第 42 卷第 10 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2020年10月
Vol. 42 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.10.013

Gorenstein AC-投射模的函子伴随性

王 兴， 杨 刚

兰州交通大学 数理学院，兰州 730070

摘要：主要研究了 Gorenstein AC-投射模以及投射维数有限的模类的逼近，构造了 Gorenstein AC-投射模范畴相关的稳定范畴之间的两对伴随函子.

关 键 词：Gorenstein AC-投射模；伴随函子；稳定范畴

中图分类号：O154.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1673－9868(2020)10－0101－08

投射模是同调代数中的重要研究对象之一．文献[1]在一般环上引入了 Gorenstein 投射模的概念，推广了经典的投射模．自此，众多学者对 Gorenstein 同调理论进行了研究．文献[2]引入了 Level 模的概念，并在此基础上定义了 Gorenstein AC-投射模．文献[3]研究和刻画了 Gorenstein 投射维数有限的模，特别地，建立了 Gorenstein 投射维数有限的模的稳定子范畴与 Gorenstein 投射模的稳定子范畴间的伴随函子．受此启发，本文将研究和刻画 Gorenstein AC-投射维数有限的模，并建立 Gorenstein AC-投射维数有限的模的稳定子范畴和 Gorenstein AC-投射模的稳定子范畴间的伴随函子.

本文中 R 指有单位元的结合环，除非特别指出，所有的 R-模都指左 R-模．对任意模 M，$pd_R M$ 表示 M 的投射维数，用 ΩM 表示满映射 $P \longrightarrow M$ 的核，其中 P 是投射模．设 $\Omega^1 M = \Omega M$ 和 $\Omega^n M = \Omega\Omega^{n-1} M$，即如果 $P_* \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是 M 的一个投射分解，则 $\Omega^n M$ 是映射 $P_n \longrightarrow P_{n-1}$ 的像，其中 $n \geqslant 1$.

定义 1[4] 令 M 是左 R-模，如果 M 有一个投射分解

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 都是有限生成模，则称 M 是超有限表示(或 FP_∞ 型)的.

定义 2[4] 如果对任意超有限表示右 R-模 M，有 $\mathrm{Tor}_R^1(M, N) = 0$，则称左 R-模 N 是 Level 模.

定义 3[2] 如果存在投射模的正合列

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \longrightarrow P^1)$，并且对任意 Level 模 L，$\mathrm{Hom}_R(-, L)$ 作用以上序列仍然得到正合序列，则称左 R-模 M 是 Gorenstein AC-投射模.

收稿日期：2020－03－12

基金项目：国家自然科学基金项目(11561039)；兰州交通大学“百名青年优秀人才培养计划”基金项目；甘肃省自然科学基金项目(17JR5RA091).

作者简介：王 兴(1995－)，男，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

定义 4[5]　设 M 是左 R- 模. 令

$GCpd_R(M)=$

$\inf\{n$：存在正合列 $0\longrightarrow G_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow G_1\longrightarrow G_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中每个 G_i 是 Gorenstein AC- 投射模$\}$

则称 $GCpd_R(M)$ 是 M 的 Gorenstein AC- 投射维数. 如果没有这样的 n 存在，那么就记 $GCpd_R(M)=\infty$.

命题 1　模 M 是 Gorenstein AC- 投射的当且仅当存在一个左 R- 模的短正合列

$$0\longrightarrow M\longrightarrow P\longrightarrow G\longrightarrow 0$$

其中 P 是投射的，G 是 Gorenstein AC- 投射的.

证　*必要性*　由定义可得.

充分性　因 P 是投射的，则 P 也是 Gorenstein AC- 投射的. 由文献[5]的引理 3.3 可知 Gorenstein AC- 投射模类是可解的，所以 M 是 Gorenstein AC- 投射的.

命题 2　对模 M，$n\in\mathbb{Z}$，以下条件是等价的：

(a) $GCpd_RM\leqslant n$；

(b) 存在短正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow G\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中 G 是 Gorenstein AC- 投射的，并且 $pd_RK\leqslant n-1$(如果 $n=0$，则 $K=0$)；

(c) 存在短正合列 $0\longrightarrow M\longrightarrow A\longrightarrow G'\longrightarrow 0$，其中 G' 是 Gorenstein AC- 投射的，并且 $pd_RA\leqslant n$.

证　(a)⇒(b)　若 $GCpd_RM\leqslant n$，则存在正合列

$$0\longrightarrow G_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow G_1\longrightarrow G_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中每个 G_i 是 Gorenstein AC- 投射模($i=0,1,\cdots,n$). 取 M 的投射分解

$$0\longrightarrow G'\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中每个 P_i 是投射模. 由文献[6]的引理 2.2.1 可知，G' 是 Gorenstein AC- 投射模. 由 Gorenstein AC- 投射模的定义知，存在正合列

$$0\longrightarrow G'\longrightarrow Q_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow Q_0\longrightarrow G\longrightarrow 0 \tag{1}$$

其中 G 是 Gorenstein AC- 投射模，Q_i 是投射模($i=0,1,\cdots,n-1$). 且对任意的 Level 模 L，$\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 作用于正合列(1)仍保持正合. 特别地，$\mathrm{Hom}_R(-,P_i)$ 作用于正合列(1)仍保持正合. 于是存在同态 $Q_i\longrightarrow P_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 和 $G\longrightarrow M$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdots \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & G' \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

从而得到复形链映射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

取映射锥可得正合列

$$0\longrightarrow K\longrightarrow P_0\oplus G\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow Q_{n-1}\longrightarrow P_{n-1}\oplus Q_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\oplus Q_0\longrightarrow P_0\oplus G\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

其中 $P_0\oplus G$ 是 Gorenstein AC- 投射模，$P_i\oplus Q_{i-1}$ 以及 Q_{n-1} 是投射模. 取 $K=\mathrm{Ker}(P_0\oplus G\longrightarrow M)$，则得到以下两个正合列：

$$0\longrightarrow K\longrightarrow P_0\oplus G\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow Q_{n-1}\longrightarrow P_{n-1}\oplus Q_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\oplus Q_0\longrightarrow K\longrightarrow 0$$

显然 $pd_RK \leqslant n-1$.

(b)⇒(a)　显然.

(b)⇒(c)　由 G 是 Gorenstein AC- 投射模知，存在短正合列 $0 \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow G' \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模，G' 是 Gorenstein AC- 投射模. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 $pd_RK \leqslant n-1$ 可得 $pd_RA \leqslant n$. 显然，在序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow G' \longrightarrow 0$ 中，G' 是 Gorenstein AC- 投射模.

(c)⇒(b)　由 $pd_RA \leqslant n$ 可知，存在短正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$，其中 P 是投射模且 $pd_RK \leqslant n-1$. 考虑拉回图

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

已知 G' 是 Gorenstein AC- 投射的，由命题 1 可得 G 也是 Gorenstein AC- 投射的.

引理 1　设模 M 的 Gorenstein AC- 投射维数有限，有如下结论成立：

(i) 设 $0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow \overline{K} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 是左 R- 模的两个短正合列，其中 K 和 $\overline{K}$ 的投射维数有限，G 和 $\overline{G}$ 是 Gorenstein AC- 投射模，则存在同构式 $G \oplus \overline{K} \cong \overline{G} \oplus K$；

(ii) 设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow G' \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow M \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow \overline{G}' \longrightarrow 0$ 是左 R- 模的两个短正合列，其中 A 和 $\overline{A}$ 的投射维数有限，G' 和 $\overline{G}'$ 是 Gorenstein AC- 投射模，则存在同构式 $G' \oplus \overline{A} \cong \overline{G}' \oplus A$.

证　(i)　已知 G 是 Gorenstein AC- 投射的，$pd_R\overline{K} < \infty$，由文献[5]的引理 3.3 得 $\mathrm{Ext}_R^1(G, \overline{K}) = 0$. 用 $\mathrm{Hom}_R(G, -)$ 作用正合列 $0 \longrightarrow \overline{K} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow M \longrightarrow 0$，可得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, \overline{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, \overline{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, M) \longrightarrow 0$$

因此存在 $\lambda: G \longrightarrow \overline{G}$，使得下图右边方框可交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "l"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{K} \arrow[r] & \overline{G} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由分解引理知存在映射 $l: K \longrightarrow \overline{K}$，使得左边方框可交换，此即该图是交换图. 考虑两个正合列的映射锥：$0 \longrightarrow K \longrightarrow G \oplus \overline{K} \longrightarrow M \oplus \overline{G} \longrightarrow M \longrightarrow 0$. 构造图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "="] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & G\oplus\overline{K} \arrow[r] \arrow[d] & M\oplus\overline{G} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & G\oplus\overline{K} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

则有正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G \oplus \overline{K} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

因为 $\overline{G}$ 是 Gorenstein AC-投射的,K 的投射维数有限,故 $\mathrm{Ext}_R^1(\overline{G}, K)=0$. 因此正合列(2)可裂. 故存在同构 $G \oplus \overline{K} \cong \overline{G} \oplus K$.

(ⅱ) 已知 G' 是 Gorenstein AC-投射的,且 $pd_R\overline{A}<\infty$,由文献[5]的引理3.3可知 $\mathrm{Ext}_R^1(G', \overline{A})=0$. 用 $\mathrm{Hom}_R(-, \overline{A})$ 作用正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow G' \longrightarrow 0$,可得正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G', \overline{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, \overline{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \overline{A}) \longrightarrow 0$$

因此存在 $\rho: A \longrightarrow \overline{A}$,使得下图左边方框可交换:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & G' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \overline{A} \arrow[r] & \overline{G}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

由分解引理知,存在映射 $\gamma: G' \longrightarrow \overline{G}'$ 使得右边方框可交换. 即该图是交换图. 考虑两个正合列的映射锥 $0 \longrightarrow M \longrightarrow A \oplus M \longrightarrow G' \oplus \overline{A} \longrightarrow \overline{G}' \longrightarrow 0$,构造图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & G'\oplus\overline{A} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{G}' \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & A\oplus M \arrow[r] \arrow[d] & G'\oplus\overline{A} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{G}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

则有正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G' \oplus \overline{A} \longrightarrow \overline{G}' \longrightarrow 0 \tag{3}$$

因为 $\overline{G}'$ 是 Gorenstein AC-投射的,A 的投射维数有限,故 $\mathrm{Ext}_R^1(\overline{G}', A)=0$. 因此正合列(3)可裂. 故存在同构 $G' \oplus \overline{A} \cong \overline{G}' \oplus A$.

推论1 设模 M 的 Gorenstein AC-投射维数有限,则以下结论成立:

(a) M 是 Gorenstein AC-投射的当且仅当对任意投射维数有限的模 K,$\mathrm{Ext}_R^1(M, K)=0$.

(b) M 的投射维数有限当且仅当对任意的 Gorenstein AC-投射模 G',$\mathrm{Ext}_R^1(G', M)=0$.

证 (a) 必要性 显然.

充分性 考虑短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{4}$$

其中 G 是 Gorenstein AC- 投射的，K 的投射维数有限．由 $\mathrm{Ext}_R^1(M, K)=0$ 知正合列(4)是可裂的．则 M 是Gorenstein AC- 投射模 G 的直和项．由文献[3]的引理 8.3 知，Gorenstein AC- 投射模的类对直和项是封闭的，所以 M 是 Gorenstein AC- 投射模．

(b) 必要性　显然．

充分性　考虑短正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow G' \longrightarrow 0 \tag{5}$$

其中 G' 是 Gorenstein AC- 投射的，A 的投射维数有限．由 $\mathrm{Ext}_R^1(G', M)=0$ 知正合列(5)是可裂的．则 M 是模 A 的直和项，所以 M 的投射维数有限．

1　关于投射维数有限的模的稳定性

设 M 和 N 是两个 R- 模．则由所有态射 $f: M \longrightarrow N$ 构成的集合可以作成阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 的子群，其中 f 可以分解为 $M \longrightarrow A \longrightarrow N$，这里 A 是某个投射维数有限的模．记对应的商群为 $\mathscr{FP}$-$\mathrm{Hom}_R(M, N)$，并且对任意的 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$，记$[f]=[f]_{\mathscr{FP}}$．定义 $\mathscr{FP}$-R-Mod 范畴，其对象为所有 R- 模，其态射集为 $\mathscr{FP}$-$\mathrm{Hom}_R(M, N)$．记 $\mathrm{GP}(R)$ 和 $\mathrm{FGP}(R)$ 分别是 Gorenstein AC- 投射模类和 Gorenstein AC- 投射维数有限的模类．

引理 2　设 M 和 N 是两个 Gorenstein AC- 投射维数有限的 R- 模，$f: M \longrightarrow N$ 为态射．考虑两个 R- 模的正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} H \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$$

其中 K 和 L 是投射维数有限的模，G 和 H 是 Gorenstein AC- 投射模．有如下结论成立：

(i) 存在态射 $g: G \longrightarrow H$，使得 $qg=fp$；

(ii) 若 $g, g': G \longrightarrow H$ 满足 $qg=fp$，$qg'=fp$，则$[g]=[g'] \in \mathscr{FP}$-$\mathrm{Hom}_R(G, H)$；

(iii) 若$[f]=[0] \in \mathscr{FP}$-$\mathrm{Hom}_R(M, N)$，则对任意满足 $qg=fp$ 的态射 $g: G \longrightarrow H$，有

$$[g]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, H)$$

证　(i)　因为 G 是 Gorenstein AC- 投射的，L 的投射维数有限，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(G, L)=0$．因此 $q_*: \mathrm{Hom}_R(G, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, N)$ 是满的．因此存在态射 $g: G \longrightarrow H$，使得 $fp=q_*(g)=qg$．

(ii)　设 $g, g': G \longrightarrow H$ 是两个态射，使得 $qg=fp$，$qg'=fp$．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\iota"] & H \arrow[r, "p"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则 $q(g'-g)=qg'-qg=fp-fp=0$，因此存在态射 $h: G \longrightarrow L$，使得 $g'-g=jh$．因为 L 的投射维数有限，所以$[g]=[g'] \in \mathscr{FP}$-$\mathrm{Hom}_R(G, H)$．

(iii)　假设 f 可以分解成 $M \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} N$，其中 A 的投射维数有限．设 $0 \longrightarrow A' \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ 是 R- 模的短正合列，其中 P 是投射模，A' 的投射维数有限．由(i)知，存在 $\alpha: G \longrightarrow P$ 和 $\beta: P \longrightarrow H$，使得 $\pi\alpha=ap$ 且 $q\beta=b\pi$．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] & H \arrow[r, "q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即有 $q(\beta\alpha)=(ba)p=fp$. 因此对任意满足 $qg=fp$ 的态射 $g: G \longrightarrow H$，由 (ii) 可得 $[g]=[\beta\alpha] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, H)$. 因此 $[\beta\alpha]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, H)$.

设 $\mathscr{FP}$-GP(R) 和 $\mathscr{FP}$-FGP(R) 是 $\mathscr{FP}$-R-Mod 的全子范畴，其对象为 Gorenstein AC- 投射模和 Gorenstein AC- 投射维数有限的模，则 $\mathscr{FP}$-GP(R) 是 $\mathscr{FP}$-FGP(R) 的全子范畴. 由引理 1(i) 和引理 2 可得，存在一个可定义的加法函子 $\mu: \mathscr{FP}\text{-FGP}(R) \longrightarrow \mathscr{FP}\text{-GP}(R)$.

定理 1 加法函子 $\mu: \mathscr{FP}\text{-FGP}(R) \longrightarrow \mathscr{FP}\text{-GP}(R)$ 是嵌入函子：$\mathscr{FP}\text{-GP}(R) \hookrightarrow \mathscr{FP}\text{-FGP}(R)$ 的右伴随.

证 设 G 是 Gorenstein AC- 投射模，N 是 Gorenstein AC- 投射维数有限的模. 考虑 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} H \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$，其中 $pd_R L < \infty$，H 是 Gorenstein AC- 投射模. 由伴随同构的定义，只需证明 $[q]_*: \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, H) \longrightarrow \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, N)$ 是双射，并且在 G 和 N 处具有自然性. 由引理 2 可知，$[q]_*$ 在 G 和 N 处具有自然性. 下面证明 $[q]_*$ 是双射的.

因为 G 是 Gorenstein AC- 投射的，$pd_R L < \infty$，因此 $\mathrm{Ext}_R^1(G, L)=0$，所以态射 $q_*: \mathrm{Hom}_R(G, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(G, N)$ 是满的，所以 $[q]_*$ 是满的. 假设态射 $g: G \longrightarrow H$ 满足 $[qg]=[q][g]=[q]_*[g]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, N)$. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "="] \arrow[d, "g"] & G \arrow[r] \arrow[d, "qg"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] & H \arrow[r, "q"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由引理 2(iii) 可得 $[g]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, H)$.

推论 2 设模 N 的 Gorenstein AC- 投射维数有限. 则以下条件等价：

(a) $pd_R N < \infty$；

(b) 对任意的 Gorenstein AC- 投射模 G，有 $\mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(G, N)=0$；

(c) 存在 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow L \longrightarrow H \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$，使得 $[q]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(H, N)$，其中 $pd_R L < \infty$，H 是 Gorenstein AC- 投射的.

证 (a)⇒(b) 和(b)⇒(c) 显然.

(c)⇒(a) 由定理 1 可得 $[q]_*: \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(H, H) \longrightarrow \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(H, N)$ 是双射的. 因为 $[q]_*[1_H]=[q][1_H]=[q1_H]=[q]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(H, N)$，所以 $[1_H]=[0] \in \mathscr{FP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(H, H)$. 因此 H 是某个投射维数有限的模的直和项，即 H 也是投射维数有限的. 再由 H 是 Gorenstein AC- 投射的，可得 H 是投射的，于是 N 的投射维数有限.

2 关于 Gorenstein AC- 投射模的稳定性

设 M 和 N 是两个 R- 模. 则由所有态射 $f: M \longrightarrow N$ 构成的集合可以作成阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 的子群，其中 f 可以分解为 $M \longrightarrow A \longrightarrow N$，这里 A 是某个 Gorenstein AC- 投射模. 记对应的商群为 $\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$，并且对任意的 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$，记 $[f]=[f]_{\mathscr{GP}}$. 定义 $\mathscr{GP}$-R-Mod 范畴，其对象为所有 R- 模，其态射集为 $\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

引理 3　设 M 和 N 是两个 Gorenstein AC- 投射维数有限的 R- 模，$f: M \longrightarrow N$ 为态射．考虑 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{p} G' \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} B \xrightarrow{q} H' \longrightarrow 0$，其中 A 和 B 是投射维数有限的模，G' 和 H' 是 Gorenstein AC- 投射模．有以下结论成立：

(ⅰ) 存在态射 $g: A \longrightarrow B$，使得 $g\iota = jf$；

(ⅱ) 若 $g, g': A \longrightarrow B$ 满足 $g\iota = jf$，$g'\iota = jf$，则 $[g] = [g'] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A, B)$；

(ⅲ) 若 $[f] = [0] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$，则对任意满足 $g\iota = jf$ 的态射 $g: A \longrightarrow B$ 有

$$[g] = [0] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A, B)$$

证　(ⅰ)　因为 G' 是 Gorenstein AC- 投射的，B 的投射维数有限，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(G', B) = 0$．因此有 $\iota^*: \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, B)$ 是满的．因此存在态射 $g: A \longrightarrow B$，使得 $jf = \iota^*(g) = g\iota$．

(ⅱ)　设 $g, g': A \longrightarrow B$ 是两个态射，使得 $g\iota = jf$，$g'\iota = jf$．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & G' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "q"] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则有 $(g' - g)\iota = g'\iota - g\iota = jf - jf = 0$，因此存在态射 $h: G' \longrightarrow B$ 使得 $g' - g = hp$．因为 G' 是 Gorenstein AC- 投射模，所以 $[g] = [g'] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A, B)$．

(ⅲ)　假设 f 可以分解成 $M \xrightarrow{a} \Gamma \xrightarrow{b} N$，其中 Γ 是 Gorenstein AC- 投射模．设 $0 \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{k} P \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow 0$ 是 R- 模的短正合列，其中 P 是投射模．由 (ⅰ) 知，存在 $\alpha: A \longrightarrow P$ 和 $\beta: P \longrightarrow B$，使得 $\alpha\iota = ka$ 且 $\beta k = jb$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "a"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\alpha"'] & G' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r, "k"] \arrow[d, "b"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \Gamma' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "q"] & H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即有 $(\beta\alpha)\iota = j(ba) = jf$．因此对任意满足 $g\iota = jf$ 的态射：$g: A \longrightarrow B$，由 (ⅱ) 可得 $[g] = [\beta\alpha] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A, B)$．因此 $[\beta\alpha] = [0] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A, B)$．

设 $\mathscr{GP}$-FP(R) 和 $\mathscr{GP}$-FGP(R) 是 $\mathscr{GP}$-R-Mod 的全子范畴，其对象为投射维数有限的模和 Gorenstein AC-投射维数有限的模，则 $\mathscr{GP}$-FP(R) 是 $\mathscr{GP}$-FGP(R) 的全子范畴．由引理 1(ⅱ) 和引理 3 可得，存在一个可定义的加法函子 $\nu: \mathscr{GP}\text{-FGP}(R) \longrightarrow \mathscr{GP}\text{-FP}(R)$．

定理 2　加法函子 $\nu: \mathscr{GP}\text{-FGP}(R) \longrightarrow \mathscr{GP}\text{-FP}(R)$ 是嵌入函子 $\mathscr{GP}\text{-FP}(R) \hookrightarrow \mathscr{GP}\text{-FGP}(R)$ 的左伴随．

证　设 B 是投射维数有限的模，M 是 Gorenstein AC- 投射维数有限的模．考虑 R- 模的短正合列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{p} G' \longrightarrow 0$，其中 $pd_R A < \infty$，G' 是 Gorenstein AC- 投射模．由伴随同构的定义，只需证明 $[\iota]^*: \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, B)$ 是双射，并且在 B 和 M 处具有自然性．由引理 3 可知，$[\iota]^*$ 在 B 和 M 处具有自然性．下面证明 $[\iota]^*$ 是双射的．

因为 G' 是 Gorenstein AC- 投射的，$pd_R B < \infty$，因此 $\mathrm{Ext}_R^1(G', B) = 0$，所以态射 $\iota^*: \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, B)$ 是满的，所以 $[\iota]^*$ 是满的．假设态射 $g: A \longrightarrow B$ 满足 $[g\iota] = [g][\iota] = [\iota]^*[g] = [0] \in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, B)$．考虑交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g\iota"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & G' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "="] & B \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

由引理 3(iii) 可得$[g]=[0]\in \mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A,B)$.

推论 3 设模 M 的 Gorenstein AC- 投射维数有限. 则以下条件等价:

(a) M 是 Gorenstein AC- 投射的;

(b) 对任意投射维数有限的模 B,有 $\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M,B)=0$;

(c) 存在 R- 模的短正合列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{\iota}A\xrightarrow{q}G'\longrightarrow 0$,使得$[\iota]=[0]\in\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M,A)$,其中 $pd_RA<\infty$,G' 是 Gorenstein AC- 投射的.

证 (a)⇒(b) 和(b)⇒(c) 显然.

(c)⇒(a) 由定理 2 可得$[\iota]^*:\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A,A)\longrightarrow\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M,A)$是双射的. 因为$[\iota]^*[1_A]=[1_A][\iota]=[1_A\iota]=[\iota]=[0]\in\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M,A)$,所以$[1_A]=[0]\in\mathscr{GP}\text{-}\mathrm{Hom}_R(A,A)$. 因此 A 是某个 Gorenstein AC- 投射模的直和项,即 A 也是 Gorenstein AC- 投射的. 于是 M 是 Gorenstein AC- 投射的.

参考文献:

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.

[2] BRAVO D, GILLESPIE J, HOVEY M. The Stable Module Category of a General Ring [EB/OL]. [2020-01-08]. https: //arxiv. org/abs/1405. 5768.

[3] EMMANOUIL I, TALELLI O. Finiteness Criteria in Gorenstein Homological Algebra [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2014, 366(12): 6329-6351.

[4] GAO Z H, WANG F G. Weak Injective and Weak Flat Modules [J]. Communications in Algebra, 2015, 43(9): 3857-3868.

[5] DI Z X, ZHANG X X, CHEN J L. Gorenstein AC-Projective Dimension of Unbounded Complexes [J]. Communications in Algebra, 2017, 45(7): 2855-2866.

[6] 达选尚. 复形的 Gorenstein AC-投射维数 [D]. 兰州: 兰州交通大学, 2019.

Adjoint Functor of Gorenstein AC-Projective Modules

WANG Xing, YANG Gang

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, we study the approximations by classes of modules in which modules are either Gorenstein AC-projective or else have finite projective dimension. We construct two adjoint pairs of functors in the stable categories relating to Gorenstein AC-projective modules.

Key words: Gorenstein AC-projective module; adjoint functor; stable category

责任编辑 廖 坤