DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2020.08.013

Heisenberg 群上次 Laplace 方程在次线性增长下的 Liouville 定理

王新敬[1,2]，　张姗姗[3,4]

1. 黄淮学院 数学与统计学院，河南 驻马店 463000；2. 黄淮学院 驻马店产业创新发展研究院，河南 驻马店 463000；
3. 曲阜师范大学 数学科学学院，山东 曲阜 273165；4. 嘉祥县第一中学，山东 济宁 272400

摘要：给出了 Heisenberg 群上次 Laplace 方程解的在满足次线性增长时的 Liouville 型定理，证明过程借助于 Heisenberg 群上的平均值公式.

关　键　词：次 Laplace 方程；次线性增长；Liouville 定理

中图分类号：O175.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2020)08－0097－05

调和方程的Liouville定理是经典的结果. 经典的Liouville定理是说：当调和函数有界时，函数是常数. 在各种条件下研究偏微分方程的Liouville定理是人们关注的热点问题. 文献[1]证明了：具有非负Ricci曲率的Riemann流形上的非负调和方程的解是常数. 文献[2]作了进一步推广，证明了：流形上次线性增长的调和方程的解也是常数. 文献[3]得到了Heisenberg群 $\mathbb{H}^n$ 上退化椭圆半线性方程有界解的Liouville定理. 关于欧氏空间和推广空间上的 Liouville 定理，可以参见文献[4-7].

受到文献[2]的启示，本文研究群 $\mathbb{H}^n$ 上次 Laplace 方程解的 Liouville 定理，即研究 $\mathbb{H}^n$ 上的次 Laplace 方程

$$-\Delta_{\mathbb{H}}u=0 \tag{1}$$

的解在满足次线性增长条件下的Liouville定理. 与文献[3]中的结论不同，本文对方程(1)的有界性条件有所减弱.

1　记号和准备知识

首先给出欧氏空间中调和函数平均值性质的定义. 令 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是连通区域，用 $B_r(x)\subseteq\mathbb{R}^n$ 表示以 x 为心 $r>0$ 为半径的球.

定义 1　对于 $u\in C(\Omega)$，令 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 上单位球的表面积.

(i) 若对于任何 $B_r(x)\in\Omega$ 有

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\mathrm{d}S_y$$

则称 u 满足第一平均值性质；

(ii) 若对于任何 $B_r(x)\in\Omega$ 有

$$u(x)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)}u(y)\mathrm{d}y$$

收稿日期：2019－11－29
基金项目：国家自然科学基金项目(11771354).
作者简介：王新敬(1986－)，男，讲师，主要从事偏微分方程理论及其应用的研究.

则称 u 满足第二平均值性质.

用 Δ 表示经典的 Laplace 算子. 下面我们引进 Heisenberg 群上的次 Laplace 算子.

Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 是 $\mathbb{R}^{2n+1}(n \geqslant 1)$ 上具有群作用 $\circ$ 的 Lie 群, 群作用 $\circ$ 为

$$\xi_0 \circ \xi = \left(x + x_0, y + y_0, t + t_0 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i_0} - y_i x_{i_0})\right)$$

其中 $\xi = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, t) = (x, y, t)$, $\xi_0 = (x_0, y_0, t_0)$.

相应的左不变向量场 Lie 代数为

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$T = \frac{\partial}{\partial t}$$

函数 u 的 Heisenberg 梯度定义为

$$\nabla_{\mathbb{H}} u = (X_i u, Y_i u) \qquad i = 1, \cdots, n$$

$\mathbb{H}^n$ 上的次 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 定义为

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + Y_i^2)$$

易得 X_i 和 Y_i 满足 $[X_i, Y_j] = -4T\delta_{ij}$, $[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = 0$, 其中 $i, j = 1, \cdots, n$. Hörmander 条件对于 $\{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n\}$ 成立(见文献[8]), 这表明 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 是退化椭圆算子(见文献[8]), 且含算子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 的方程的解满足极值原理(见文献[9]).

记 $Q = 2n + 2$ 是 $\nabla_{\mathbb{H}} u$ 的齐次维数, $|\xi|_{\mathbb{H}}$ 为点 ξ 到原点的距离(见文献[10]), 具体表示为

$$\rho = |\xi|_{\mathbb{H}} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)^2 + t^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$\nabla_{\mathbb{H}} u$ 上两点的距离记为

$$d_{\mathbb{H}}(\xi, \eta) = |\eta^{-1} \circ \xi|_{\mathbb{H}}$$

以 ξ_0 为心 $R > 0$ 为半径的球表示为

$$B_{\mathbb{H}}(\xi_0, R) = \{\eta \in \mathbb{H}^n \mid d_{\mathbb{H}}(\eta, \xi_0) < R\}$$

基底 $\{X_i, Y_i, T\}$ 可由 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ 通过 $\begin{pmatrix} I_n & 0 & 2y \\ 0 & I_n & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 形式的变换得到, 这里的 Lebesgue 测度是 $\mathbb{H}^n$ 上的 Haar 测度.

由群伸缩 $\delta_\lambda(\xi) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 t)$, 可知 $\xi \longrightarrow |\xi|_{\mathbb{H}}$ 是一阶齐次的, 则有

$$|B_{\mathbb{H}}(\xi_0, R)| = |B_{\mathbb{H}}(0, 1)| R^Q$$

其中 $|\cdot|$ 是 Lebesgue 测度.

直接计算可以得到

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 4y_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} - 4x_i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial t} + 4(x_i + y_i)\frac{\partial^2}{\partial t \partial t}\right) \tag{2}$$

$\Delta_{\mathbb{H}}$ 作用在只与 ρ 有关的径向函数 u 上, 由(2)式可以得到

$$\Delta_{\mathbb{H}} u(\rho) = \psi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{Q-1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)$$

其中 ψ 定义为

$$\psi(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)}{\rho^2} = |\nabla_{\mathbb{H}} \rho|^2 \qquad \xi \neq 0 \tag{3}$$

类似于 Kohn-Laplace 算子和经典的 Laplace 算子，文献[11] 给出了 $-\Delta_{\mathbb{H}}$ 的基本解，记为

$$\Gamma(\xi)=\frac{C_Q}{\rho^{Q-2}}$$

同时文献[12-13] 也给出了如下平均值公式：设 $\Omega\subseteq\mathbb{H}^n$ 为有界开集，$u\in C^2(\Omega)$，$\overline{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\subseteq\Omega$，有

$$u(\xi)=(M_R u)(\xi)-\frac{Q}{R^Q}\int_0^R r^{Q-1}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,r)}\left(\Gamma(\xi,\eta)-\frac{C_Q}{r^{Q-2}}\right)\Delta_{\mathbb{H}}u(\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r \tag{4}$$

其中 M_R 为平均值算子

$$(M_R u)(\xi)=\frac{C_Q}{R^Q}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}u(\eta)\psi(\eta)\mathrm{d}\eta$$

这里 ψ 由 (3) 式给出，$C_Q=|B_{\mathbb{H}}(\xi,1)|^{-1}$.

2　主要结果和证明

证明关于方程(1) 的 Liouville 定理之前，我们首先给出两个引理，引理 1 在流形上的证明可参见文献[1,14]，引理 1 是关于梯度估计的直接结果. 这里满足的假设条件不同，我们根据文献[15] 给出证明.

引理 1　设 M^m 是具有非负 Ricci 曲率的完备流形，在 M^m 上记 $B_p(\varphi)$ 是以 p 为心 $\varphi>0$ 为半径的球. 存在常数 $C(m)>0$，使得对任意定义在 M 上的调和函数 u(即 $-\Delta u=0$)，如果记

$$i(\varphi)=\inf_{x\in B_p(\varphi)}u(x)$$

那么对任意的 $x\in B_p(\varphi)$，有

$$|\nabla u|(x)\leqslant C\,\frac{u(x)-i(2\varphi)}{\varphi}$$

特别地，M 不容许任何非常数的调和函数满足增长估计

$$\lim_{x\to\infty}r^{-1}(x)u(x)=0$$

其中 $r_p(x)=r(p,x)$ 是 M 上的点 x 距 p 的距离，为了简单记为 $r(x)$.

证　因为 Ricci 曲率是非负的，方程 u 是调和的，因此对任意 $x\in B_p(\varphi)$ 和 $\varepsilon<2$，利用文献[12] 中定理 6.1 的梯度估计，有

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}(x)\leqslant C\,\frac{1+\varepsilon^{-1}}{\varphi^2} \tag{5}$$

显然，$u(x)-i(2\varphi)$ 是 $B_p(2\varphi)$ 上的正调和函数. 利用(5) 式，令 $\varepsilon=1$，对任意的 $x\in B_p(\varphi)$ 可以得到

$$|\nabla u|^2(x)\leqslant C\,\frac{(u(x)-i(2\rho))^2}{\varphi^2}$$

由极值原理，$i(\varphi)$ 的极值在某点 $x\in\partial B_p(\varphi)$ 处达到. 特别地，$\varphi^{-1}i(\varphi)=r^{-1}(x)u(x)$. 由 u 的增长性假设可以得到

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{-1}i(\varphi)=0$$

因此，任意固定点 $x\in M$，有

$$|\nabla u|(x)\leqslant\lim_{\varphi\to\infty}C\varphi^{-1}(u(x)-i(2\varphi))=0$$

则可知 u 必为常数. 引理 1 得证.

现在根据文献[16] 接着证明引理 2，即欧氏空间上次线性增长调和函数的 Liouville 定理.

引理 2　设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，满足次线性增长条件

$$\lim_{x\to\infty}r^{-1}(x)u(x)=0$$

则 u 为常数.

证　由 u 是调和函数，则 $\Delta(D_{x_i}u)=0$，即 $D_{x_i}u$ 是调和函数. 由平均值性质和散度定理，有

$$D_{x_i}u(x)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)}D_{x_i}u(y)\mathrm{d}y=\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r(x)}u(y)v_i\mathrm{d}S_y$$

为了简单，我们假设 u 非负，则有

$$|D_{x_i}u(x)| \leqslant \frac{n}{\omega_n r^n}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\mathrm{d}S_y = \frac{n}{r}u(x)$$

对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$，利用次线性增长条件 $\lim\limits_{x\to\infty} r^{-1}(x)u(x)=0$，可以得到 $Du(x)=0$.

定理 1 假设 u 是方程(1)的解，且满足次线性增长条件 $\lim\limits_{\xi\to\infty} r^{-1}(\xi)u(\xi)=0$，则 u 为常数.

证 由 Hörmander 条件可知，$T=\dfrac{\partial}{\partial t}$ 与 X_i，Y_i 可交换，因此就有

$$\Delta_{\mathbb{H}}(Tu)=T(\Delta_{\mathbb{H}}u)$$

由(4)式，对任意的 $\xi \in \mathbb{H}^n$，$R>0$，可以得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\xi)\right| &= \left|\frac{C_Q}{R^Q}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\frac{\partial u}{\partial t}(\eta)\psi(\eta)\mathrm{d}\eta\right| = \\ &\left|-\frac{C_Q}{R^Q}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\frac{\partial \psi}{\partial t}(\eta)u(\eta)\mathrm{d}\eta + \frac{C_Q}{R^Q}\int_{\partial B_{\mathbb{H}}(\xi,R)} u\psi v_t \mathrm{d}H_{2n}\right| \leqslant \\ &\frac{C_Q}{R^Q}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\left|\frac{\partial \psi}{\partial t}(\eta)u(\eta)\right|\mathrm{d}\eta + \frac{C_Q}{R^Q}\int_{\partial B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}|u\psi v_t|\mathrm{d}H_{2n} \leqslant \\ &\frac{C_Q}{R^Q}\|u\|_{L^\infty}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\frac{|\psi||t|}{\rho^4}\mathrm{d}\eta + \frac{C_Q}{R^Q}\|u\|_{L^\infty}\int_{\partial B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\frac{|\psi||t|}{2\rho^3}\mathrm{d}H_{2n} \leqslant \\ &\frac{C_Q}{R^Q}\|u\|_{L^\infty}\int_{B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{d}\eta + \frac{C_Q}{R^Q}\|u\|_{L^\infty}\int_{\partial B_{\mathbb{H}}(\xi,R)}\frac{1}{\rho|\nabla\rho|}\mathrm{d}H_{2n} \leqslant \\ &\frac{C}{R^2}\|u\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

利用次线性增长条件

$$\lim_{\xi\to\infty} r^{-1}(\xi)u(\xi)=0$$

对任意的 $\xi \in \mathbb{H}^n$，有

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\xi)=0$$

则 $u \in \mathbb{R}^{2n+1}$ 是方程

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

的解. 利用引理 1 和引理 2 即得到结论.

3 结束语

本文利用 Heisenberg 群上平均值公式建立了 Heisenberg 群上次 Laplace 方程的解在满足次线性增长条件时的 Liouville 型定理，其结果是对经典 Liouville 定理的推广，把以前要求的解的有界性条件减弱成了解的次线性增长条件，这对于解决具有同样类型条件的问题具有一定的借鉴意义.

参考文献：

[1] YAU S T. Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds [J]. Comm Pure Appl Math，1975，28(2)：201-228.

[2] CHENG S Y. Liouville Theorem for Harmonic Maps [J]. Proc Symp Pure Math，1980，36：147-151.

[3] BIRINDELLI I，CAPUZZO DOLCETTA I，CUTRI A. Liouville Theorems for Semilinear Equations on the Heisenberg Group [J]. Ann Inst Henri Poincare，1997，14(3)：295-308.

[4] 王胜军，窦井波. Heisenberg 型群上的广义 Picone 恒等式及其应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(2)：48-54.

[5] 周俞洁，张泽宇，王林峰. 黎曼流形上 p-Laplace 算子的 Liouville 定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，

39(10)：62 -68.

[6] 王胜军，韩亚洲. Baouendi-Grushin p-退化椭圆算子的广义 Picone 恒等式及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(3)：1-6.

[7] BIRINDELLI I，DEMENGEL F. Some Liouville Theorems for the p-Laplacian [EB/OL]. [2019-10-20]. https：//arXiv. org/abs/math/0106231.

[8] HORMANDER L. Hypoelliptic Second Order Differential Equations [J]. Acta Math，1967，119：147-171.

[9] BONY J M. Principe du Maximum，Inégalité de Harnack et Unicité du Probleme de Cauchy Pour Les Operateurs Ellipitiques Degeneres [J]. Ann Inst Fourier Grenobles，1969，19(1)：277-304.

[10] FOLLAND G B. A Fundamental Solution for a Subelliptic Operator [J]. Bull Amer Math Soc，1973，79(2)：373-377.

[11] FOLLAND G B. Spherical Harmonic Expansion of the Poisson-Szego Kernel for the Ball [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1975，47(2)：401-408.

[12] GAROFALO N，Lanconelli E. Frequency Functions on the Heisenberg Group，the Uncertainty Principle and Unique Continuation [J]. Annales De I'Institut Fourier，1990，40(2)：313-356.

[13] GAVEAU B. Principe de Moindre Action，Propagation de la Chaleur et Estimees Sous Elliptiques sur Certains Groupes Nilpotents [J]. Acta Math，1977，139：95-153.

[14] CHENG S Y. Eigenvalue Comparison Theorems and Its Geometric Applications [J]. Math Z，1975，143(3)：289-297.

[15] LI P. Geometric Analysis [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2012：57-66.

[16] HAN Q，LIN F H. Elliptic Partial Differential Equations [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，2000.

The Liouville Theorem for the Sub-linear Growth Sub-Laplace Equation on the Heisenberg Group

WANG Xin-jing[1,2]，　ZHANG Shan-shan[3,4]

1. *School of Mathematics and Statistics，Huanghuai University，Zhumadian Henan 463000，China；*
2. *Zhumadian Academy of Industry Innvation and Development，Huanghuai University，Zhumadian Henan 463000，China；*
3. *School of Mathematics Science，Qufu Normal University，Qufu Shandong 273165，China；*
4. *Jiaxiang No. 1 Middle School，Jining Shandong 272400，China*

Abstract：In this paper，we give the Liouville theorem to the sub-Laplace equation on the Heisenberg group whose solutions satisfy the sub-linear growth condition. In the process of proof we use the mean value formula on the Heisenberg group.

Key words：sub-Laplace equation；sub-linear growth；Liouville theorem

责任编辑　廖　坤