DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.06.008

三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布的极值分布的渐近展开

贾 璞[1], 刘芯菱[2], 李婷婷[1]

1. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002

摘要: 研究了服从三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布的独立同分布随机变量序列的规范化最大值的极限分布, 在线性赋范规范化常数条件下推导了规范化最大值分布的渐近展开式, 得到了规范化最大值分布收敛到其极值类型分布的收敛速度.

关 键 词: 广义 Logistic 分布; 极值分布; 渐近展开; 收敛速度

中图分类号: O211.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2020)06-0060-05

Logistic 函数是一种 S 型增长曲线, 由比利时数学家 P. F. Verhulst 提出, 并作为有限环境下种群增长的数学模型. 随后 Logistic 分布被广泛用于人口学、生物医学、计量经济学和心理测量学等领域[1-4]. 在心理和教育测量学中, Logistic 分布被用作项目反应模型的分布函数, 代替不便运算的正态分布描述测试对象的能力或潜在特质分布. Logistic 分布是对称的尖峰厚尾分布, 在处理非对称和薄尾分布数据时具有一定局限性. 统计学家引入分布的形状参数来描述数据的偏度和尾部性质, 将 Logistic 分布进一步推广得到广义 Logistic 分布族, 如文献[5]通过将 Gamma 分布与双指数型极值分布、退化对数 Weibull 分布和指数型 Gamma 分布进行混合给出了三参数Ⅰ型、Ⅱ型和Ⅲ型广义 Logistic 分布, 其中三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布的应用最为广泛.

设 $\{X_n: n \geqslant 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列, 服从三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布(Type I Generalized Logistic Distribution, 简记为 GLD), 记为 $X_n \sim \mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$. 三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布 $\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$ 的概率密度函数和累积分布函数分别为

$$f(x; \mu, \sigma, \alpha) = \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^{\alpha+1}}$$

$$F(x; \mu, \sigma, \alpha) = \frac{1}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^{\alpha}}$$

其中自变量 $x \in \mathbb{R}$, 位置参数 $-\infty < \mu < \infty$, 刻度参数 $\sigma > 0$, 形状参数 $\alpha > 0$. 当 $\alpha = 1$ 时, $\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, 1)$ 退化为 Logistic 分布. 当 $\mu = 0$, $\sigma = 1$ 和 $\alpha = 1$ 时, $\mathrm{GLD}(0, 1, 1)$ 退化为标准 Logistic 分布. 三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布的基本性质可参见文献[6].

近年来, 随机变量序列的极值的渐近性质逐渐受到研究者的广泛关注, 文献[7-8]讨论了一般分布的

收稿日期: 2019-12-06
基金项目: 国家自然科学基金项目(11701469); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(XDJK2017D136).
作者简介: 贾 璞(1990-), 男, 博士研究生, 主要从事教育统计与极值统计分析的研究.
通信作者: 李婷婷, 副教授.

线性赋范和幂赋范极值分布的渐近性质，文献[9-10]讨论了有限混合分布的极值分布的渐近性质，文献[11-12]讨论了 t 分布和正态分布等常见分布的极值分布的渐近展开式. 文献[13]讨论了两参数 Ⅰ 型广义 Logistic 分布最大值的极值分布类型和点点收敛速度. 本文将进一步研究三参数 Ⅰ 型广义 Logistic 分布的极值分布的渐近性质和渐近展开式. 当使用广义 Logistic 分布对生物医学、金融等领域中的偏态数据进行建模时，渐近性质可以帮助研究者了解分布的尾部性质和估计分布的极值.

1　极限分布

假设独立同分布的随机变量序列 $\{X_n: n \geqslant 1\}$ 服从 $\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$ 分布，令

$$M_n = \max\{X_k: 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

表示该序列的局部最大值. 通过构建分布的尾部表达式，本节将证明 $\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$ 分布的规范化最大值的分布收敛到 Λ 极值类型分布.

定理 1　设 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别表示三参数 Ⅰ 型广义 Logistic 分布 $\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$ 的累积分布函数和概率密度函数. 当 $x > 0$ 充分大时，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \Lambda(x)$$

其中规范化常数为

$$a_n = \sigma \qquad b_n = \sigma(\log n + \log \alpha) + \mu$$

即 $\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$ 分布的规范化最大值的极限分布是 Λ 极值类型分布.

证　当 $x > 0$ 充分大时，$\mathrm{GLD}(\mu, \sigma, \alpha)$ 分布的尾部表达式可表示为

$$\begin{aligned} 1 - F(x) = 1 - \left(1 + \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\alpha} = & \\ \alpha \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\exp\left(-\frac{2(x-\mu)}{\sigma}\right) + & \\ \frac{1}{6}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\exp\left(-\frac{3(x-\mu)}{\sigma}\right) + o\left(\exp\left(-\frac{3(x-\mu)}{\sigma}\right)\right) = & \\ \left[\alpha - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\ \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{6}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\exp\left(-\frac{2(x-\mu)}{\sigma}\right) + \right. & \\ \left. o\left(\exp\left(-\frac{2(x-\mu)}{\sigma}\right)\right)\right]\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = & \\ c(x)\exp\left(-\int_\mu^x \frac{1}{g(t)}\mathrm{d}t\right) & \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\alpha - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + o\left(\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right] = \alpha > 0$$

辅助函数 $g(t) = \sigma$，并且有 $g'(t) = 0$，因此根据文献[14]中命题1.1与命题1.4，我们可以选择如下形式的规范化常数 a_n 和 b_n：

$$1 - F(b_n) = n^{-1} \qquad a_n = g(b_n) = \sigma \tag{2}$$

那么此时有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

可得 F 属于 Λ 吸引场，记为 $F \in D(\Lambda)$，$\Lambda(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ 为Gumbel极值类型分布. 规范化常数 a_n 和 b_n 满足(2)式. 结合(1)式与(2)式，可得

$$1 - F(b_n) = \alpha \exp\left(-\frac{b_n - \mu}{\sigma}\right)(1 + o(1)) = n^{-1}$$

计算可得 $a_n=\sigma$ 和 $b_n=\sigma(\log n+\log\alpha)+\mu$. 定理 1 证毕.

2 渐近展开式

已知 GLD(μ, σ, α) 分布的规范化最大值的极限分布为 Λ 分布，本节将推导该分布的规范化最大值分布的渐近展开式.

定理 2 设 $F(x)$ 表示三参数 Ⅰ 型广义 Logistic 分布 GLD(μ, σ, α) 的累积分布函数，规范化常数 $a_n=\sigma$ 和 $b_n=\sigma(\log n+\log\alpha)+\mu$. 则当 $n\to\infty$ 时，有

$$n\left[n(F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-k(x)\Lambda(x)\right]\to w(x)\Lambda(x) \tag{3}$$

其中 $k(x)$ 和 $w(x)$ 分别为

$$k(x)=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}$$

和

$$w(x)=-\frac{1}{3\alpha^2}\mathrm{e}^{-3x}+\frac{1}{8\alpha^2}\mathrm{e}^{-4x}$$

注 1 定理 2 给出了规范化最大值分布 $F^n(a_nx+b_n)$ 的渐近展开式. 由(3) 式可知，在线性赋范规范化常数下，$F^n(a_nx+b_n)$ 收敛到 $\Lambda(x)$ 的收敛速度 $F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x)$ 是与 $\frac{1}{n}$ 同阶的，该速度与文献[13] 中证明的两参数广义 Logistic 分布的收敛速度是相同的.

为了证明定理 2，我们首先给出一个辅助引理.

引理 1 设 $F(x)$ 表示三参数 Ⅰ 型广义 Logistic 分布 GLD(μ, σ, α) 的累积分布函数，令

$$h(x)=n\log F(a_nx+b_n)+\mathrm{e}^{-x}$$

且有规范化常数

$$a_n=\sigma \qquad b_n=\sigma(\log n+\log\alpha)+\mu$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(nh(x)-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}\right)=-\frac{1}{3\alpha^2}\mathrm{e}^{-3x}$$

证 当 $n\to\infty$ 时，$F^n(a_nx+b_n)\to\Lambda(x)$，可得 $n\log F(a_nx+b_n)\to-\mathrm{e}^{-x}$. 由泰勒展开式，有

$$\begin{aligned}&\log F(a_nx+b_n)=\\&\log F(1-(1-F(a_nx+b_n)))=\\&-(1-F(a_nx+b_n))-\frac{1}{2}(1-F(a_nx+b_n))^2-\frac{1}{3}(1-F(a_nx+b_n))^3(1+o(1))\end{aligned} \tag{4}$$

因此当 $n\to\infty$ 时，有 $n(1-F(a_nx+b_n))\to\mathrm{e}^{-x}$ 成立. 规范化常数 $a_n=\sigma$ 和 $b_n=\sigma(\log n+\log\alpha)+\mu$，结合尾部表达式(1) 式可得

$$\begin{aligned}&1-F(a_nx+b_n)=\\&\alpha\exp(-x-(\log n+\log\alpha))-\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\exp(-2x-2(\log n+\log\alpha))+\\&\frac{1}{6}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\exp(-3x-3(\log n+\log\alpha))+o(\exp(-3(\log n+\log\alpha)))=\\&\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}-\frac{\alpha+1}{2\alpha}\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6\alpha^2}\frac{1}{n^3}\mathrm{e}^{-3x}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

结合(4) 式和(5) 式，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}nh(x)=\\&\lim_{n\to\infty}n^2\left(\log F(a_nx+b_n)+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\right)=\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[-(1-F(a_nx+b_n))-\frac{1}{2}(1-F(a_nx+b_n))^2-\right.$$
$$\left.\frac{1}{3}(1-F(a_nx+b_n))^3(1+o(1))+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\right]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(-n\mathrm{e}^{-x}+\frac{\alpha+1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+n\mathrm{e}^{-x}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x} \tag{6}$$

再结合(4),(5),(6)式，有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(nh(x)-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(-(1-F(a_nx+b_n))-\frac{1}{2}(1-F(a_nx+b_n))^2-\right.$$
$$\left.\frac{1}{3}(1-F(a_nx+b_n))^3(1+o(1))+\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2\alpha n^2}\mathrm{e}^{-2x}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(-n^2\mathrm{e}^{-x}+\frac{\alpha+1}{2\alpha}n\mathrm{e}^{-2x}-\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6\alpha^2}\mathrm{e}^{-3x}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{-2x}+\frac{\alpha+1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}+n^2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2\alpha}n\mathrm{e}^{-2x}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$\left(-\frac{1}{3}+\frac{\alpha+1}{2\alpha}-\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6\alpha^2}\right)\mathrm{e}^{-3x}=$$
$$-\frac{1}{3\alpha^2}\mathrm{e}^{-3x}$$

定理 2 的证明　由 $\lim\limits_{n\to\infty} nh(x)=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x)=0$. 通过泰勒展开式可知，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left|\sum_{i=3}^{\infty}\frac{h^{i-3}(x)}{i!}\right|\leqslant\sum_{i=3}^{\infty}\frac{|h^{i-3}(x)|}{i!}<\exp(|h(x)|)\to 1 \tag{7}$$

结合引理 1 和(7)式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$n\left[n(F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x))-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}\Lambda(x)\right]=$$
$$n\left[n(\exp(n\log F(a_nx+b_n)+\mathrm{e}^{-x})\Lambda(x)-\Lambda(x))-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}\Lambda(x)\right]=$$
$$n\left[n(\exp(h(x))-1)-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}\right]\Lambda(x)=$$
$$\left[n\left(nh(x)-\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-2x}\right)+n^2h^2(x)\left(\frac{1}{2}+h(x)\sum_{i=3}^{\infty}\frac{h^{i-3}(x)}{i!}\right)\right]\Lambda(x)\to$$
$$\left(-\frac{1}{3\alpha^2}\mathrm{e}^{-3x}+\frac{1}{8\alpha^2}\mathrm{e}^{-4x}\right)\Lambda(x)$$

综上所述，定理 2 证毕.

参考文献：

［1］ FISK P R. The Graduation of Income Distribution［J］. Econometrica，1961，29(2)：171-185.

［2］ ANDERSON J A. Separate Sample Logistic Discrimination［J］. Biometrika，1972，59(1)：19-35.

［3］ 杨　昕. 对数收益率的偏斜 Logistic 分布与 VaR 估计［J］. 数理统计与管理，2011，30(3)：548-553.

［4］ 杜文久. 高等项目反应理论［M］. 北京：科学出版社，2014.

［5］ BALAKRISHNAN N，LEUNG M Y. Order Statistics from the Type I Generalized Logistic Distribution［J］. Communi-

cations in Statistics-Simulation and Computation，1988，17(1)：25-50.
[6] 韩 雪，程维虎. 三参数Ⅰ型广义 Logistic 分布参数的一类改进估计 [J]. 数理统计与管理，2016，35(3)：445-455.
[7] 赵 扬，黄建文. 对数麦克斯韦分布的渐近性质 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(9)：1-5.
[8] CHEN S Q，WANG C，ZHANG G. Rates of Convergence of Extreme for General Error Distribution Under Power Normalization [J]. Statistics & Probability Letters，2012，82(2)：385-395.
[9] 侯景耀，彭作祥. 有限混合偏 t 分布极值分布的点点收敛速度 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(5)：94-99.
[10] 刘国涛，陈守全. 混合广义伽马分布的渐进性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(1)：84-87.
[11] 章毓波，彭作祥. t 分布的极值分布渐近展开 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(3)：67-70.
[12] JIA P，LI T T. Higher-Order Expansions for Distributions of Extremes from General Error Distribution [J]. Journal of Inequalities and Applications，2014，2014：213.
[13] 黄建文，陈守全，李文兴. 广义 logistic 分布的收敛速度 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2014，51(1)：47-52.
[14] RESNICK S I. Extreme Values，Regular Variation and Point Processes [M]. New York：Springer，1987.

Asymptotic Expansion of Extreme Distributions from 3-Parameter Type Ⅰ Generalized Logistic Distribution

JIA Pu[1]， LIU Xin-ling[2]， LI Ting-ting[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；
2. School of Mathematics and Information，China West Normal University，Nanchong Sichuan 637002，China

Abstract：In this short note，we discuss the limit distribution of normalized maximum of the independent and identically distributed random variable sequence with 3-parameter type I generalized logistic distribution. With linear normalized constants，the asymptotic expansion of distributions of normalized maximum is established，and the convergence rate of the distribution of normalized maximum to the Gumbel extreme value distribution is derived.

Key words：generalized logistic distribution；extreme distribution；asymptotic expansion；convergence rate

责任编辑 廖 坤