第 42 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2020 年 8 月
Vol. 42　No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug.　2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.08.012

非齐度量测度空间上广义分数次积分算子交换子的有界性

张振荣[1]，　赵　凯[2]

1. 青岛黄海学院 数理教学部，山东 青岛 266427；2. 青岛大学 数学与统计学院，山东 青岛 266071

摘要：利用非齐度量测度空间的性质，应用分数次积分算子的有界性理论，基于非齐度量测度空间上 Herz 空间的刻画以及 Herz 型 Hardy 空间的原子分解和分子分解理论，证明了广义分数次积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子在非齐度量测度空间上的 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间的有界性.

关　键　词：非齐度量测度空间；广义分数次积分算子；交换子；有界性

中图分类号：O174.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)08-0088-09

虽然双倍条件在调和分析理论中起着重要的作用，然而，多年来的许多研究结果表明，在非双倍条件下，$\mathbb{R}^n$ 上许多经典的函数空间理论以及奇异积分算子有界性的结论依然是成立的(参见文献[1-3]). 文献[4]引入了一类满足几何双倍条件和上双倍条件的非齐度量测度空间，这类空间包含了齐型空间和非双倍测度空间. 此后，文献[5-6]引入了非齐度量测度空间上的 Hardy 空间，并讨论了一些等价刻画和奇异积分算子的有界性. 有关非齐度量测度空间奇异积分算子及交换子的有界性问题的结果可参见文献[7-9].

文献[10-14]对 $\mathbb{R}^n$ 上的 Herz 型空间进行了系统研究，同时在 Herz 型空间及其上许多奇异积分算子的有界性问题方面也取得了丰硕的成果. 近期，文献[15]引进了非齐度量测度空间上的 Herz 空间和 Herz 型 Hardy 空间，并讨论了等价刻画和一些相互关系，以及 Calderón-Zygmund 算子的有界性.

交换子理论一直受关注，取得了许多成果[16-19]. 基于齐型空间的结果，本文的目的主要是在非齐度量测度空间上，建立一类广义分数次积分算子与 Lipschitz 函数生成的交换子，得到了该交换子是 Herz 空间上有界的，也是 Herz 型 Hardy 空间上有界的.

1　基本概念和基本理论

定义 1[20]　设(X, d)是度量空间，如果存在某个正整数 N_0，对任意的球 $B(x, r) \subset X$，其中 $x \in X$，$r \in (0, \infty)$，都存在至多 N_0 个球 $\left\{B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)\right\}_i$ 构成 $B(x, r)$ 的一个覆盖，则称度量空间(X, d)是几何双倍的.

定义 2[4]　如果 μ 是 X 上的 Borel 测度，并存在一个控制函数 $\lambda: X \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$，使得对每一个 $x \in X$，$\lambda(x, r)$ 关于 r 都单调不减，且存在一个依赖于 λ 的正常数 $C_{(\lambda)}$，使得对任意的 $x \in X$ 和 $r \in$

收稿日期：2019-11-20
基金项目：国家自然科学基金项目(11471176，11871293).
作者简介：张振荣(1977-)，女，副教授，主要从事调和分析及其应用的研究.
通信作者：赵　凯，教授.

$(0,\infty)$，有

$$\mu(B(x,r))\leqslant\lambda(x,r)\leqslant C_{(\lambda)}\lambda\left(x,\frac{r}{2}\right)\tag{1}$$

则称度量测度空间(X,d,μ)是上双倍的.

非齐度量测度空间(X,d,μ)就是既满足几何双倍条件又满足上双倍条件的度量空间.

定义 3[4]　设$\eta>0$，若对所有的$r\in(0,2\mathrm{diam}(X))$和$a\in\left(1,\dfrac{2\mathrm{diam}(X)}{r}\right)$，存在一个只依赖于$a$和$X$的常数$C(a)>1$，使得对于所有的$x\in X$，$\lambda(x,ar)\geqslant C(a)\lambda(x,r)$，并且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{[C(a^k)]^{\eta}}<\infty$. 则称控制函数$\lambda$满足$\eta$-弱逆倍条件.

定义 4[4]　对于任意两个球$B\subset S\subset X$，令$\rho>1$，$p\in(0,1]$，离散系数$\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}$的定义是

$$\widetilde{K}_{B,S}^{(\rho),p}=\left\{1+\sum_{k=-[\log_\rho 2]}^{N_{B,S}^{(\rho)}}[\mu(\rho^kB)(\lambda(c_B,\rho^kr_B))^{-1}]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\tag{2}$$

其中$N_{B,S}^{(\rho)}$是满足$\rho^{N_{B,S}^{(\rho)}}r_B\geqslant r_S$的最小正整数，$[\log_\rho 2]$表示$\log_\rho 2$取整.

对于整数k，记$B_k=\{x\in X:d(x_0,x)<2^k\}$，其中$x_0$是$X$的一固定点，$C_k=B_k\backslash B_{k-1}$，且$\chi_k=\chi_{C_k}$. 非齐度量测度空间上的齐型 Herz 空间定义如下：

定义 5[15]　设(X,d,μ)是非齐度量测度空间，令$-\infty<\alpha<\infty$，$0<p<\infty$，$0<q\leqslant\infty$. 则非齐度量测度空间上的齐型 Herz 空间$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$定义为

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(X\backslash\{0\}):\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}<\infty\}$$

其中

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}=\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\lambda(x_0,2^k))^{\alpha p}\|f\chi_k\|_{L^q(\mu)}^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

定义 6[15]　令$0<\alpha<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，若(X,d,μ)上的函数$b(x)$满足以下条件：

(i) $\operatorname{supp} b\subset B(x_0,r)$，$r>0$，其中$B(x_0,r)=\{x\in X:d(x_0,x)<r\}$；

(ii) $\|b\|_{L^q(\mu)}\leqslant[\lambda(x_0,r)]^{-\alpha}$.

则称$b(x)$为中心(α,q)-块.

非齐度量测度空间上齐次 Herz 空间的分解定理是下面的结果：

引理 1[15]　令$0<\alpha<\infty$，$0<p<\infty$，$1\leqslant q<\infty$. 设λ满足η-弱逆倍条件，

$$\eta\in\left(0,\min\left\{\frac{\alpha p}{2},\frac{\alpha p}{2(p-1)}\right\}\right)$$

则$f\in\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)$当且仅当$f(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_kb_k(x)$，其中$b_k(x)$是中心$(\alpha,q)$-块，$\operatorname{supp}(b_k)\subset B_k$，并且

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\lambda_k|^p<\infty\qquad\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mu)}\sim\inf\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\lambda_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

这里的下确界取遍所有f这样的分解.

文献[15]引进并给出了 Herz 型 Hardy 空间的分解：

定义 7[15]　设(X,d,μ)是非齐度量测度空间，$0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，$\alpha\in(0,\infty)$，$\rho\in(1,\infty)$，$\gamma\in[1,\infty)$. 若$L^2(\mu)$上的函数$b$满足以下条件：

(i) 存在一个球B，使得$\operatorname{supp} b\subset B=B(x_0,r)$，$r>0$；

(ii) $\int_X b(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$；

(iii) 对于$j=1,2$，存在支在球$B_j\subset B$上的函数a_j和常数$\lambda_j\in\mathbb{C}$，使得$b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2$，且$\|a_j\|_{L^q(\mu)}\leqslant$

$(\lambda(x_0, r_B))^{-\alpha}(\widetilde{K}^{(\rho),p}_{B_j,B})^{-\gamma}$.

则称 b 是 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$-原子块，并记 $|b|_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)}=|\lambda_1|+|\lambda_2|$. 如果存在 $(\alpha, p, q, \gamma, \rho)_\lambda$-原子块序列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$，使得在 $L^2(\mu)$ 中 $f=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i$，且 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|b_i|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)}<\infty$，则称 f 是属于 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)$ 的. 并且定义

$$\|f\|_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)}=\inf\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|b_i|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

这里的下确界取遍 f 所有的分解. 原子 Herz 型 Hardy 空间 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)$ 定义为在 p-拟模 $\|\cdot\|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)}$ 下 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)$ 的完备化. 同时，原子 Herz 型 Hardy 空间 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma}_{atb,q,\rho}(\mu)$ 与 γ 和 ρ 的取值无关.

定义 8[15] 设 (X, d, μ) 是非齐度量测度空间，$0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$，$p\neq q$，令 $\alpha\in(0,\infty)$，$\rho\in(1,\infty)$，$\gamma\in[1,\infty)$，$\varepsilon\in(0,\infty)$. 若 $L^2(\mu)$ 上的函数 b 满足以下条件：

(i) $\int_X b(x)\mathrm{d}\mu(x)=0$；

(ii) 存在一些球 $B=B(x_0, r_B)$，其中 $r_B>0$，存在常数 $\widetilde{M}$，$M\in\mathbb{N}$，使得对于所有的 $k\in\mathbb{N}$，$j\in\{1,\cdots,M_k\}$，当 $k=0$ 时，$M_0=\widetilde{M}$；当 $k>0$ 时，$M_k=M$. 存在支在球 $B_{k,j}\subset U_k(B)$ 上的函数 $m_{k,j}$，当 $k=0$ 时，$U_0(B)=\rho^2 B$；当 $k>0$ 时，$U_k(B)=\rho^{k+2}B\backslash\rho^{k-2}B$. 存在 $\lambda_{k,j}\in\mathbb{C}$，使得在 $L^2(\mu)$ 中 $b=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M_k}\lambda_{k,j}m_{k,j}$，且有

$$\|m_{k,j}\|_{L^q(\mu)}\leqslant\rho^{-k\varepsilon}(\lambda(x_0,\rho^{k+2}r_B))^{-\alpha}\left(\widetilde{K}^{(\rho),p}_{B_{k,j},\rho^{k+2}B}\right)^{-\gamma}$$

$$|b|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M_k}|\lambda_{k,j}|^p<\infty$$

则称 b 是 $(\alpha, p, q, \gamma, \varepsilon, \rho)_\lambda$-分子块. 若存在 $(\alpha, p, q, \gamma, \varepsilon, \rho)_\lambda$-分子块序列 $\{b_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$，使得在 $L^2(\mu)$ 中有 $f=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}b_i$，且 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|b_i|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)}<\infty$，则函数 f 属于 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)$. 并且定义

$$\|f\|_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)}=\inf\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}|b_i|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

这里的下确界取遍 f 的所有分解. 分子 Herz 型 Hardy 空间 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)$ 定义为在 p-拟模 $\|\cdot\|^p_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)}$ 下 $\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha,p,\gamma,\varepsilon}_{mb,q,\rho}(\mu)$ 的完备化.

定义 9 令 $\beta\in(0,1]$. 如果函数 $f: X\longrightarrow\mathbb{C}$ 满足

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\beta}=\sup_{x\neq y,\, x,y\in X}\frac{|f(x)-f(y)|}{[\lambda(x,d(x,y))]^\beta}<\infty$$

或者

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}_\beta}=\sup_{x\neq y,\, x,y\in X}\frac{|f(x)-f(y)|}{[\lambda(y,d(x,y))]^\beta}<\infty \tag{3}$$

则称 f 属于 $\mathrm{Lip}_\beta(\mu)$.

2 广义分数次积分算子及主要结果

定义 10[7] 设函数 $K_\sigma\in L^1_{\mathrm{loc}}(X\times X)\backslash\{(x,x): x\in X\}$，$0<\sigma<1$. 如果存在正常数 $C_{K\sigma}$，使得：

(i) 对于任意的 $x, y \in X$，$x \neq y$，$|K_\sigma(x, y)| \leqslant C_{K_\sigma}[\lambda(x, d(x, y))]^{\sigma-1}$；

(ii) 存在 $0 < \delta \leqslant 1$ 和正常数 $c_{K\sigma}$，使得对任意 $x, \tilde{x}, y \in X$，且 $d(x, y) \geqslant c_{K_\sigma} d(x, \tilde{x})$，有

$$|K_\sigma(x, y) - K_\sigma(\tilde{x}, y)| + |K_\sigma(y, x) - K_\sigma(y, \tilde{x})| \leqslant \frac{C_{K_\sigma} d(x, \tilde{x})^\delta}{[d(x, y)]^\delta [\lambda(x, d(x, y))]^{1-\sigma}}$$

则称 K_σ 为非齐度量测度空间上的广义分数次积分算子核.

若线性算子 T_σ 的核是定义 10 中的 K_σ，对于所有的 $f \in L_b^\infty(\mu) = \{f \in L^\infty(\mu)$：$f$ 的支集有界$\}$，

$$T_\sigma f(x) = \int_X K_\sigma(x, y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \qquad x \notin \operatorname{supp}(f)$$

则称 T_σ 是非齐度量测度空间上的广义分数次积分算子.

引理 2[7]　设 T_σ 是非齐度量测度空间上的广义分数次积分算子，$0 < \sigma < 1$，则以下两个结论是等价的：

(i) 对 $p \in \left(1, \frac{1}{\sigma}\right)$，$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \sigma$，$T_\sigma$ 是 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu)$ 的有界算子；

(ii) T_σ 是 $L^1(\mu)$ 到 $L^{\frac{1}{1-\sigma}, \infty}(\mu)$ 的有界算子.

广义分数次积分算子 T_σ 和函数 h 生成的交换子定义为

$$[T_\sigma, h] f(x) = h(x) T_\sigma f(x) - T_\sigma(hf)(x) \qquad x \in X$$

若 $g \in L_b^\infty(\mu)$，$\int_X g(y) \mathrm{d}\mu(y) = 0$，有 $\int_X T_\sigma g(y) \mathrm{d}\mu(y) = 0$，则称 T_σ 满足 $T_\sigma^* 1 = 0$.

定理 1　设 (X, d, μ) 为非齐度量测度空间，$0 < p < \infty$，$0 < \sigma < 1$，$1 < q_1 < \frac{1}{\sigma}$，$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \sigma$，$0 < \beta < 1$，$\beta < \alpha_1 < 1 - \frac{1}{q_1}$，$\alpha_2 = \alpha_1 - \beta$. 令 λ 满足 η- 弱逆倍条件，

$$\eta = \min\left\{\frac{\alpha_2 p}{2}, \frac{\alpha_2 p'}{2}, \frac{\left(1 - \frac{1}{q_1} - \alpha_1\right) p}{2}, \frac{\left(1 - \frac{1}{q_1} - \alpha_1\right) p'}{2}\right\}$$

此时 $1 < p < \infty$. 若 T_σ 是非齐度量测度空间上的广义分数次积分算子，且 T_σ 是 $L^1(\mu)$ 到 $L^{\frac{1}{1-\sigma}, \infty}(\mu)$ 的有界算子，$h \in \mathrm{Lip}_\beta(\mu)$，则交换子 $[T_\sigma, h]$ 是从 $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p}(\mu)$ 到 $\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p}(\mu)$ 的有界算子.

定理 2　设 (X, d, μ) 是非齐度量测度空间. 令 $0 < p < \infty$，$0 < \sigma < 1$，$1 < q_1 < \frac{1}{\sigma}$，$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \sigma$，$\rho \in (1, \infty)$，$\gamma \in [1, \infty)$，$0 < \beta < 1$，$0 < \alpha_2 < \frac{\delta}{v}$，$\alpha_1 = \alpha_2 + \beta$. 设 T_σ 是非齐度量测度空间上的广义分数次积分算子，若 T_σ 是 $L^1(\mu)$ 到 $L^{\frac{1}{1-\sigma}, \infty}(\mu)$ 的有界算子，且 $T_\sigma^* 1 = 0$，$h \in \mathrm{Lip}_\beta(\mu)$，则交换子 $[T_\sigma, h]$ 是从 $\widetilde{H\dot{K}}{}_{atb, q_1, \rho}^{\alpha_1, p, \gamma}(\mu)$ 到 $\widetilde{H\dot{K}}{}_{mb, q_2, \rho}^{\alpha_2, p, \gamma, (\delta - v\alpha_2)/2}(\mu)$ 的有界算子.

定理 1 的证明　对任意 $f \in \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p}(\mu)$，由引理 1 知 $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lambda_j b_j(x)$，其中 b_j 是中心 (α_1, q_1)- 块，$\operatorname{supp}(b_j) \subset B_j$，且 $\|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p}(\mu)} \sim \inf\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\lambda_j|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$. 则

$$\|[T_\sigma, h] f\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p}(\mu)}^p = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\lambda(x_0, 2^l))^{\alpha_2 p} \|([T_\sigma, h] f) \chi_l\|_{L^{q_2}(\mu)}^p \leqslant$$

$$C \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\lambda(x_0, 2^l))^{\alpha_2 p} \left\{\sum_{j=-\infty}^{l-2} |\lambda_j| \, \|([T_\sigma, h] b_j) \chi_l\|_{L^{q_2}(\mu)}\right\}^p +$$

$$C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\lambda(x_0,2^l))^{\alpha_2 p}\left\{\sum_{j=l-1}^{+\infty}|\lambda_j|\,\|([T_\sigma,h]b_j)\chi_l\|_{L^{q_2}(\mu)}\right\}^p=I_1+I_2$$

对于 I_2,分以下两种情况进行讨论:

当 $0<p\leqslant 1$ 时,由引理 2、(3) 式,以及定义 6 和 η-弱逆倍条件,有

$$I_2\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\lambda(x_0,2^l))^{\alpha_2 p}\sum_{j=l-1}^{\infty}|\lambda_j|^p\|(h(x)-h(y))b_j\|_{L^{q_1}(\mu)}^p\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\lambda(x_0,2^l))^{\alpha_2 p}\sum_{j=l-1}^{\infty}|\lambda_j|^p(\lambda(x_0,2^j))^{-(\alpha_1-\beta)p}=$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p\sum_{l=-\infty}^{j+1}\left[\frac{\lambda(x_0,2^l)}{\lambda(x_0,2^j)}\right]^{\alpha_2 p}\leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p$$

当 $1<p<\infty$ 时,由引理 2、(3) 式、Hölder 不等式和 η-弱逆倍条件,可得

$$I_2\leqslant C\sum_{l=-\infty}^{+\infty}[\lambda(x_0,2^l)]^{\alpha_2 p}\left\{\sum_{j=l-1}^{\infty}|\lambda_j|\,\|(h(x)-h(y)b_j\|_{L^{q_1}(\mu)}\right\}^p\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{j=l-1}^{+\infty}|\lambda_j|^p\left[\frac{\lambda(x_0,2^l)}{\lambda(x_0,2^j)}\right]^{\frac{\alpha_2 p}{2}}\right\}\left\{\sum_{j=l-1}^{+\infty}\left[\frac{\lambda(x_0,2^l)}{\lambda(x_0,2^j)}\right]^{\frac{\alpha_2 p'}{2}}\right\}^{\frac{p}{p'}}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=l-1}^{+\infty}|\lambda_j|^p\left[\frac{\lambda(x_0,2^l)}{\lambda(x_0,2^j)}\right]^{\frac{\alpha_2 p}{2}}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p$$

对于 I_1,注意到 $j\leqslant l-2$,$x\in C_l$,$y\in B_j$,则 $x\in X\backslash 2B_j$,意味着 $\lambda(x,d(x,y))\sim\lambda(x_0,d(x,x_0))$. 因此,由定义 9、Hölder 不等式和定义 6,知

$$\|([T_\sigma,h]b_j)\chi_l\|_{L^{q_2}(\mu)}\leqslant\left\{\int_{C_l}\left|\int_{B_j}\frac{|(h(x)-h(y))b_j(y)|}{[\lambda(x,d(x,y))]^{1-\sigma}}\mathrm{d}\mu(y)\right|^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\left\{\int_{C_l}\frac{1}{[\lambda(x_0,d(x,x_0))]^{(1-\sigma-\beta)q_2}}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}}\int_{B_j}|b_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\left[\frac{\lambda(x_0,2^j)}{\lambda(x_0,2^l)}\right]^{1-\frac{1}{q_1}}(\lambda(x_0,2^l))^{\beta}(\lambda(x_0,2^j))^{-\alpha_1}$$

再分为两种情况进行讨论:

当 $0<p\leqslant 1$ 时,由 η-弱逆倍条件,有

$$I_1\leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\lambda(x_0,2^l))^{\alpha_2 p}\sum_{j=-\infty}^{l-2}|\lambda_j|^p\left[\frac{\lambda(x_0,2^j)}{\lambda(x_0,2^l)}\right]^{\left(1-\frac{1}{q_1}\right)p}\frac{(\lambda(x_0,2^l))^{\beta p}}{(\lambda(x_0,2^j))^{\alpha_1 p}}=$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p\sum_{l=j+2}^{+\infty}\left[\frac{\lambda(x_0,2^j)}{\lambda(x_0,2^l)}\right]^{\left(1-\frac{1}{q_1}-\alpha_1\right)p}\leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p$$

当 $1<p<\infty$ 时,同样由 Hölder 不等式和 η-弱逆倍条件可得

$$I_1\leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{l-2}|\lambda_j|\left[\frac{\lambda(x_0,2^j)}{\lambda(x_0,2^l)}\right]^{\left(1-\frac{1}{q_1}-\alpha_1\right)}\right\}^p\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{l-2}|\lambda_j|^p\left[\frac{\lambda(x_0,2^j)}{\lambda(x_0,2^l)}\right]^{\left(1-\frac{1}{q_1}-\alpha_1\right)\frac{p}{2}}\leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}^p\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\lambda_j|^p$$

因此

$$\|[T_\sigma,h]f\|_{\dot K_{q_2}^{\alpha_2,p}(\mu)}\leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\|f\|_{\dot K_{q_1}^{\alpha_1,p}(\mu)}$$

至此，我们完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明　由定理 2 的假设以及 Herz 型 Hardy 空间的原子和分子分解结果知，只要对任意的 $(\alpha_1, p, q_1, 2, 2)_\lambda$-原子块 b，证明 $[T_\sigma, h]b$ 是 $\left(\alpha_2, p, q_2, 1, \frac{\delta - v\alpha_2}{2}, 2\right)_\lambda$-分子块，且

$$|[T_\sigma, h]b|_{\widetilde{H\dot{K}}_{mb, q_2, 2}^{\alpha_2, p, 1, \frac{\delta - v\alpha_2}{2}}(\mu)} \leqslant C|b|_{\widetilde{H\dot{K}}_{atb, q_1, 2}^{\alpha_1, p, 2}(\mu)}$$

即可. 事实上，对任意的 $(\alpha_1, p, q_1, 2, 2)_\lambda$-原子块 b，$b = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j a_j$，$\operatorname{supp}(a_j) \subset B_j \subset B$，且

$$\|a_j\|_{L^{q_1}(\mu)} \leqslant (\lambda(x_0, r_B))^{-\alpha_1} (\widetilde{K}_{B_j, B}^{(2), p})^{-2}$$

令 $B_0 = 8B$，进一步记

$$[T_\sigma, h]b = ([T_\sigma, h]b)\chi_{B_0} + \sum_{k=1}^{\infty} ([T_\sigma, h]b)\chi_{2^k B_0 \backslash 2^{k-1} B_0} = J_1 + J_2$$

对于 J_1，由 $B_j \subset B$ 知 $3B_j \subset 8B = B_0$. 令 $N_j = N_{2B_j, B_0}^{(2)} \geqslant -1$. 不失一般性，假设 $N_j \geqslant 3$. 由于 $2B_j \subset B_0 \subset 2^5 B_j$，当 $N_j \in [-1, 3)$ 时可转化为 $N_j \geqslant 3$ 的情形处理. 因此

$$J_1 = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j ([T_\sigma, h]a_j)\chi_{2B_j} + \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{N_j - 2} \lambda_j ([T_\sigma, h]a_j)\chi_{2^{i+1}B_j \backslash 2^i B_j} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j ([T_\sigma, h]a_j)\chi_{B_0 \backslash 2^{N_j - 1} B_j} = J_{1,1} + J_{1,2} + J_{1,3}$$

对于 $J_{1,1}$，由引理 2、(3) 式、定义 7、系数 $\widetilde{K}$ 的性质和 $\widetilde{K}_{2B_j, B_0}^{(2), p} \geqslant 1$，对于 $j = 1, 2$，有

$$\begin{aligned}\|([T_\sigma, h]a_j)\chi_{2B_j}\|_{L^{q_2}(\mu)} &\leqslant C\|(h(x) - h(y))a_j\|_{L^{q_1}(\mu)} \leqslant C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta} (\lambda(x_0, r_B))^{\beta - \alpha_1} (\widetilde{K}_{B_j, B}^{(2), p})^{-2} \leqslant \\ &C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta} (\lambda(x_0, r_B))^{-\alpha_2} (\widetilde{K}_{2B_j, 4r_{B_0}}^{(2), p})^{-2} \leqslant \\ &c_1 (\lambda(x_0, 4r_{B_0}))^{-\alpha_2} (\widetilde{K}_{2B_j, 4B_0}^{(2), p})^{-1}\end{aligned}$$

其中 c_1 是不依赖 a_j 和 j 的正常数. 令

$$\sigma_{j,1} = c_1 \lambda_j \qquad \tau_{j,1} = c_1^{-1} ([T_\sigma, h]a_j)\chi_{2B_j}$$

则

$$J_{1,1} = \sum_{j=1}^{2} \sigma_{j,1} \tau_{j,1} \qquad \operatorname{supp}(\tau_{j,1}) \subset 2B_j \subset B_0$$

且

$$\|\tau_{j,1}\|_{L^{q2}(\mu)} \leqslant (\lambda(x_0, 4r_{B_0}))^{-\alpha_2} (\widetilde{K}_{2B_j, 4B0}^{(2), p})^{-1}$$

对于 $J_{1,3}$，由于 $B_0 \subset 2^{N_j + 3} B_j$，有 $r_{B_0} \sim r_{2^{N_j - 1} B_j}$. 由定义 10、(3) 式、原子的大小条件、Hölder 不等式，以及系数 $\widetilde{K}$ 的性质，并注意到 $\widetilde{K}_{B_j, B}^{(2), p} \geqslant 1$，可知对于 $j = 1, 2$，有

$$\begin{aligned}\|([T_\sigma, h]a_j)\chi_{B_0 \backslash 2^{N_j - 1} B_j}\|_{L^{q_2}(\mu)} &\leqslant C\left\{\int_{8B \backslash 2^{N_j - 1} B_j} \left[\int_{B_j} \frac{|h(x) - h(y)||a_j(y)|}{[\lambda(x, d(x, y))]^{1 - \sigma}} \mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2} \mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}} \leqslant \\ &C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta} \left\{\int_{8B \backslash 2^{N_j - 1} B_j} \left[\int_{B_j} \frac{|a_j(y)|}{[\lambda(c_{B_j}, d(x, c_{B_j}))]^{1 - \sigma - \beta}} \mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2} \mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}} \leqslant \\ &C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta} (\mu(8B))^{\frac{1}{q_2} - 1 + \sigma} (\mu(8B))^{1 - \frac{1}{q_1}} (\lambda(x_0, r_B))^{-\alpha_2} (\widetilde{K}_{B_j, B}^{(2), p})^{-2} \leqslant \\ &c_2 (\lambda(x_0, r_{4B_0}))^{-\alpha_2} (\widetilde{K}_{2B_0, 4B_0}^{(2), p})^{-1}\end{aligned}$$

其中 c_2 是不依赖 a_j 和 j 的正常数. 令

$$\sigma_{j,3}=c_2\lambda_j \qquad \tau_{j,3}=c_2^{-1}([T_\sigma,h]a_j)\chi_{B_0\backslash 2^{N_j-1}B_j}$$

则

$$J_{1,3}=\sum_{j=1}^{2}\sigma_{j,3}\tau_{j,3} \qquad \operatorname{supp}(\tau_{j,3})\subset 16B=2B_0$$

且

$$\|\tau_{j,3}\|_{L^{q_2}(\mu)}\leqslant(\lambda(x_0,4r_{B_0}))^{-\alpha_2}(\widetilde{K}^{(2),p}_{2B_0,4B_0})^{-1}$$

对 $J_{1,2}$ 与 $J_{1,3}$，类似地有

$$\|([T_\sigma,h]a_j)\chi_{2^{i+1}B_j\backslash 2^iB_j}\|_{L^{q_2}(\mu)}\leqslant C\left\{\int_{2^{i+1}B_j\backslash 2^iB_j}\left[\int_{B_j}\frac{|h(x)-h(y)||a_j(y)|}{(\lambda(x,d(x,y)))^{1-\sigma}}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\int_{B_j}|a_j(y)|\mathrm{d}\mu(y)\left[\int_{2^{i+1}B_j\backslash 2^iB_j}\frac{1}{(\lambda(c_{B_j},2^ir_{B_j}))^{(1-\sigma-\beta)q_2}}\mathrm{d}\mu(x)\right]^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$c_3\frac{\mu(2^{i+1}B_j)}{\lambda(c_{B_j},2^ir_{B_j})}(\widetilde{K}^{(2),p}_{B_j,B})^{-1}(\lambda(x_0,r_{4B_0}))^{-\alpha_2}(\widetilde{K}^{(2),p}_{2^{i+2}B_j,4B_0})^{-1}$$

其中 c_3 是不依赖于 a_j,j 和 i 的正常数. 令

$$\sigma_{j,2}=c_3\lambda_j\frac{\mu(2^{i+1}B_j)}{\lambda(c_{B_j},2^ir_{B_j})}(\widetilde{K}^{(2),p}_{B_j,B})^{-1}$$

$$\tau_{j,2}=c_3^{-1}\frac{\lambda(c_{B_j},2^ir_{B_j})}{\mu(2^{i+1}B_j)}\widetilde{K}^{(2),p}_{B_j,B}([T_\sigma,h]a_j)\chi_{2^{i+1}B_j\backslash 2^iB_j}$$

则

$$J_{1,2}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_j-2}\sigma^{(i)}_{j,2}\tau^{(i)}_{j,2} \qquad \operatorname{supp}(\tau_j,2)\subset 2^{i+2}B_j\subset 2B_0$$

且

$$\|\tau^{(i)}_{j,2}\|_{L^{q_2}(\mu)}\leqslant(\lambda(x_0,4r_{B_0}))^{-\alpha_2}(\widetilde{K}^{(2),p}_{2^{i+2}B_j,4B_0})^{-1}$$

对于 J_2，由几何双倍条件，对于任意的 $k\in\mathbb{N}$，存在球覆盖 $\{B_{k,j}\}_{j=1}^{M_0}$，且它们的势 $M_0\leqslant N_0 8^n$，其中这些球的半径都是 $2^{k-3}r_{B_0}$，$\widetilde{U}_k(B_0)=2^kB_0\backslash 2^{k-1}B_0$. 不失一般性，假设这些球的中心都属于 $\widetilde{U}_k(B_0)$. 令 $C_{k,1}=B_{k,1}$，$C_{k,l}=B_{k,l}\backslash U_{m=1}^{l-1}B_{k,m}$，$l=2,\cdots,M_0$ 且对所有的 $l=1,\cdots,M_0$，$D_{k,l}=C_{k,l}\cap\widetilde{U}_k(B_0)$. 则 $\{D_{k,l}\}_{l=1}^{M_0}$ 互不相交，$\widetilde{U}_k(B_0)=\bigcup_{l=1}^{M_0}D_{k,l}$ 且对任意 $l=1,\cdots,M_0$，$D_{k,l}\subset 2B_{k,l}\subset U_k(B_0)=2^{k+2}B_0\backslash 2^{k-2}B_0$. 因此，$J_2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{M_0}([T_\sigma,h]b)\chi_{D_{k,l}}$. 因为 $T_\sigma^*1=0$，由定义 10、定义 7、定义 9，应用 Hölder 不等式和系数 $\widetilde{K}$ 的性质，同时注意到 $4B_{k,l}\subset 2^{k+1}B_0$ 和 $\widetilde{K}^{(2),p}_{B_j,B}\geqslant 1$，可以得到

$$\|([T_\sigma,h]b)\chi_{D_{k,l}}\|_{L^{q_2}(\mu)}\leqslant\left\{\int_{D_{k,l}}\left[\int_B|b(y)(h(x)-h(y))||K(x,y)-K(x,c_B)|\mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}\left\{\int_{D_{k,l}}\left[\int_B|b(y)|\frac{(d(y,c_B))^\delta}{(d(x,c_B))^\delta[\lambda(c_B,d(x,c_B))]^{1-\sigma-\beta}}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q_2}}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}2^{-k\delta}[\mu(2^{k+1}B_0)]^{\frac{1}{q_2}-1+\sigma+\beta}\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|(\mu(B_j))^{\frac{1}{q_1'}}\|a_j\|_{L^{q_1}(\mu)}\leqslant$$

$$C\|h\|_{\mathrm{Lip}_\beta}2^{-k\delta}(\mu(2^{k+1}B_0))^{\frac{1}{q_2}-1+\sigma}(\mu(2^{k+1}B_0))^{1-\frac{1}{q_1}}\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|(\lambda(x_0,r_B))^{-\alpha_2}\leqslant$$

$$c_4 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha_2)}{2}}2^{-\frac{k(\delta-v\alpha_2)}{2}}\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|(\lambda(x_0,r_{2^{k+2}B_0}))^{-\alpha_2}(\widetilde{K}^{(2),p}_{2B_{k,l},2^{k+2}B_0})^{-1}$$

其中 c_4 是不依赖于 b 和 k 的正常数. 令

$$\lambda_{k,l}=c_4 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha_2)}{2}}\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j| \qquad m_{k,l}=\lambda_{k,l}^{-1}([T_\sigma,h]b)\chi_{D_{k,l}}$$

则

$$J_2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_0}\lambda_{k,l}m_{k,l} \qquad \mathrm{supp}\,(m_{k,l})\subset 2B_{k,l}\subset U_k(B_0)$$

且

$$\|m_{k,l}\|_{L^{q_2}(\mu)}\leqslant 2^{-\frac{k(\delta-v\alpha_2)}{2}}(\lambda(x_0,2^{k+2}r_{B_0}))^{-\alpha_2}(\widetilde{K}^{(2),p}_{2B_{k,l},2^{k+2}B_0})^{-1}$$

由 J_1 和 J_2 的估计知，$[T_\sigma,h]b$ 是$(\alpha_2,p,q_2,1,\delta,2)_\lambda$-分子块，且

$$|[T_\sigma,h]b|_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha_2,p,1,\frac{\delta-v\alpha_2}{2}}_{mb,q_2,2}(\mu)}=\sum_{j=1}^{2}|\sigma_{j,1}|^p+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_j-1}|\sigma_{j,2}^{(i)}|^p+\sum_{j=1}^{2}|\sigma_{j,3}|^p+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_0}|\lambda_{k,l}|^p\leqslant$$

$$C\left[\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|^p+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_j-2}|\lambda_j|^p\left(\frac{\mu(2^{i+3}B_j)}{\lambda(c_{B_j},2^i r_{B_j})}\right)^p(\widetilde{K}^{(2),p}_{B_j,B})^{-p}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_0}2^{-\frac{k(\delta-v\alpha_2)}{2}}\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|^p\right]\leqslant$$

$$C\left[\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|^p+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\frac{k(\delta-v\alpha_2)}{2}}M_0\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|^p\right]\leqslant C\sum_{j=1}^{2}|\lambda_j|^p\leqslant C|b|_{\widetilde{H\dot{K}}^{\alpha_1,p,2}_{atb,q_1,2}(\mu)}$$

这就完成了定理 2 的证明.

参考文献:

[1] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Cauchy Integral and Calderón-Zygmund Operators on Nonhomogeneous Spaces [J]. Int Math Res Not, 1997, 15(9): 703-726.

[2] TOLSA X. *BMO*, H^1 and Calderón-Zygmund Operators for Non-Doubling Measures [J]. Math Ann, 2001, 319(1): 89-149.

[3] YANG D C, YANG D Y, HU G E. The Hardy Space H^1 with Non-Doubling Measures and Their Application [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2013.

[4] HYTÖNEN T. A Framework for Non-Homogeneous Analysis on Metric Spaces, and the RBMO Space of Tolsa [J]. Publ Mat, 2010, 54(2): 485-504.

[5] HYTÖNEN T, YANG D C, YANG D Y. The Hardy Space H^1 on Non-Homogeneous Metric Spaces [J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2012, 153(1): 9-31.

[6] FU X, LIN H B, YANG D C, et al. Hardy Spaces H^p Over Non-Homogeneous Metric Measure Spaces and Their Applications [J]. Sci China Math, 2015, 58(2): 309-388.

[7] FU X, YANG D C, YUAN W. Generalized Fractional Integrals and Their Commutators Over Non-Homogeneous Metric Measure Spaces [J]. Taiwan J Math, 2014, 18(2): 509-557.

[8] CAO Y H, ZHOU J. The Boundedness of Marcinkiewicz Integrals Commutators on Nonhomogeneous Metric Measure Spaces [J]. J Inequal Appl, 2015, 2015: 1-18.

[9] LU G H, TAO S P. Boundedness of Commutators of Marcinkiewicz Integrals on Nonhomogeneous Metric Measure Spaces [J]. J Func Spaces, 2015, 2015: 1-12.

[10] LU S Z, YANG D C. The Weighted Herz-Type Hardy Spaces and Its Applications [J]. Sci China Math, 1995, 38(6): 662-673.

[11] LU S Z, TANG L, YANG D C. Boundedness of Commutators on Homogeneous Herz Spaces [J]. Sci China Math, 1998, 41(10): 1023-1033.

[12] LU S Z, YANG D C, HU G. Herz Type Spaces and Their Applications [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[13] 李　睿, 陶双平. 多线性奇异积分算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(10): 62-67.

[14] 陶双平, 刘钰琦. 变量核齐次分数次积分在 Morrey 空间上的估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(12): 52-58.

[15] 韩瑶瑶, 赵　凯. 非齐度量测度空间上的 Herz 型 Hardy 空间 [J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(10): 1315-1338.

[16] CALDERÓN A P. Commutators of Singular Integral Operators [J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1965, 53(5): 1092-1099.

[17] 郭庆栋, 周　疆. 分数次 Hardy 算子的交换子在 Lipschitz 空间上的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(8): 41-47.

[18] 周　盼, 周　疆. 多线性分数次积分算子在 Morrey 型空间上新的端点估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(12): 74-80.

[19] 赵　欢, 周　疆. 带变量核的分数次积分交换子在变指数 Herz-Morrey 空间上的有界性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(6): 11-16.

[20] COIFMAN R R, WEISS G. Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogénes [M] //Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

Boundedness of Commutators of Generalized Fractional Integral Operators on Non-homogeneous Metric Measure Spaces

ZHANG Zhen-rong[1], ZHAO Kai[2]

1. Department of Mathematics and Physics, Qingdao Huanghai University, Qingdao Shandong 266427, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China

Abstract: In this paper, using the properties of the non-homogeneous metric measure spaces, applying the theory of boundedness for singular integral operators, and based on the characterization of Herz spaces and the atomic and molecular decompositions of Herz-type Hardy spaces with non-homogeneous metric measure, the boundedness of the commutators generated by the generalized fractional integral operators and Lipschitz functions on the Herz spaces and Herz-type Hardy spaces with non-homogeneous metric measure are proved.

Key words: non-homogeneous metric measure space; generalized fractional integral operator; commutator; boundedness

责任编辑　廖　坤