DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.08.014

幂等算子核空间的刻画

刘　妮[1]，　郭艳鹂[1]，　任谨慎[1]，　庞永峰[2]

1. 空军工程大学 基础部，西安 710051；2. 西安建筑科技大学 理学院，西安 710055

摘要： 设 H 为复可分无限维 Hilbert 空间，E 是 H 上的幂等算子．主要研究了 H 上幂等算子 E 的核空间上正交投影算子 $P_{N(E)}$ 的矩阵表示，给出了 $P_{N(E)}$ 的一个具体刻画．作为推论，进一步讨论了 $P_{N(E)}$ 与 E 的值域空间上正交投影 P_E 之差的可逆性及其逆的表示．

关 键 词： 幂等算子；部分等距算子；核空间；正交投影

中图分类号： O177.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2020)08－0102－04

幂等算子因具有特殊的性质，在统计理论、信息传送、量子信息及经济学领域都有极为广泛的应用[1-6]．一直以来，关于幂等算子及线性组合的表示与刻画都吸引着众多学者的关注．近年来，关于幂等算子的分解性及几何结构得到了研究[3-16]．文献[13-14]对幂等算子的 J-正(负)压缩、扩张的存在性及性质进行了讨论．特别地，文献[15]对 Krein 空间中的幂等算子进行了研究．本文主要针对幂等算子核空间上的正交投影算子 E 进行了研究，给出了该投影算子的一个矩阵表示，进一步借助该矩阵表示，给出了 E 的核空间上正交投影 $P_{N(E)}$ 与 E 的值域空间上正交投影 P_E 之差的可逆性及其逆的表示，而这一结论也是文献[16]的主要结论．

设 H 与 K 表示无限(可分)复 Hilbert 空间，$B(H)$,$B(H, K)$ 分别表示 H 及 H 到 K 上全体有界线性算子之集．对 $B(H)$ 中的算子 A，用 A^* 表示 A 的伴随．若 $A\in B(H)$ 满足 $(Ax, x)\geqslant 0$ 成立，则称 A 是正的，记作 $A\geqslant 0$．用 $B(H)^+$ 表示 H 上全体正的有界算子之集，若 $A\in B(H)^+$，记 $A^{\frac{1}{2}}$ 为正算子 A 的平方根．若 $A\in B(H)$ 满足 $A=A^2$，则称 A 是幂等的，用 $B(H)^{\mathrm{Id}}$ 表示 H 中的全体幂等算子之集．对 H 的闭子空间 M，记 P_M 为 M 中的正交投影．特别地，P_A 表示闭子空间 $\overline{R(A)}$ 上的正交投影．设 $T\in B(H, K)$，我们用 $N(T)$,$R(T)$ 及 $\overline{R(T)}$ 分别表示算子 T 的核空间、值域空间以及值域空间 $R(T)$ 的闭包．

容易验证：若 $P\in B(H)^{\mathrm{Id}}$，则 $R(P)$ 是闭子空间，且 P 可以写作 2×2 矩阵形式

$$P=\begin{pmatrix} I & P_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: R(P)\oplus R(P)^{\perp} \tag{1}$$

其中 $P_1\in B(R(P)^{\perp}, R(P))$.

引理 1　设 $A\in B(H)^+$，且 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} I & A \\ A & A^2 \end{pmatrix}$，则 $\widetilde{A}\in B(H\oplus H)^+$，且

$$P_{\widetilde{A}}=\begin{pmatrix} (I+A^2)^{-1} & A(I+A^2)^{-1} \\ A(I+A^2)^{-1} & A^2(I+A^2)^{-1} \end{pmatrix}: H\oplus H \tag{2}$$

证　显然，$\widetilde{A}\geqslant 0$．容易验证

收稿日期：2019－09－26

基金项目：陕西省教育厅专项基金项目(2013JK0565)；陕西省自然科学面上基金项目(2019JM252)；空军工程大学基础部基金项目(JK2020106)．

作者简介：刘　妮(1976－)，女，副教授，主要从事算子广义逆的研究．

$$P_{\mathcal{X}}^2 = P_{\mathcal{X}} \geqslant 0 \qquad P_{\mathcal{X}}\widetilde{A} = \widetilde{A} \tag{3}$$

令 $x \in H$，$y \in H$，且满足 $\widetilde{A}(x, y)^t = 0$，即 $x + Ay = 0$，也就是 $x = -Ay$，进一步 $P_{\mathcal{X}}(x, y)^t = 0$. 因此 $N(\widetilde{A}) \subseteq N(P_{\mathcal{X}})$，也就有 $\overline{R(\widetilde{A})} \supseteq R(P_{\mathcal{X}})$. 结合等式(3)知 $\overline{R(\widetilde{A})} = R(P_{\mathcal{X}})$，因此 $P_{\mathcal{X}}$ 是子空间 $\overline{R(\widetilde{A})}$ 上的正交投影.

引理 2[11]（极分解定理）　设 $T \in B(H, K)$，则存在部分等距算子 $U \in B(H, K)$，使得 $T = U(T^*T)^{\frac{1}{2}}$，且满足 $R(U) = \overline{R(T)}$ 与 $R(U^*) = \overline{R(T^*)}$.

引理 3　设 $G \in B(H)$ 是自伴算子，若存在部分等距算子 $U \in B(H, K)$，使得 $F = UGU^*$ 且 $U^*UG = G$，则 $P_F = UP_GU^*$.

证　记 $Q = UP_GU^*$，则

$$Q^2 = UP_GU^*UP_GU^* = UP_GU^* = Q$$

因此 Q 是正交投影. 取 $x \in H$，则有

$$Fx = UGU^*x = UP_GU^*UGU^*x = QUGU^*x = QFx$$

故 $R(F) \subseteq R(Q)$，则 $\overline{R(F)} \subseteq R(Q)$.

若 $Fx = 0$，则

$$GU^*x = U^*UGU^*x = U^*Fx = 0$$

这也就有 $U^*x \in N(G) = R(G)^{\perp}$，故 $P_GU^*x = 0$，因此 $Qx = UP_GU^*x = 0$. 则 $N(F) \subseteq N(Q)$，即 $\overline{R(F)} \supseteq R(Q)$，因此 $\overline{R(F)} = R(Q)$，则 $P_F = Q = UP_GU^*$.

引理 4　设 V 为部分等距算子，$F, G \in B(H)$ 是自伴的. 若 $V^*VG = 0$ 且 $V^*VF = F$，则

$$P_{V(F+G)V^*} = VP_FV^* = VP_{F+G}V^*$$

证　由于 $GV^*V = (V^*VG)^* = 0$，故 $GF = GV^*VF = 0$，因此 $P_F + P_G = P_{F+G}$.

注意到 $V^*VG = 0$，则 $R(P_G) = \overline{R(G)} \subseteq N(V)$，故 $VGV^* = 0$ 及 $VP_GV^* = 0$ 成立. 因此

$$VP_{F+G}V^* = V(P_F + P_G)V^* = VP_FV^*$$

又由引理 3 知 $P_{VFV^*} = VP_FV^*$，所以

$$P_{V(F+G)V^*} = P_{VFV^*} = VP_FV^* = VP_{F+G}V^*$$

定理 1　设 $E \in B(H)^{\mathrm{Id}}$ 具有(1)式的形式，I_1 和 I_2 分别表示子空间 $R(E)$ 与 $R(E)^{\perp}$ 上的单位算子，则

$$P_{N(E)} = \begin{pmatrix} E_1(I_2 + E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & -E_1(I_2 + E_1^*E_1)^{-1} \\ -(I_2 + E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & (I_2 + E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix} : R(E) \oplus R(E)^{\perp} \longrightarrow R(E) \oplus R(E)^{\perp} \tag{4}$$

证　显然，$E^*E = \begin{pmatrix} I_1 & E_1 \\ E_1^* & E_1^*E_1 \end{pmatrix} : R(E) \oplus R(E)^{\perp} \longrightarrow R(E) \oplus R(E)^{\perp}$.

由极分解定理，存在部分等距算子 $V \in B(R(E)^{\perp}, R(E))$，使得 $E_1 = V(E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}}$，$R(V) = \overline{R(E_1)}$ 且 $R(V^*) = \overline{R(E_1^*)}$，则有

$$E^*E = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} \\ (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} & E_1^*E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 - VV^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

记

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} \\ (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} & E_1^*E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} V^*V & (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} \\ (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} & E_1^*E_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_2 - V^*V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

容易验证

$$\begin{pmatrix} V^*V & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^*V & (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} \\ (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} & E_1^*E_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V^*V & (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} \\ (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}} & E_1^*E_1 \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} V^*V & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2-V^*V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

因此，由引理 4 和引理 1，我们有

$$P_{\tilde{S}}=\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (I_2+E_1^*E_1)^{-1} & (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}}(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ (E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}}(I_2+E_1^*E_1)^{-1} & (E_1^*E_1)(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^* & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} V(I_2+E_1^*E_1)^{-1}V^* & E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ (I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & (E_1^*E_1)(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} V(I_2+E_1^*E_1)^{-1}V^*+I_1-VV^* &= I_1-V[I_2-(I_2+E_1^*E_1)^{-1}]V^*= \\ & I_1-V(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^*E_1V^*= \\ & I_1-V(E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}}(I_2+E_1^*E_1)^{-1}(E_1^*E_1)^{\frac{1}{2}}V^*= \\ & I_1-E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* \end{aligned}$$

故由 (5) 式知

$$P_{E^*E}=P_{\tilde{S}}+\begin{pmatrix} I_1-V^*V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V(I_2+E_1^*E_1)^{-1}V^*+I_1-VV^* & E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ (I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & (E_1^*E_1)(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} I_1-E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ (I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & (E_1^*E_1)(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}$$

又由于

$$I_2-(E_1^*E_1)(I_2+E_1^*E_1)^{-1}=(I_2+E_1^*E_1)^{-1}$$

则

$$P_{N(E)}=P_{N(E^*E)}=I-P_{E^*E}=\begin{pmatrix} E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & -E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ -(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & (I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}$$

作为推论，我们可以得到文献[16]中的定理 2：

推论 1[16] 设 $E\in B(H)^{\mathrm{Id}}$，则：

(i) $P_{N(E)}-P_E$ 及 $E+E^*-I$ 可逆，且 $(E+E^*-I)^{-1}=P_E-P_{N(E)}$；

(ii) $E=P_E(P_E-P_{N(E)})^{-1}$ 且 $P_{N(E)}=(E-I)(E+E^*-I)^{-1}$ 成立.

证 (i) 由于 $I_1-E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^*=I_1-(I_1+E_1^*E_1)^{-1}E_1E_1^*=(I_1+E_1E_1^*)^{-1}$，则由定理 1 知

$$P_E-P_{N(E)}=\begin{pmatrix} I_1-E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ (I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & -(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} (I_1+E_1E_1^*)^{-1} & E_1(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \\ (I_2+E_1^*E_1)^{-1}E_1^* & -(I_2+E_1^*E_1)^{-1} \end{pmatrix}$$

显然，

$$E+E^*-I=\begin{pmatrix} I_1 & E_1 \\ E_1^* & -I_2 \end{pmatrix}$$

直接计算可得

$$(E+E^*-I)(P_E-P_{N(E)})=(P_E-P_{N(E)})(E+E^*-I)=I$$

(ii) 显然 $P_E = E(P_E - P_{N(E)})$ 且 $P_{N(E)} = (E-I)(P_E - P_{N(E)})$，故由(1)式得

$$E = P_E(P_E - P_{N(E)})^{-1} \qquad P_{N(E)} = (E-I)(E+E^* - I)^{-1}$$

参考文献：

[1] ANDO T. Unbounded or Bounded Idempotent Operators in Hilbert Space [J]. Linear Algebra Appl，2013，438(10)：3769-3775.

[2] SANDER T. Bounds in Cohen's Idempotent Theorem [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications，2020，26：1-64.

[3] AKBAR Z. A Characterization of Dichotomy in Therm of Boundedness of Solutions for Some Cauchy Problems [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2008，2008(94)：1-5.

[4] ANDRUCHOW E. Classes of Idempotents in Hilbert Space [J]. Complex Anal Oper Theory，2016，10(6)：1383-1409.

[5] 窦艳妮，杜鸿科. 广义逆在幂等算子表示中的应用 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版)，2011，39(6)：10-13.

[6] BÖTTCHER A，SIMON B，SPITKOVSKY I. Similarity Between Two Projections [J]. Integral Equuations and Operator Theory，2017，89(4)：507-518.

[7] CORACH G，PORTA H，RECHT L. The Geometry of Spaces of Projections in C*-Algebras [J]. Adv Math，1993，101(1)：59-77.

[8] CHEN L，LI J，LU F Y. Maps on Idempotent Operators with Infinite-Dimensional Kernel [J]. Bulletin of Iranian Mathematical Society，2020，46(1)：263-270.

[9] RAKOČEVIĆ V. On The Norm of Idempotent Operators in a Hilbert space [J]. The American Mathematical Monthly，2000，107(8)：748-750.

[10] DUDEK W A，MONZO R. The Structure of Idempotent Translatable Quasigroups [EB/OL]. [2019-08-05]. https：//arXiv. org/abs/1810. 04566.

[11] HALMOS P R. A Hilbert Space Problem Book [M]. New York：Springer-Verlag，1982.

[12] 张宗杰，吴 炎. 对角线元为数量幂等矩阵的上三角矩阵及其应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(8)：6-11.

[13] LI Y，CAI X M，NIU J J，et al. The Minimal and Maximal Symmetries for J-Contractive Projections [J]. Linear Algebra Appl，2019，563：313-330.

[14] HASSI S，NORDSTRÖM K. On Projections in a Space with an Indefinite Metric [J]. Linear Algebra Appl，1994，208-209：401-417.

[15] ANDO T. Projections in Krein Spaces [J]. Linear Algebra Appl，2009，431(12)：2346-2358.

[16] BUCKHOLTZ D. Hilbert Space Idempotents and Involution [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1999，128(5)：1415-1418.

Characterization of the Kernel Space of Idempotent Operator

LIU Ni[1]， GUO Yan-li[1]， REN Jin-shen[1]， PANG Yong-feng[2]

1. Basic Department，Air Force Engineering University，Xi'an 710051，China；

2. College of Science，Xi'an University of Architecture & Technology，Xi'an 710055，China

Abstract：Let H be an infinite-dimensional separable Hilbert space，and E be an idempotent operator in H. In this paper，the operator matrix representation of the orthogonal projection $P_{N(E)}$ on the kernel space of E is studied. A concrete structure of $P_{N(E)}$ is given. As corollary，the invertibility of the difference for $P_{N(E)}$ and orthogonal projection P_E on range space of E is obtained.

Key words：idempotent operator；partial isometry operator；kernel space；orthogonal projection

责任编辑 廖 坤