford 半群的等价性定义如下：

定义 12 令 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 是 Clifford 半群 S 上的两个 Vague 软 Clifford 半群，如果满足：$\widetilde{F}(A)$ 是 $\widetilde{G}(B)$ 的 Vague 软 Clifford 子半群，并且 $\widetilde{G}(B)$ 是 $\widetilde{F}(A)$ 的 Vague 软 Clifford 子半群，则称 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 是等价的 Vague 软 Clifford 半群，记作 $\widetilde{F}(A) \cong \widetilde{G}(B)$.

定理 1 令 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 是 Clifford 半群 S 上的两个 Vague 软 Clifford 半群，那么，$\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 的交集 $\widetilde{F}(A) \widetilde{\cap} \widetilde{G}(B)$ 也是 S 上的 Vague 软 Clifford 半群.

证 令 $\widetilde{F}(A) \widetilde{\cap} \widetilde{G}(B) = \widetilde{H}(C)$，则 $C = A \cap B$. 对 $\forall x \in S$，可定义

$$t_{\widetilde{H}(c)}(x) = \begin{cases} t_{\widetilde{F}(c)}(x) & c \in A - B \\ t_{\widetilde{G}(c)}(x) & c \in B - A \\ (t_{\widetilde{F}(c)}(x) \wedge t_{\widetilde{G}(c)}(x)) & c \in A \cap B \end{cases}$$

且 $1-f_{\tilde{H}(c)}(x)$ 定义为

$$\begin{cases} 1-f_{\tilde{F}(c)}(x) & c \in A-B \\ 1-f_{\tilde{G}(c)}(x) & c \in B-A \\ ((1-f_{\tilde{F}(c)}(x)) \wedge (1-f_{\tilde{G}(c)}(x))) & c \in A \cap B \end{cases}$$

情况 1　若 $c \in A-B$，对于 $\forall x, y \in S$，有：

1) $t_{\tilde{H}(c)}(x \cdot y) = t_{\tilde{F}(c)}(x \cdot y) \geqslant \min\{t_{\tilde{F}(c)}(x), t_{\tilde{F}(c)}(y)\} = \min\{t_{\tilde{H}(c)}(x), t_{\tilde{H}(c)}(y)\}$；

2) $t_{\tilde{H}(c)}(x^{-1}) = t_{\tilde{F}(c)}(x^{-1}) \geqslant t_{\tilde{F}(c)}(x) = t_{\tilde{H}(c)}(x)$；

3) 因为 $t_{\tilde{F}(c)}(x^0) = [1, 1]$，则 $t_{\tilde{H}(c)}(x^0) = [1, 1]$；

4) $1-f_{\tilde{H}(c)}(x \cdot y) = 1-f_{\tilde{F}(c)}(x \cdot y) \geqslant \min\{1-f_{\tilde{F}(c)}(x), 1-f_{\tilde{F}(c)}(y)\} = \min\{1-f_{\tilde{H}(c)}(x), 1-f_{\tilde{H}(c)}(y)\}$；

5) $1-f_{\tilde{H}(c)}(x^{-1}) = 1-f_{\tilde{F}(c)}(x^{-1}) \geqslant 1-f_{\tilde{F}(c)}(x) = 1-f_{\tilde{H}(c)}(x)$；

6) 因为 $1-f_{\tilde{F}(c)}(x^0) = [1, 1]$，则 $1-f_{\tilde{H}(c)}(x^0) = [1, 1]$.

情况 2　若 $c \in B-A$，对于 $\forall x, y \in S$ 显然成立，类似情况 1 可证.

情况 3　若 $c \in A \cap B$，对于 $\forall x, y \in S$，有：

1) $t_{\tilde{H}(c)}(x \cdot y) = (t_{\tilde{F}(c)}(x \cdot y)) \wedge (t_{\tilde{G}(c)}(x \cdot y)) \geqslant (\min\{t_{\tilde{F}(c)}(x), t_{\tilde{F}(c)}(y)\}) \wedge (\min\{t_{\tilde{G}(c)}(x), t_{\tilde{G}(c)}(y)\}) = \min\{(t_{\tilde{F}(c)}(x) \wedge t_{\tilde{G}(c)}(x)), (t_{\tilde{F}(c)}(y) \wedge t_{\tilde{G}(c)}(y))\} = \min\{t_{\tilde{H}(c)}(x), t_{\tilde{H}(c)}(y)\}$；

2) $t_{\tilde{H}(c)}(x^{-1}) = (t_{\tilde{F}(c)}(x^{-1})) \wedge (t_{\tilde{G}(c)}(x^{-1})) \geqslant (t_{\tilde{F}(c)}(x)) \wedge (t_{\tilde{G}(c)}(x)) = t_{\tilde{H}(c)}(x)$；

3) 因为 $(t_{\tilde{F}(c)}(x^0)) \wedge (t_{\tilde{G}(c)}(x^0)) = [1, 1] \wedge [1, 1] = [1, 1]$，则 $t_{\tilde{H}(c)}(x^0) = [1, 1]$；

4) $1-f_{\tilde{H}(c)}(x \cdot y) = (1-f_{\tilde{F}(c)}(x \cdot y)) \wedge (1-(f_{\tilde{G}(c)}(x \cdot y))) \geqslant (\min\{1-f_{\tilde{F}(c)}(y), 1-f_{\tilde{F}(c)}(y)\}) \wedge (\min\{1-f_{\tilde{G}(c)}(x), 1-f_{\tilde{G}(c)}(y)\}) = \min\{((1-f_{\tilde{F}(c)}(x)) \wedge (1-f_{\tilde{G}(c)}(x))), ((1-f_{\tilde{F}(c)}(y)) \wedge (1-f_{\tilde{G}(c)}(y)))\} = \min\{1-f_{\tilde{H}(c)}(x), 1-f_{\tilde{H}(c)}(y)\}$；

5) $1-f_{\tilde{H}(c)}(x^{-1}) = (1-f_{\tilde{F}(c)}(x^{-1})) \wedge (1-f_{\tilde{G}(c)}(x^{-1})) \geqslant (1-f_{\tilde{F}(c)}(x)) \wedge (1-f_{\tilde{G}(c)}(x)) = 1-f_{\tilde{H}(c)}(x)$；

6) 因为 $(1-f_{\tilde{F}(c)}(x^0)) \wedge (1-f_{\tilde{G}(c)}(x^0)) = [1, 1] \wedge [1, 1] = [1, 1]$，则 $1-f_{\tilde{H}(c)}(x^0) = [1, 1]$.

定理 2　令 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 是 Clifford 半群 S 上的两个 Vague 软 Clifford 半群，那么，$\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 的并集 $\widetilde{F}(A) \widetilde{\cup} \widetilde{G}(B)$ 也是 S 上的 Vague 软 Clifford 半群.

证　令 $\widetilde{F}(A) \widetilde{\cup} \widetilde{G}(B) = \widetilde{H}(C)$，则 $C = A \cup B$ 对 $\forall x \in S$ 成立，可定义

$$t_{\tilde{H}(c)}(x) = \begin{cases} t_{\tilde{F}(c)}(x) & c \in A-B \\ t_{\tilde{G}(c)}(x) & c \in B-A \end{cases}$$

且 $1-f_{\tilde{H}(c)}(x)$ 定义为

$$1-f_{\tilde{H}(c)}(x) = \begin{cases} 1-f_{\tilde{F}(c)}(x) & c \in A-B \\ 1-f_{\tilde{G}(c)}(x) & c \in B-A \end{cases}$$

情况 1　若 $c \in A-B$，对于 $\forall x, y \in S$，有：

1) $t_{\tilde{H}(c)}(x \cdot y) = t_{\tilde{F}(c)}(x \cdot y) \geqslant \max\{t_{\tilde{F}(c)}(x), t_{\tilde{F}(c)}(y)\} = \max\{t_{\tilde{H}(c)}(x), t_{\tilde{H}(c)}(y)\}$；

2) $t_{\widetilde{H}(c)}(x^{-1})=t_{\widetilde{F}(c)}(x^{-1})\geqslant t_{\widetilde{F}(c)}(x)=t_{\widetilde{H}(c)}(x)$;

3) 因为 $t_{\widetilde{F}(c)}(x^{0})=[1,1]$, 则 $t_{\widetilde{H}(c)}(x^{0})=[1,1]$;

4) $1-f_{\widetilde{H}(c)}(x\cdot y)=1-f_{\widetilde{F}(c)}(x\cdot y)\geqslant \max\{1-f_{\widetilde{F}(c)}(x),1-f_{\widetilde{F}(c)}(y)\}=\max\{1-f_{\widetilde{H}(c)}(x),1-f_{\widetilde{H}(c)}(y)\}$;

5) $1-f_{\widetilde{H}(c)}(x^{-1})=1-f_{\widetilde{F}(c)}(x^{-1})\geqslant 1-f_{\widetilde{F}(c)}(x)=1-f_{\widetilde{H}(c)}(x)$;

6) 因为 $1-f_{\widetilde{F}(c)}(x^{0})=[1,1]$, 则 $1-f_{\widetilde{H}(c)}(x^{0})=[1,1]$.

情况 2 若 $c\in B-A$, 对于 $\forall x,y\in S$ 显然成立, 类似情况 1 可证.

定理 3 设 S 为 Clifford 半群, 且 $\widetilde{F}(A)$ 是 S 上的 Vague 软集, 则以下条件等价:

(i) $\widetilde{F}(A)$ 是 Vague 软 Clifford 半群;

(ii) $\widetilde{F}(A)$ 是群的半格;

(iii) $\widetilde{F}(A)$ 是群的强半格;

(iv) $\widetilde{F}(A)$ 是正则半群.

其中, $\widetilde{F}(A)$ 是群的半格是指 $\widetilde{F}(A)$ 上有同余, $\widetilde{F}(A)/\gamma$ 为半格 Y, 每个 γ 类是一个群. 这就是说 $\widetilde{F}(A)=\bigcup_{\alpha\in Y}H_{\alpha}$, 每个 H_{α} 是一个群, $H_{\alpha}H_{\beta}\subseteq H_{\alpha\beta}$, 其中 $\alpha\beta$ 表示半格 Y 中的积, 每个 H_{α} 称为 $\widetilde{F}(A)$ 的一个群分量.

证 (i)⇒(ii) 令 $\widetilde{F}(A)$ 是 Vague 软 Clifford 半群, 那么 $\widetilde{F}(A)$ 是完全正则半群, 所以 $\widetilde{F}(A)$ 是完全单半群 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 的半格 Y, 且 $\widetilde{F}(A)$ 中每一个幂等元 $\widetilde{F}(e)$ 可用 $\widetilde{F}(a)\widetilde{F}^{-1}(a)$ 来表示, 且在每一个幂等的完全单半群 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 中, 幂等元都可以这样表示. 每一个幂等元交换的完全单半群 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 是一个群, 因此 $\widetilde{F}(A)$ 是群的半格.

(ii)⇒(iii) 对于半格 Y 中的每一个 α, 令 $\widetilde{F}(e)_{\alpha}$ 是 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 的单位元, 现假定 $\alpha\geqslant\beta$, 那对于 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 中的每一个 $\widetilde{F}(a)_{\alpha}$, 乘积 $\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha}$ 属于 $\widetilde{F}(A)_{\alpha\beta}=\widetilde{F}(A)_{\beta}$, 因此可定义映射 $\varphi_{\alpha,\beta}$: $\widetilde{F}(A)_{\alpha}\longrightarrow\widetilde{F}(A)_{\beta}$, 满足 $\widetilde{F}(a)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\beta}=\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha}$, 很显然 $\varphi_{\alpha',\alpha}$ 是 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 上的单位映射, 且 $\varphi_{\alpha,\beta}$ 是一个同态, 对于 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 中的每一个元素 $\widetilde{F}(a)_{\alpha}$, $\widetilde{F}(b)_{\alpha}$, 有

$$(\widetilde{F}(a)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})(\widetilde{F}(b)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})=(\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha})(\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(b)_{\alpha})=((\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha})\widetilde{F}(e)_{\beta})\widetilde{F}(b)_{\alpha}$$

现在有 $\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha}\in\widetilde{F}(A)_{\beta}$, 且 $\widetilde{F}(e)_{\beta}$ 是 $\widetilde{F}(A)_{\beta}$ 的单位元, 所以有

$$(\widetilde{F}(a)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})(\widetilde{F}(b)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})=\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha}\widetilde{F}(b)_{\alpha}=(\widetilde{F}(a)_{\alpha}\widetilde{F}(b)_{\alpha})\varphi_{\alpha,\beta}$$

接下来, 假设 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$, 通过群同态的标准性质可发现, 对于 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 中的所有 $\widetilde{F}(a)_{\alpha}$, 都有

$$(\widetilde{F}(a)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\beta})\varphi_{\beta,\gamma}=\widetilde{F}(e)_{\gamma}(\widetilde{F}(e)_{\beta}\widetilde{F}(a)_{\alpha})=(\widetilde{F}(e)_{\gamma}\widetilde{F}(e)_{\beta})\widetilde{F}(a)_{\alpha}=$$
$$(\widetilde{F}(e)_{\beta}\varphi_{\beta,\gamma})\widetilde{F}(a)_{\alpha}=\widetilde{F}(e)_{\gamma}\widetilde{F}(a)_{\alpha}=\widetilde{F}(a)_{\alpha}\varphi_{\alpha,\gamma}$$

因此有 $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=\varphi_{\alpha,\gamma}$.

最后, 对半格 Y 中任意的 α,β, 完全单半群 $\widetilde{F}(A)_{\alpha}$ 中的元素 $\widetilde{F}(a)_{\alpha}$ 和 $\widetilde{F}(A)_{\beta}$ 中的元素 $\widetilde{F}(b)_{\beta}$, 乘积 $\widetilde{F}(a)_{\alpha}\widetilde{F}(b)_{\beta}$ 属于 $\widetilde{F}(A)_{\gamma}$, 其中 $\gamma=\alpha\beta$, 有

$$\widetilde{F}(a)_\alpha \widetilde{F}(b)_\beta = \widetilde{F}(e)_\gamma (\widetilde{F}(a)_\alpha \widetilde{F}(b)_\beta) = (\widetilde{F}(e)_\gamma \widetilde{F}(a)_\alpha)\widetilde{F}(b)_\beta =$$
$$((\widetilde{F}(e)_\gamma \widetilde{F}(a)_\alpha)\widetilde{F}(e)_\gamma)\widetilde{F}(b)_\beta =$$
$$(\widetilde{F}(e)_\gamma \widetilde{F}(a)_\alpha)(\widetilde{F}(e)_\gamma \widetilde{F}(b)_\beta) = (\widetilde{F}(a)_\alpha \varphi_{\alpha,\gamma})(\widetilde{F}(b)_\beta \varphi_{\beta,\gamma})$$

因此 $\widetilde{F}(A)$ 与群 $\widetilde{F}(A)[Y;\widetilde{F}(A)_\alpha;\varphi_{\alpha,\beta}]$ 的强半格同构.

(iii)⇒(iv) 和 (iv)⇒(i) 显然成立.

接下来进一步验证 Vague 软 Clifford 半群间的同态关系，首先给出两个 Vague 软 Clifford 半群之间的同态定义.

定义 13　令 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 分别是 Clifford 半群 S 和 T 上的 Vague 软集，且 (f,g) 是从 S 到 T 的一个 Vague 软函数. 如果 f 是从 S 到 T 的一个 Clifford 半群同态，那么 (f,g) 被称为从 S 到 T 的 Vague 软同态.

定理 4　设 $F:\widetilde{F}(A)\longrightarrow\widetilde{G}(B)$ 为 Vague 软 Clifford 半群 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 之间的同态且是满射，则有半格同态 $H:Y_{\widetilde{F}(A)}\longrightarrow Y_{\widetilde{G}(B)}$，且任取 $\alpha,\beta\in Y$，任取 $\widetilde{F}(x)\in G_\alpha$，$\widetilde{F}(y)\in G_\beta$，有

$$F(f_{\alpha,\beta}^{\widetilde{F}(A)}(x,y)) = f_{H(\alpha),H(\beta)}^{\widetilde{G}(B)}(F(x),F(y)) \tag{1}$$

且

$$g_{\widetilde{G}(B)}F = Hg_{\widetilde{F}(A)} \tag{2}$$

反之，设满射 $F:\widetilde{F}(A)\longrightarrow\widetilde{G}(B)$ 及满同态 $H:Y_{\widetilde{F}(A)}\longrightarrow Y_{\widetilde{G}(B)}$ 使(1),(2) 式成立，则 F 为同态.

证　设 $\widetilde{F}(A)$ 和 $\widetilde{G}(B)$ 为 Vague 软 Clifford 半群，$F:\widetilde{F}(A)\longrightarrow\widetilde{G}(B)$ 为满同态. 设 $\widetilde{F}(x)\in G_\alpha$，则 $g(\widetilde{F}(x))=\alpha$，取 $H:Y_{\widetilde{F}(A)}\longrightarrow Y_{\widetilde{G}(B)}$，$H(\alpha)=\alpha'$，如果 $F(\widetilde{F}(x))\in G_\alpha''\subseteq\widetilde{G}(B)$，则 H 的定义是确定的. 实际上，若又有 $\widetilde{F}(y)\in G_\alpha$，我们需要证明 $F(\widetilde{F}(y))\in G_\alpha''$，因为此时

$$(\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(y))\in\widetilde{H}(\widetilde{F}(A))$$

则

$$\widetilde{F}(x)\widetilde{F}^{-1}(x)=\widetilde{F}(y)\widetilde{F}^{-1}(y) \qquad F(\widetilde{F}(x))F^{-1}(\widetilde{F}(x))=F(\widetilde{F}(y))F^{-1}(\widetilde{F}(y))$$

于是有 $(F(\widetilde{F}(x)),F(\widetilde{F}(y)))\in\widetilde{H}_{\widetilde{G}(B)}$，$F(\widetilde{F}(y))\in G_\alpha''$，又显然 H 为同态，任取 $\widetilde{F}(x)\in\widetilde{F}(A)$，设 $\widetilde{F}(x)\in G_\alpha$，$\alpha\in Y_{\widetilde{F}(A)}$，则若

$$F(\widetilde{F}(x))\in G_\alpha' \qquad \alpha'\in Y_{\widetilde{G}(B)}$$

有

$$g_{\widetilde{F}(A)}(\widetilde{F}(x))=\alpha \qquad g_{\widetilde{G}(B)}(F(\widetilde{F}(x)))=\alpha'$$

而

$$Hg_{\widetilde{F}(A)}(\widetilde{F}(x))=H(\alpha)=\alpha'$$

所以 $g_{\widetilde{G}(B)}F=Hg_{\widetilde{F}(A)}$，(2) 式成立. 对 $\forall\,\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(y)\in\widetilde{F}(A)$，不妨设 $\widetilde{F}(x)\in G_\alpha$，$\widetilde{F}(y)\in G_\beta$，$\alpha,\beta\in Y_{\widetilde{F}(A)}$，由于 $F(\widetilde{F}(x)\widetilde{F}(y))=F(\widetilde{F}(x))F(\widetilde{F}(y))$，$\widetilde{F}(x)\widetilde{F}(y)=f_{\alpha,\beta}^{\widetilde{F}(A)}(\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(y))$，且

$$F(\widetilde{F}(x))F(\widetilde{F}(y))=f_{\alpha',\beta'}^{\widetilde{G}(B)}(F(\widetilde{F}(x)),F(\widetilde{F}(y))) \qquad F(\widetilde{F}(x))\in G''_{\alpha},F(\widetilde{F}(y))\in G''_{\beta}$$

则

$$H(\alpha)=\alpha' \qquad H(\beta)=\beta'$$

从而(1)式成立.

反之，设有满射 $F:\widetilde{F}(A)\longrightarrow\widetilde{G}(B)$ 及满同态 $H:Y_{\widetilde{F}(A)}\longrightarrow Y_{\widetilde{G}(B)}$，使得(1),(2)式成立，任取 $\widetilde{F}(x)$，$\widetilde{F}(y)\in\widetilde{F}(A)$，设 $\widetilde{F}(x)\in G_{\alpha}$，$\widetilde{F}(y)\in G_{\beta}$，$\alpha,\beta\in Y_{\widetilde{F}(A)}$，则 $\widetilde{F}(x)\cdot\widetilde{F}(y)=f_{\alpha,\beta}^{\widetilde{F}(A)}(\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(y))$，$F(\widetilde{F}(x))\cdot F(\widetilde{F}(y))=f_{\alpha',\beta'}^{\widetilde{G}(B)}(F(\widetilde{F}(x)),F(\widetilde{F}(y)))$，其中 $F(\widetilde{F}(x))\in G''_{\alpha}$，$F(\widetilde{F}(y))\in G''_{\beta}$，于是 $\alpha'=(g_{\beta}F)(\widetilde{F}(x))=(Hg_{\widetilde{F}(A)})(\widetilde{F}(x))=H(\alpha)$，同理可得 $\beta'=H(\beta)$，由(1)式知

$$\begin{aligned}F(\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(y))=F(f_{\alpha,\beta}^{\widetilde{F}(A)}(\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(y)))=\\ f_{H(\alpha),H(\beta)}^{\widetilde{G}(B)}(F(\widetilde{F}(x)),F(\widetilde{F}(y)))=\\ f_{\alpha',\beta'}^{\widetilde{G}(B)}(F(\widetilde{F}(x)),F(\widetilde{F}(y)))=F(\widetilde{F}(x))F(\widetilde{F}(y))\end{aligned}$$

故 F 为同态，证毕.

3 结束语

本文将 Clifford 半群和 Vague 软集从数学角度进行了关联，首次提出了 Vague 软 Clifford 半群的概念，并研究了其基本代数性质且给出了相关证明. 文中说明了 Vague 软 Clifford 半群是群的半格，并且研究了 Vague 软 Clifford 半群之间的同态关系，所获结果推广了 Clifford 半群的结构定理. 此后，还可研究 Clifford 半群在模糊关系下的推广，以及 Vague 软集的其它代数结构(如环、域等)，不断丰富模糊代数，这将在今后的研究中进行进一步讨论.

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] GAU W L, BUEHRER D J. Vague Sets [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614.

[3] MOLODTSOV D. Soft Set Theory-First Results [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4-5): 19-31.

[4] XU W, MA J, WANG S Y, et al. Vague Soft Sets and Their Properties [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(2): 787-794.

[5] SELVACHANDRAN G, SALLEH A R. On Normalistic Vague Soft Groups and Normalistic Vague Soft Group Homomorphism [J]. Advances in Fuzzy Systems, 2015, 2015: 1-8.

[6] YIN Y Q, JUN Y B, ZHAN J M. Vague Soft Hemirings [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(1): 199-213.

[7] ONAR S, YAVUZ S, ERSOY B A, et al. Vague Soft Module [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2018, 34(4): 2597-2609.

[8] 陈 文, 余本功. 基于 Vague 软集的模糊群决策方法研究 [J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(7): 104-107, 115.

[9] BUTZER P P, BERENS H. Fundamentals of Semi-Group Theory [M] //Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin Heidelberg: Springer, 1967: 1-82.

[10] 孙 垒. 保持等价关系的变换半群的组合结果 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(8): 82-88.

[11] 苏蕴娜, 廖星冉. 基于广义斐波那契数列的密码系统设计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(11): 61-66.

[12] 陈大亮，朱用文. Clifford 矩阵半群 [J]. 烟台大学学报（自然科学与工程版），2010，23(4)：251-255.
[13] 邵　勇，越宪钟. 半格序 Clifford 半群 [J]. 数学进展，2010，39(1)：59-63.
[14] 杜　兰. Clifford 半群的膨胀 [J]. 郑州大学学报(理学版)，2003，35(1)：20-22.
[15] 黄华伟，刘双根，陈汝伟，等. 基于 Clifford 半群上幂等元问题的密钥建立协议的研究 [J]. 中国学术期刊文摘，2009(3)：26.
[16] 黎宏伟. Clifford 半群的自动性 [J]. 江苏师范大学学报(自然科学版)，2016，34(1)：29-31.

Vague Soft Clifford Semigroup

YU Xiao-dan，　KONG Xiang-zhi

School of Science，Jiangnan University，Wuxi Jiangsu 214122，China

Abstract：Vague soft set combines the advantages of Vague set and soft set，it is an important tool for dealing with the problem of uncertainty. There are many studies on its algebraic structure. Clifford semigroup is a completely regular semigroup，it is a very special and important category in inverse semigroups. Based on the existing theoretical knowledge of Vague soft sets and Clifford semigroups，Vague soft sets and Clifford semigroups are combined to blur the Clifford semigroups for the first time，and a new concept Vague soft Clifford semigroup is proposed. It is a new algebraic structure of Vague soft set. Then the equivalence of Vague soft Clifford semigroups and the definition of Vague soft Clifford subsemigroups are given，and the basic algebraic properties of Vague soft Clifford semigroups are studied. Firstly，it is proved that the intersection and the union of any two Vague soft Clifford semigroups remain to be Vague soft Cliffford semigroups. Secondly，it is proved that the Vague soft Clifford semigroup is a semilattice of a group and a strong semilattice of the group and it is a regular semigroup. The semigroup structural decomposition of the Vague soft Clifford semigroup is given. Finally，the definition of homomorphism between two Vague soft Clifford semigroups is given，and the homomorphic relationship between Vague soft Clifford semigroups is verified.

Key words：Vague soft set；Clifford semigroup；Vague soft Clifford semigroup；semigroup homomorphism

责任编辑　廖　坤