DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.08.011

求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法

张小双，　陈　震，　刘奇龙

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：求解不同阶对称张量组的特征值和特征向量问题在超图匹配中具有重要的作用. 首先，基于求解对称张量 Z-特征值的带位移高阶幂法(SS-HOPM)，利用系数张量组构造一个带位移因子的辅助函数，将求解不同阶对称张量组的特征值问题转化为求解辅助函数的极值点问题，提出了求解不同阶对称张量组特征值和特征向量的带位移高阶幂法. 其次，利用凸函数的性质和单调有界原理，讨论了辅助函数的性质，确定了位移因子的取值范围，使得所给算法是收敛的. 最后，通过数值算例对理论结果进行了验证，数值结果表明所提出的算法是有效的，并且该算法也能有效求出不同阶对称非半正定张量组的特征值和特征向量.

关　键　词：不同阶对称张量组；特征值；特征向量；带位移高阶幂法

中图分类号：O151.23　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)08-0081-07

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 m 阶 n 维的实张量，即

$$\boldsymbol{A}=(a_{i_1 i_2 \cdots i_m}) \qquad a_{i_1 i_2 \cdots i_m} \in \mathbb{R},\ i_j \in [n],\ j \in [m]$$

其中$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$，$[m]=\{1,2,\cdots,m\}$. 记 $R^{[m,n]}$ 为 m 阶 n 维实张量的全体构成的集合.

设 Π_m 是由指标$\{1,2,\cdots,m\}$的所有置换构成的集合. 如果对 Π_m 中的任意置换 π，有

$$a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \cdots i_{\pi(m)}}=a_{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称张量[1].

近年来，关于张量的研究受到了广泛的关注[2-10]. 由于张量 Z-特征值在图匹配[11]、数据挖掘[12-13]和目标跟踪[14]等许多实际问题中有着重要应用，张量 Z-特征值问题逐渐成为张量谱理论研究的热点问题. 下面给出张量 Z-特征值的定义.

定义 1[1]　设 $\boldsymbol{A} \in R^{[m,n]}$ 是实对称张量，如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}=\lambda \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 Z-特征值，$\boldsymbol{x}$ 为与 λ 相对应的 Z-特征向量，称$(\lambda,\boldsymbol{x})$为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 Z-特征对，其中 n 维向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1}$ 的第 i 个分量为

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{m-1})_i=\sum_{i_2,\cdots,i_m \in [n]} a_{i i_2 \cdots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \qquad i \in [n]$$

收稿日期：2019-12-28

基金项目：国家自然科学基金项目(11671105)；贵州省科学技术基金重点项目([2020]1Z002)；贵州师范大学 2017 年博士科研启动项目(GZNUD[2017]26 号).

作者简介：张小双(1993-)，女，硕士研究生，主要从事数值代数的研究.

通信作者：陈　震，教授，博士研究生导师.

文献[15]在研究基于张量算法的高阶图匹配时提出了包含边和超边的匹配模型，该模型可导出如下不同阶对称张量组特征值问题：

定义 2 设 $\boldsymbol{A}_i \in R^{[i,n]}$ 是实对称张量，$i=2,3$，如果存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，使得

$$\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1 \tag{1}$$

则称 λ 为不同阶对称张量组 $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=2}^3$ 的一个特征值，$\boldsymbol{x}$ 为与 λ 相对应的特征向量，称$(\lambda,\boldsymbol{x})$是不同阶对称张量组 $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=2}^3$ 的一个特征对.

本文讨论求解不同阶对称张量组特征值问题(1)的带位移高阶幂法，并给出其收敛性分析.

1 求解不同阶对称张量组特征值问题的带位移高阶幂法

本节首先回顾求解对称张量 Z-特征值的带位移高阶幂法，随后给出求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法. 在此之前，先给出一个记号. 设 $\boldsymbol{A} \in R^{[m,n]}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$，记

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^m=\sum_{i_1,\cdots,i_m\in[n]} a_{i_1\cdots i_m}x_{i_1}\cdots x_{i_m}$$

文献[16]提出了如下求解对称张量 Z-特征值的带位移高阶幂法(SS-HOPM)：

算法 1[16] 求解对称张量 Z-特征值的带位移高阶幂法(SS-HOPM).

输入：m 阶 n 维对称张量 $\boldsymbol{A}$，位移 $\alpha \in \mathbb{R}$.

输出：$\boldsymbol{A}$ 的 Z-特征值 λ_{k+1}.

初始化：任取非零向量 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $\|\boldsymbol{x}_0\|_2=1$. 令 $\lambda_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0^m$.

for $k=0,1,\cdots$, do

  $\boldsymbol{x}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k^{m-1}+\alpha\boldsymbol{x}_k$

  $\boldsymbol{x}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{x}_{k+1}/\|\boldsymbol{x}_{k+1}\|_2$

  $\lambda_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k+1}^m$

end for

考虑(1)式，显然有

$$\lambda=\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^2$$

为了求 λ，构造辅助函数

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^2+\frac{1}{3}\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\boldsymbol{x} \in \Omega=\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1\}$. 由文献[16]的引理 3.1 知(2)式中 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度为

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}$$

由 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 知

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{x}$$

下面给出求解不同阶对称张量组特征值问题(1)的带位移高阶幂法：

算法 2 求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法.

输入：张量 $\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2$，位移 α，允许误差 ε.

输出：$\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=2}^3$ 的特征对$(\lambda_{k+1},\boldsymbol{x}_{k+1})$.

初始化：任取非零向量 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $\|\boldsymbol{x}_0\|_2=1$. 令 $f(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_0^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_0^2+\frac{1}{3}\alpha$.

for $k=0,1,\cdots$, do

  $\boldsymbol{x}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_k^2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_k+\alpha\boldsymbol{x}_k$

  $\boldsymbol{x}_{k+1} \leftarrow \boldsymbol{x}_{k+1}/\|\boldsymbol{x}_{k+1}\|_2$

$f(\boldsymbol{x}_{k+1})=\frac{1}{3}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_{k+1}^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_{k+1}^2+\frac{1}{3}\alpha$

if $|f(\boldsymbol{x}_{k+1})-f(\boldsymbol{x}_k)|<\varepsilon$，且 $\|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|_2<\varepsilon$

break.

end if

end for

2　收敛性分析

本节讨论算法 2 的收敛性．首先给出一些引理．

引理 1[16]　可微函数 $f(\boldsymbol{x})$：$\Upsilon\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当 Υ 是凸集，且对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Upsilon$ 均有

$$f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

引理 2[16]　二阶可微函数 $f(\boldsymbol{x})$：$\Upsilon\subseteq\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当 Υ 是凸集，且 $f(\boldsymbol{x})$ 的 Hessian 矩阵在 Υ 上是半正定的，即对任意 $\boldsymbol{x}\in\Upsilon$，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ 是半正定矩阵．

定理 1　设 $\boldsymbol{A}_3\in R^{[3,n]}$ 是对称张量，$\boldsymbol{A}_2\in R^{[2,n]}$ 是对称半正定矩阵，$\rho(\boldsymbol{A}_2)$ 是 $\boldsymbol{A}_2$ 的谱半径，$\Phi(\boldsymbol{A}_3)=2\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\rho(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x})$，若 $\alpha>\Phi(\boldsymbol{A}_3)+\rho(\boldsymbol{A}_2)$，则由算法 2 得到的序列 $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=0}^{\infty}$ 是单调不减序列且有上界，因此该序列有极限 $f(\boldsymbol{x}_*)$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)=f(\boldsymbol{x}_*)$，$\boldsymbol{x}_*\in\Omega$．进一步，有

$$\lambda_*=\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_*^3+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_*^2$$

即 $(\lambda_*,\boldsymbol{x}_*)$ 是不同阶对称张量组 $\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$ 的特征对．

证　由文献[16]中引理 3.3 知，$f(\boldsymbol{x})$ 的 Hessian 矩阵为

$$H(\boldsymbol{x})=\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_2+\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{I}+\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵．对任意 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}=\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_2}\in\Omega$，由

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}H(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}_2+\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{I}+\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{y}=&\\
\|\boldsymbol{x}\|_2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}[2\boldsymbol{A}_3\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}})^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{I}+\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}})^{-\frac{1}{2}}\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}=&\\
\|\boldsymbol{x}\|_2[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{A}_3\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\alpha\boldsymbol{I}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\alpha\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}]+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}=&\\
\|\boldsymbol{x}\|_2[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{A}_3\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y}+\alpha+\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})]+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}\geqslant&\\
\|\boldsymbol{x}\|_2[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{A}_3\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y}+\alpha+0]+0\geqslant&\\
\|\boldsymbol{x}\|_2(\alpha-\Phi(\boldsymbol{A}_3))\geqslant 0&
\end{aligned}$$

知，$f(\boldsymbol{x})$ 的 Hessian 矩阵 $H(\boldsymbol{x})$ 是半正定矩阵．因此，由引理 2 知 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数．

由 $\alpha>\Phi(\boldsymbol{A}_3)+\rho(\boldsymbol{A}_2)$ 知，对任意 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，$\nabla f(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$．对 $\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}\in\Omega$ 且 $\boldsymbol{x}_{k+1}=\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|_2}$，由引理 1 得

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_{k+1})-f(\boldsymbol{x}_k)=\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k)=&\\
\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|_2}-\boldsymbol{x}_k\right)=&\\
\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|_2-\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k\geqslant&\\
\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|_2-\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|_2\|\boldsymbol{x}_k\|_2=0&
\end{aligned}$$

故序列 $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=0}^{\infty}$ 是单调不减的．又由 $\boldsymbol{x}_k\in\Omega$ 和

$$|f(\boldsymbol{x}_k)|=\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_k^3+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_k^2+\frac{1}{3}\alpha(\boldsymbol{x}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k)^{\frac{3}{2}}\right|=$$

$$\left|\frac{1}{3}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{x}_k+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_k+\frac{1}{3}\alpha\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{3}\mid\rho(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_k)\mid+\frac{1}{2}\mid\rho(\boldsymbol{A}_2)\mid+\frac{1}{3}\mid\alpha\mid\leqslant$$

$$\frac{1}{3}\max_{x\in\Omega}\rho(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{A}_2)+\frac{1}{3}\mid\alpha\mid$$

知 $f(\boldsymbol{x})$ 是有界函数. 因此序列 $\{f(\boldsymbol{x}_k)\}_{k=0}^{\infty}$ 有极限 $f(\boldsymbol{x}_*)$，即有

$$\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)=f(\boldsymbol{x}_*)\qquad \boldsymbol{x}_*\in\Omega$$

因为 $\boldsymbol{x}_*$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的极值点，所以 $\nabla f(\boldsymbol{x}_*)=\boldsymbol{0}$. 因此 $\boldsymbol{x}_*$ 是不同阶对称张量组 $\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$ 的特征向量，$\lambda_*=\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}_*^3+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_*^2$ 是相应的特征值，故 $(\lambda_*,\boldsymbol{x}_*)$ 是一个特征对.

在下一节的数值试验中，可以选取 $\alpha=2\sum\limits_{i,j,k\in[n]}\mid a_{ijk}\mid+\rho(\boldsymbol{A}_2)$. 原因是 $\forall\,\boldsymbol{y}\in\Omega$，由三角不等式有

$$\mid\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\mid\leqslant\sum_{i,j,k\in[n]}\mid a_{ijk}\mid\qquad\rho(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x})\leqslant\sum_{i,j,k\in[n]}\mid a_{ijk}\mid$$

所以

$$\Phi(\boldsymbol{A}_3)\leqslant 2\sum_{i,j,k\in[n]}\mid a_{ijk}\mid$$

这保证了 α 大于 $\Phi(\boldsymbol{A}_3)+\rho(\boldsymbol{A}_2)$，满足定理1中的收敛条件. 事实上，选取适当的 α 可以使算法收敛得更快，详见下一节的数值例子.

3 数值试验

本节给出3个数值算例验证算法2的有效性. 共作100次数值试验，每次试验随机选取不同的初始向量 $\boldsymbol{x}_0$，且元素服从 $[-1,1]$ 的均匀分布，迭代终止的条件为 $\varepsilon=10^{-8}$ 或达到最大迭代步数4 000. Occurrences 表示在进行的100次试验中求出特征值的次数，Iter 表示平均迭代次数.

例 1 设 $\boldsymbol{A}_3=(a_{ijk})\in R^{[3,3]}$ 是对称张量，$\boldsymbol{A}_2=(b_{ij})\in R^{[2,3]}$ 是对称正定矩阵，且

$a_{111}=-0.128\ 1$ $\quad a_{112}=0.051\ 6$ $\quad a_{113}=-0.095\ 4$ $\quad a_{122}=-0.195\ 8$

$a_{123}=-0.179\ 0$ $\quad a_{133}=-0.267\ 6$ $\quad a_{222}=0.325\ 1$ $\quad a_{223}=0.251\ 3$

$a_{233}=0.117\ 3$ $\quad a_{333}=0.033\ 8$ $\quad b_{11}=0.001\ 1$ $\quad b_{12}=0.000\ 4$

$b_{13}=-0.000\ 5$ $\quad b_{22}=0.000\ 9$ $\quad b_{23}=0.000\ 6$ $\quad b_{33}=0.001\ 2$

求解不同阶对称张量组 $\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$ 的实特征对等价于求解非线性方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ 1-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0\end{cases}\tag{3}$$

用 Mathematic 软件中的 NSolve 命令求解方程组(3)，得到14个不同的实特征对，见表1.

表 1 例 1 不同阶对称张量组 $\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$ 的实特征对

λ	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	λ	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$
0.874 5	[−0.392 0 0.724 6 0.566 8]	0.000 3	[−0.296 0 −0.734 9 0.610 1]
0.431 4	[−0.718 8 −0.125 8 −0.683 7]	−0.000 9	[−0.332 7 −0.634 3 0.697 8]
0.229 8	[−0.845 8 0.437 1 −0.305 9]	−0.002 2	[−0.445 5 −0.772 7 0.452 2]
0.019 4	[0.714 9 0.507 7 −0.480 8]	−0.016 6	[−0.711 4 −0.510 9 0.482 6]
0.004 3	[0.449 9 0.775 2 −0.443 5]	−0.229 1	[0.843 4 −0.440 1 0.308 1]
0.002 8	[0.328 5 0.628 5 −0.705 0]	−0.429 8	[0.718 7 0.123 2 0.684 4]
0.001 4	[0.285 4 0.737 0 −0.612 7]	−0.871 5	[0.392 3 −0.725 2 −0.565 9]

下面验证算法 2 的有效性. 数值结果见表 2.

表 2　例 1 算法 2 的数值结果

α	Occurrences	λ	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	Iter
0	63	0.874 5	[−0.392 0　0.724 6　0.566 8]	16
	37	0.431 4	[−0.718 8　−0.125 8　−0.683 7]	198
1	42	0.874 5	[−0.392 0　0.724 6　0.566 8]	31
	28	0.431 4	[−0.718 8　−0.125 8　−0.683 7]	50
	11	0.019 4	[0.714 9　0.507 7　−0.480 8]	108
	19	0.000 3	[−0.296 0　−0.734 9　0.610 1]	147
9.357 7	38	0.874 5	[−0.392 0　0.724 6　0.566 8]	185
	29	0.431 4	[−0.718 8　−0.125 8　−0.683 7]	334
	21	0.019 4	[0.714 9　0.507 7　−0.480 8]	953
	12	0.000 3	[−0.296 0　−0.734 9　0.610 1]	1 206

由表 2 知，在进行的 100 次数值试验中，不带位移($\alpha=0$) 的算法 2 计算出了表 1 中的两个特征值. 而算法 2 在分别取 $\alpha=1$ 和 $\alpha=2\sum_{i,j,k\in[3]}|a_{ijk}|+\rho(\boldsymbol{A}_2)=9.357\ 7$ 时，100 次试验都能有效地找到 14 个特征值中的 4 个.

例 2　设 $\boldsymbol{A}_3=(a_{ijk})\in R^{[3,3]}$ 是对称张量，$\boldsymbol{A}_2=(b_{ij})\in R^{[2,3]}$ 是对称矩阵，且

$$
\begin{array}{llll}
a_{111}=0.399\ 1 & a_{112}=-0.597\ 6 & a_{113}=-0.581\ 9 & a_{122}=0.384\ 0 \\
a_{123}=0.415\ 1 & a_{133}=0.888\ 0 & a_{222}=-0.206\ 6 & a_{223}=-0.672\ 3 \\
a_{233}=-0.464\ 0 & a_{333}=0.004\ 5 & b_{11}=-0.155\ 6 & b_{12}=0.049\ 5 \\
b_{13}=0.197\ 9 & b_{22}=-0.457\ 4 & b_{23}=0.701\ 7 & b_{33}=-0.089\ 8
\end{array}
$$

用 NSolve 命令求解方程组(3)，得到不同阶对称张量组$\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$ 的 8 个不同的实特征对，见表 3.

表 3　例 2 不同阶对称张量组$\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$ 的实特征对

λ	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	λ	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$
2.750 1	[0.507 7　−0.571 1　−0.645 0]	−0.994 2	[−0.183 3　0.566 6　−0.803 4]
0.785 9	[0.492 6　0.237 3　0.837 3]	−1.291 8	[−0.495 8　−0.506 5　0.705 4]
0.120 1	[0.934 5　−0.127 0　0.332 5]	−1.339 6	[−0.152 8　−0.818 3　0.554 1]
−0.853 3	[−0.448 8　0.762 8　−0.465 5]	−2.653 1	[−0.689 3　0.469 2　0.552 0]

下面验证算法 2 的有效性. 数值结果见表 4.

表 4　例 2 算法 2 的数值结果

α	Occurrences	λ	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	Iter
0	65	2.750 1	[0.507 7　−0.571 1　−0.645 0]	28
	35	—	—	4 000
3	56	2.750 1	[0.507 7　−0.571 1　−0.645 0]	34
	44	0.785 9	[0.492 6　0.237 3　0.837 3]	29
28.735 6	63	2.750 1	[0.507 7　−0.571 1　−0.645 0]	228
	37	0.785 9	[0.492 6　0.237 3　0.837 3]	241

由表4知，在进行的100次数值试验中，不带位移($\alpha=0$)的算法2仅有65次收敛到特征值$\lambda=2.750\ 1$，其余35次在迭代到4 000步时计算不出特征值．而算法2在分别取$\alpha=3$和$\alpha=2\sum\limits_{i,j,k\in[3]}|a_{ijk}|+\rho(\boldsymbol{A}_2)=28.735\ 6$时，100次试验都能有效地找到8个特征值中最大的2个．

图匹配中的不同阶对称张量组大多是大型稀疏张量．下面给出高维稀疏不同阶对称张量组的例子用以检验算法2的有效性．

例3 设$\boldsymbol{A}_3=(a_{ijk})\in R^{[3,100]}$和$\boldsymbol{A}_2=(b_{ij})\in R^{[2,100]}$是随机生成的稀疏对称张量，非零元的个数都是150个，其中每个元素服从[0，1]的均匀分布．由算法2得到的数值结果见表5．

表5 例3算法2的数值结果

α	Occurrences	λ	Iter
0	100	—	4 000
2	47	1.157 9	201
	53	1.157 5	202
28.803 1	55	1.157 9	1 550
	45	1.157 5	1 535

由表5可见，在进行的100次数值试验中，不带位移($\alpha=0$)的算法2在迭代到4 000步时计算不出特征值．在算法2中分别取$\alpha=2$和$\alpha=2\sum\limits_{i,j,k\in[100]}|a_{ijk}|+\rho(\boldsymbol{A}_2)=28.803\ 1$，每次试验均有效地求出特征值$\lambda=1.157\ 9$或$\lambda=1.157\ 5$，且$\alpha=2$时的迭代次数比$\alpha=28.803\ 1$时的迭代次数少．例3表明，算法2在高维情形下效果也较好．

以上数值例子表明，带位移的算法2对任意对称张量$\boldsymbol{A}_3$和$\boldsymbol{A}_2$构成的不同阶对称张量组$\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$都是有效的．由文献[16]的引理4.1知$2\sum\limits_{i,j,k\in[n]}|a_{ijk}|>\Phi(\boldsymbol{A}_3)$．取$\alpha=2\sum\limits_{i,j,k\in[n]}|a_{ijk}|+\rho(\boldsymbol{A}_2)$，算法2收敛，此时的$\alpha$远大于$\Phi(\boldsymbol{A}_3)+\rho(\boldsymbol{A}_2)$，因此取适当的$\alpha$，算法2计算得更快．而且在100次试验中总能计算出不同阶对称张量组$\{\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2\}$的最大特征值．

4 结 论

本文给出了求解不同阶对称张量组$\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=2}^3$特征对的带位移高阶幂法，即算法2．该算法通过构造辅助函数$f(\boldsymbol{x})$将问题(1)中求特征向量问题转化为求辅助函数的极值点问题．然后，将此辅助函数$f(\boldsymbol{x})$的梯度$\nabla f(\boldsymbol{x})$作为迭代格式，使得算法2收敛．与不带位移($\alpha=0$)的算法相比，带位移的算法2能更有效地求出不同阶对称张量组$\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=2}^3$的实特征对．但是$\alpha$的选取对迭代次数影响很大，如何选取最佳的$\alpha$将是我们下一步的研究工作．

参考文献：

[1] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor [J]. Journal of Symbolic Computation, 2005, 40(6): 1302-1324.

[2] KOFIDIS E, REGALIA P A. On the Best Rank-1 Approximation of Higher-Order Supersymmetric Tensors [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2002, 23(3): 863-884.

[3] COUR T, SRINIVASAN P, SHI J B. Balanced Graph Matching [M] //Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge: The MIT Press, 2007: 313-320.

[4] 杨占英，于云霞．高维张量积Meyer小波的一种新分解(英文) [J]．西南大学学报(自然科学版)，2012，34(2)：74-77.

[5] WANG G, ZHOU G L, CACCETTA L. Z-Eigenvalue Inclusion Theorems for Tensors [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systemsseries, 2017, 22(1): 187-198.

[6] WANG Y N, WANG G. Two S-Type Z-Eigenvalue Inclusion Sets for Tensors [J]. Journal of Inequalities and Applica-

tions，2017，2017：152.
[7] 刘　蕊，陈　震，刘奇龙. 判定对称强 H-张量的迭代算法[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2019，37(3)：72-76.
[8] 何　军，刘衍民. 张量伪谱的新包含域[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(8)：7-10.
[9] 钟　琴. 非负矩阵最大特征值的新界值[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：40-43.
[10] 闫逸波，陈　震. 一类张量方程的基于梯度的迭代方法[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(3)：59-62.
[11] DUTTA A，LLADÓS J，BUNKE H，et al. Product Graph-Based Higher Order Contextual Similarities for Inexact Subgraph Matching[J]. Pattern Recognition，2018，76：596-611.
[12] BENSON A R. Three Hypergraph Eigenvector Centralities[J]. SIAM Journal on Mathematics of Data Science，2019，1(2)：293-312.
[13] BENSON A R，GLEICH D F，LESKOVEC J. Tensor Spectral Clustering for Partitioning Higher-Order Network Structures[C]//Proceedings of the 2015 SIAM International Conference on Data Mining，Philadelphia，PA：Society for Industrial and Applied Mathematics，2015：118-126.
[14] SHI X C，LING H B，PANG Y，et al. Rank-1 Tensor Approximation for High-Order Association in Multi-Target Tracking[J]. International Journal of Computer Vision，2019，127(8)：1063-1083.
[15] DUCHENNE O，BACH F，KWEON I S，et al. A Tensor-Based Algorithm for High-Order Graph Matching[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence，2011，33(12)：2383-2395.
[16] KOLDA T G，MAYO J R. Shifted Power Method for Computing Tensor Eigenpairs[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2011，32(4)：1095-1124.

Shifted Symmetric Higher-Order Power Method for Computing Eigenvalues of Multiple Order Symmetric Tensors

ZHANG Xiao-shuang，　CHEN　Zhen，　LIU Qi-long
School of Mathematical Sciences，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：The problem of computing the eigenvalues and eigenvectors of multiple order symmetric tensors plays an important role in hyper-graph matching. Firstly，based on the shifted symmetric higher-order power method (SS-HOPM)，we use the coefficient tensors to construct an auxiliary function with a shift factor，and transform the problem of solving the eigenvalues of multiple order symmetric tensors into one of solving extreme points of the auxiliary function. Thus we propose herein a shifted symmetric higher-order power method for computing eigenvalues and eigenvectors of multiple order symmetric tensors. Secondly，we utilize the properties of convex functions and the monotonic bounded principle to discuss the properties of the auxiliary function and determine the range of the shifted factor，which makes the given algorithm convergent. Finally，numerical examples are given to verify the theoretical results and show the effectiveness of the proposed algorithm，and the algorithm can also effectively compute the eigenvalues and eigenvectors of multiple order symmetric tensors that are not semi-positive definite.

Key words：multiple order symmetric tensors；eigenvalue；eigenvector；shifted symmetric higher-order power method

责任编辑　廖　坤