第 42 卷第 10 期　　西 南 大 学 学 报 (自然科学版)　　2020年10月
Vol. 42　No. 10　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Oct.　2020

DOI: 10.13718/j. cnki. xdzk. 2020. 10. 014

Besov 空间中 Gauss-Weierstrass 算子的正逆定理

官心果[1]，　钟　宇[1]，　何翠玲[1]，　吴晓刚[2]

1. 云南民族大学 数学与计算机科学学院，昆明 650500；
2. 兴义民族师范学院 信息与技术学院，贵州 兴义 562400

摘要：在研究关于 Gauss-Weierstrass 算子的 L_p-逼近的基础之上，结合算子范数插值定理，继续研究推导了 Gauss-Weierstrass 算子在 $B^s_{p,q}$，L_p 上的性质、定理. 借助 K-泛函，给出 Gauss-Weiersttrass 算子在 Besov 空间中的逼近，得出 Besov 空间中 Gauss-Weierstrass 算子的正逆定理，并对 Besov 空间进行刻画.

关　键　词：K-泛函；Gauss-Weiersttrass 算子；Besov 空间

中图分类号：O174.41　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)10-0109-07

关于 Guass-Weiersttrass 算子的逼近的研究有很多结果[1-9]，但在 Besov 空间中对于该算子的研究尚未有人涉及. 本文介绍 Besov 空间的定义及其性质，得出 Guass-Weiersttrass 算子的正逆定理.

Besov 空间 $\wedge^s_{p,q}$，$s>0$，$1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$，$\wedge^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{f \in L_P^{[s]^-}: \|f\|_{\wedge^s_{p,q}}<+\infty\}$，其中

$$\|f\|_{\wedge^s_{p,q}}=\|f\|_{L_P^{[s]^-}}+\sum_{|\alpha|=[s]^-}\left(\iint_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\|D^\alpha f(x+h)+D^\alpha f(x-h)-2D^\alpha f(x)\|_p}{|h|^{\{s\}^+}}\right)^q\frac{\mathrm{d}h}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}}\qquad 0\leqslant\{s\}^+<1$$

$$[s]^-=\begin{cases}[s] & s\notin N\\ s-1 & s\in N\end{cases}$$

$$s=[s]+\{s\}^+$$

$$D^\alpha f(x+h)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}f(x+h)\qquad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ \alpha_j\in\mathbb{N},\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

规定 L_p 上 D 的范数为一般范数，定义在 D 上的范数为

$$\|g\|_D=\|g\|_p+\|g''\|_p\qquad \forall g\in D$$

$B^s_{p,q}=(L_p, D)_{\frac{s}{2},q}$ $(0<s<2;\ 1\leqslant p,q\leqslant+\infty)$ 是 L_p 与 D 之间的插值空间.

定义 $B^s_{p,q}$ 上的 K-泛函为

$$K(f,t;B^s_{p,q},D)=\inf_{g\in D}\{\|f-g\|_{B^s_{p,q}}+t\|g\|_D\}$$

对于函数空间 $B^s_{p,q}$ 与 D 的插值空间 $(B^s_{p,q},D)_{\theta,q_1}$ $(0<s<2;\ 0<\theta<1;\ 1\leqslant p,q,q_1\leqslant+\infty)$，根据文献[10]有如下的性质：

性质 1　对于 $1\leqslant p,q,q_1\leqslant+\infty$，$0<s<2$，$0<\theta<1$，有

收稿日期：2020-01-03
基金项目：国家自然科学基金项目(11361076)；贵州省教育厅重点项目(黔教合 KY[2015]403).
作者简介：官心果(1993-)，男，硕士研究生，主要从事函数逼近论及应用的研究.

$$f\in(B_{p,q}^{s},D)_{\theta,q_1}\Leftrightarrow\int_0^1(t^{-\theta}K(f,t;B_{p,q}^{s},D)_p)^{q_1}\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty\Leftrightarrow$$
$$\int_0^{+\infty}(t^{-s}K(f,t;B_{p,q}^{s},D)_p)^{q_1}\frac{\mathrm{d}t}{t}<+\infty \tag{1}$$

以下 M 是与 f,n 无关的常数，每次出现根据实际情况取值各有所不同.

引理 1[8] 对于 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，$f\in L_p(-\infty,+\infty)$，有 $\|L_n(f)\|_p\leqslant\|f\|_p$.

引理 2[8] 对于 $1<p\leqslant+\infty$，$f\in D$，有 $\|L_n(f)-f\|_p\leqslant Mn^{-1}\|f\|_D$.

引理 3[8] 对于 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，$f\in L_p(-\infty,+\infty)$，有 $\|(L_n(f))''\|_p\leqslant Mn\|f\|_p$.

引理 4 对于 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，$f\in D$，有 $\|(L_n(f))''\|_p\leqslant\|f\|_D$.

证 因为

$$L_n(f;x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-n(u-x)^2}{2}}f(u)\mathrm{d}u$$

令 $t=u-x$，则

$$L_n(f;x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-nt^2}{2}}f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$[L_n(f)]''=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-nt^2}{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$L_n(f'')=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-nt^2}{2}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+t)\mathrm{d}t$$

所以

$$[L_n(f)]''=L_n(f'')$$

由引理 1 知

$$\|(L_n(f))''\|_p\leqslant\|L_n(f)\|_p+\|(L_n(f))''\|_p\leqslant\|f\|_p+\|f''\|_p=\|f\|_D$$

推论 1 对于 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，$f\in D$，有 $\|L_n(f)\|_D\leqslant M\|f\|_D$.

证 根据 D 上的范数定义、引理 1 以及引理 4 可知

$$\begin{aligned}\|L_n(f)\|_D=&\|L_n(f)\|_p+\|(L_n(f))''\|_p\leqslant\\&\|L_n(f)\|_p+\|f\|_D\leqslant\\&\|f\|_p+\|f''\|_p+\|f\|_D\leqslant\\&M\|f\|_D\end{aligned}$$

定理 1 对于 $1\leqslant p,q\leqslant+\infty$，$0<s<2$，$f\in B_{p,q}^{s}$，有

$$\|L_n(f)\|_{B_{p,q}^{s}}\leqslant M\|f\|_{B_{p,q}^{s}}$$

证 由引理 1 和推论 1 得

$$\|L_n\|_{L_p,L_p}\leqslant 1\qquad\|L_n\|_{D,D}\leqslant M$$

根据文献[10]的有关结论，有

$$\|L_n\|_{B_{p,q}^{s},B_{p,q}^{s}}\leqslant M^{\frac{s}{2}}$$

定理 2 对于 $1<p,q\leqslant+\infty$，$0<s<2$，$f\in D$，有

$$\|L_n(f)-f\|_{B_{p,q}^{s}}\leqslant Mn^{-\frac{s}{2}}\|f\|_D$$

证 由引理 2、推论 1 得

$$\|L_n-I\|_{D,L_p}\leqslant Mn^{-1}$$
$$\|L_n(f)-f\|_D\leqslant\|L_n(f)\|_D+\|f\|_D\leqslant M\|f\|_D\Rightarrow\|L_n-I\|_D\leqslant M$$

根据文献[10]的有关结论，有

$$\|L_n-I\|_{D,B_{p,q}^{s}}\leqslant Mn^{-\frac{s}{2}}$$

定理 3　对于 $1 < p, q \leqslant +\infty$，$0 < s < 2$，$f \in B^s_{p,q}$，有

$$\| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}} \leqslant MK(f, n^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)$$

证　由定理 1 和定理 2，得

$$\begin{aligned}\| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}} &\leqslant \| L_n(f-g) \|_{B^s_{p,q}} + \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + \| L_n(g) - g \|_{B^s_{p,q}} \leqslant \\ &M \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + Mn^{-\frac{s}{2}} \| g \|_D \leqslant \\ &M \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + Mn^{-\frac{s}{2}} \| g \|_D\end{aligned}$$

对两边取$\inf\limits_g$，得

$$\| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}} \leqslant M\inf_g \{ \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + n^{-\frac{s}{2}} \| g \|_D \} = MK(f, n^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)$$

定理 4　对于 $1 < p, q \leqslant +\infty$，$0 < s < 2$，$f \in B^s_{p,q}$，有

$$\| L_n(f) \|_D \leqslant Mn^{\frac{s}{2}} \| f \|_{B^s_{p,q}}$$

证　由推论 1，得

$$\| L_n(f) \|_D \leqslant M \| f \|_D$$

所以

$$\| L_n \|_{D,D} \leqslant M$$

由引理 3、引理 1，得

$$\begin{aligned}\| L_n(f) \|_D = \| L_n(f) \|_p + \| (L_n(f))'' \|_p &\leqslant \\ Mn \| f \|_p + \| f \|_p &\leqslant \\ Mn \| f \|_D + \| f \|_D &\leqslant \\ Mn \| f \|_D &\end{aligned}$$

则

$$\| L_n(f) \|_p \leqslant Mn \| f \|_D \qquad \| L_n \|_{L_p, D} \leqslant Mn$$

根据文献[10]的相关结论，有

$$\| L_n \|_{B^s_{p,q}, D} \leqslant Mn^{\frac{s}{2}}$$

定理 5　对于 $1 < p, q \leqslant +\infty$，$0 < s < 2$，$f \in B^s_{p,q}$，有

$$\| L_n(f) \|_D \leqslant Mn^{\frac{s}{2}} K(f, n^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)$$

证　对于 $\forall g \in D$，由定理 4 和推论 1，得

$$\begin{aligned}\| L_n(f) \|_D &\leqslant \| L_n(f-g) \|_D + \| L_n(g) \|_D \leqslant \\ &Mn^{\frac{s}{2}} \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + M \| g \|_D = \\ &Mn^{\frac{s}{2}} \{ \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + n^{-\frac{s}{2}} \| g \|_D \}\end{aligned}$$

对两边取$\inf\limits_g$，得

$$\begin{aligned}\| L_n(f) \|_D &\leqslant Mn^{\frac{s}{2}} \inf_{g \in D} \{ \| f-g \|_{B^s_{p,q}} + Mn^{-\frac{s}{2}} \| g \|_D \} = \\ &Mn^{\frac{s}{2}} K(f, n^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)\end{aligned}$$

定理 6　对于 $1 < p, q, q_1 \leqslant +\infty$，$0 < s < 2$，$0 < \theta < 1$，$f \in B^s_{p,q}$，有

$$f \in (B^s_{p,q}, D)_{\frac{\theta}{2}, q_1} = B^{s+\frac{s}{2}\theta}_{p,q_1} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} [n^{\frac{s}{2}\theta} \| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}}]^{q_1} \frac{1}{n} < +\infty \tag{2}$$

当 $q_1 = +\infty$，$f \in B^s_{p,q}$ 时，

$$K(f, t; L_p, D) = O(t^{s+\frac{s}{2}\theta})$$

即有

$$K(f, t; L_p, D) = O(t^{\theta}) \Leftrightarrow \| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}} = O(n^{-\frac{s}{2}\theta})$$

证 当 $1 < q_1 < +\infty$ 时，先证(2)的必要性，根据定理 3 和 K-泛函的性质，有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[n^{\frac{s}{2}\theta} \| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}}]^{q_1} \frac{1}{n} \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[n^{\frac{s}{2}\theta} MK(f, n^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)]^{q_1} \frac{1}{n} \leqslant$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}[2^{(k+1)\frac{s}{2}\theta} MK(f, 2^{-\frac{s}{2}k}; B^s_{p,q}, D)]^{q_1} \frac{1}{2^k} \leqslant$$

$$\left[2^s \times 2^{\frac{s}{2}\theta} M\right]^{q_1} \sum_{k=0}^{+\infty}[2^{k\frac{s}{2}\theta} K(f, 2^{(k+1)(-\frac{s}{2})}; B^s_{p,q}, D)]^{q_1} \leqslant$$

$$\frac{[2^{\left(1+\frac{\theta}{2}\right)s} M]^{q_1}}{\frac{s}{2}\ln 2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_{2^{(k+1)(\frac{-s}{2})}}^{2^{k(\frac{-s}{2})}} (t^{-\theta} K(f, t; B^s_{p,q}, D))^{q_1}\right] \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$\frac{[2^{\left(1+\frac{s}{2}\theta\right)} M]^{q_1}}{\frac{s}{2}\ln 2} \int_0^1 (t^{-\theta} K(f, t; B^s_{p,q}, D)_p)^{q_1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty$$

下面证明(2)式的充分性，要证明 $f \in (B^s_{p,q}, D)_{\frac{\theta}{2}, q_1}$，根据性质 1，只需要证明(1)式成立，即

$$I = \int_0^1 (t^{-\theta} K(f, t; B^s_{p,q}, D)_p)^{q_1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty \tag{3}$$

取 $r \in \mathbb{N}$(r 待定)，由 K-泛函的性质得

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{r^{(k+1)(\frac{-s}{2})}}^{r^{k(\frac{-s}{2})}} (t^{-\theta} K(f, t; B^s_{p,q}, D)_p)^{q_1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant$$

$$r^{\frac{s}{2}\theta q_1} \frac{s}{2}\ln 2 \sum_{k=0}^{+\infty}[r^{\frac{ks}{2}\theta} K(f, r^{k(-\frac{s}{2})}; B^s_{p,q}, D)_p]^{q_1} \tag{4}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$，取 n_k，使得

$$r^k \leqslant n_k \leqslant r^{k+1} \tag{5}$$

$$\| L_{n_k}(f) - f \|_{B^s_{p,q}} = \min_{r^k \leqslant n < r^{k+1}} \| L_n(f) - f \|_{B^s_{p,q}} \tag{6}$$

根据定理 3 和 K-泛函的定义，可得

$$K(f, r^{k\left(-\frac{s}{2}\right)}; B^s_{p,q}, D)_p \leqslant$$

$$\| f - L_{n_k}(f) \|_{B^s_{p,q}} + r^{k(-\frac{s}{2})} \| L_{n_k}(f) \|_{B^s_{p,q}} \leqslant$$

$$\| f - L_{n_k}(f) \|_{B^s_{p,q}} + r^{k(-\frac{s}{2})} M n_k^{\frac{s}{2}} K(f, n_k^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D) \leqslant$$

$$\| f - L_{n_k}(f) \|_{B^s_{p,q}} + M r^{k(-\frac{s}{2})} n_k^{\frac{s}{2}} \| f - L_{n_{k-1}}(f) \|_{B^s_{p,q}} +$$

$$M r^{k(-\frac{s}{2})} \| L_{n_{k-1}}(f) \|_D \leqslant$$

$$\| f - L_{n_k}(f) \|_{B^s_{p,q}} + M r^{k(-\frac{s}{2})} n_k^{\frac{s}{2}} \| f - L_{n_{k-1}}(f) \|_{B^s_{p,q}} +$$

$$M^2 r^{k(-\frac{s}{2})} n_{k-1}^{\frac{s}{2}} K(f, n_{k-1}^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D) \leqslant$$

$$\| f-L_{n_k}(f)\|_{B^s_{p,q}}+\sum_{m=0}^{k-1} r^{k(-\frac{s}{2})} M^{m+1} n_{k-m}^{\frac{s}{2}} \| f-L_{n_{k-m-1}}(f)\|_{B^s_{p,q}}+$$
$$M^{k+1} n_0^{\frac{s}{2}} r^{k(-\frac{s}{2})} K(f, n_0^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D) \tag{7}$$

记

$$I_1=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}\theta}\| f-L_{n_k}(f)\|_{B^s_{p,q}}\right]^{q_1}$$
$$I_2=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}\theta}\sum_{m=0}^{k-1} M r^{k(-\frac{s}{2})} M^{m+1} n_{k-m}^{\frac{s}{2}}\| f-L_{n_{k-m-1}}(f)\|_{B^s_{p,q}}\right]^{q_1}$$
$$I_3=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}\theta} M^{k+1} n_0^{\frac{s}{2}} r^{k(-\frac{s}{2})} K(f, n_0^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)\right]^{q_1}$$

根据(4),(7) 式可知

$$I\leqslant r^{\frac{s}{2}\theta q_1}\ln 2\left[3^{q_1}\left(r^{0\times\frac{s}{2}\theta} K(f, r^{0\times(-\frac{s}{2})}; B^s_{p,q}, D)_p\right)^{q_1}+3^{q_1}(I_1+I_2+I_3)\right] \tag{8}$$

要证明(3) 式成立，只需证(8) 式中的 $I_1<+\infty$，$I_2<+\infty$，$I_3<+\infty$. 下面先对 I_3 给予证明，由(5) 式以及 K- 泛函的性质，知

$$I_3=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}\theta} M^{k+1} n_0^{\frac{s}{2}} r^{k(-\frac{s}{2})} K(f, n_0^{-\frac{s}{2}}; B^s_{p,q}, D)\right]^{q_1}\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}(\theta-1)} M^{k+1} r^{\frac{s}{2}} K(f, 1; B^s_{p,q}, D)\right]^{q_1}=$$
$$\left[M r^{\frac{s}{2}} K(f, 1; B^s_{p,q}, D)\right]^{q_1}\sum_{k=0}^{+\infty}(r^{\frac{s}{2}(\theta-1)} M)^{kq_1} \tag{9}$$

由于之前规定 r 是待定的，因此，取 r 使得

$$r^{\frac{s}{2}(\theta-1)} M<\frac{1}{2} \tag{10}$$

取 $r=\left[(2M)^{\frac{1}{2}\frac{1}{s(1-\theta)}}\right]+1$，根据(9),(10) 式得

$$I_3\leqslant\left[M r^{\frac{s}{2}} K(f, 1; B^s_{p,q}, D)\right]^{q_1}\frac{1}{1-2^{-q_1}}<+\infty \tag{11}$$

讨论 I_1，根据(5),(6) 式以及(2) 式，得

$$I_1=\sum_{k=1}^{+\infty}(r^{\frac{ks}{2}\theta}\| f-L_{n_k}(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=r^k}^{r^{k+1}-1}(r^{\frac{ks}{2}\theta}\| f-L_n(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\frac{r}{n}=$$
$$r\sum_{n=r}^{+\infty}(n^{\frac{s}{2}\theta}\| f-L_n(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\frac{1}{n}<+\infty \tag{12}$$

讨论 I_2，当 $q_1>1$ 时，令 $k-m-1=l$，根据(5) 式得

$$I_2=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}\theta}\sum_{m=0}^{k-1} r^{k(-\frac{s}{2})} M^{m+1} n_{k-m}^{\frac{s}{2}}\| f-L_{n_{k-m-1}}(f)\|_{B^s_{p,q}}\right]^{q_1}\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[r^{\frac{ks}{2}\theta} r^{k(-\frac{s}{2})} M^{k-l} r^{(l+2)\frac{s}{2}}\| f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}}\right]^{q_1}=$$
$$r^{sq_1}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{l=0}^{k-1}(M^{k-l} r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}}) r^{\frac{s}{2}l\theta}\| f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}}\right]^{q_1} \tag{13}$$

令 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1'}=1$，利用 Hölder 不等式、(10) 式、交换求和符号，联立(5),(6) 式以及(2) 式中的条件，可以推出

$$I_2 \leqslant C\sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\sum_{l=0}^{k-1}(M^{k-l}r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}})r^{\frac{s}{2}l\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}}\Big]^{q_1}=$$

$$C\sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\sum_{l=0}^{k-1}(M^{k-l}r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}})^{\frac{1}{q_1'}}(M^{k-l}r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}})^{\frac{1}{q_1}}r^{\frac{s}{2}l\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}}\Big]^{q_1}=$$

$$C\sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\sum_{l=0}^{k-1}(M^{k-l}r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}})^{\frac{q_1}{q_1'}}\cdot\sum_{l=0}^{k-1}(M^{k-l}r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}})\cdot(r^{\frac{s}{2}l\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\Big]\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k-1}\Big\{\Big[M^{k-l}r^{(k-l)(\theta-1)\frac{s}{2}}\Big]^{\frac{q_1}{q_1'}}\cdot(r^{\frac{s}{2}l\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\Big\}=$$

$$C\sum_{l=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{k=l+1}^{+\infty}(Mr^{(\theta-1)\frac{s}{2}})^{(k-l)\frac{q_1}{q_1'}}\cdot(r^{\frac{s}{2}l\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\Big\}\leqslant$$

$$C\sum_{l=0}^{+\infty}(r^{\frac{s}{2}l\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\leqslant$$

$$rC\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{n=r^l}^{r^{l+1}-1}(n^{\frac{s}{2}\theta}\|f-L_n(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\frac{1}{n}=$$

$$rC\sum_{n=1}^{+\infty}(n^{\frac{s}{2}\theta}\|f-L_{n_l}(f)\|_{B^s_{p,q}})^{q_1}\frac{1}{n}<+\infty \tag{14}$$

其中 $C=r^{sq_1}$，由(8),(11),(12),(13),(14)式可得

$$I<+\infty$$

综上所述，

$$f\in(B^s_{p,q},D)_{\frac{\theta}{2},q_1}$$

以上讨论了 $1<q_1<+\infty$ 的情况，下面证明 $q_1=+\infty$ 的情况. 根据定理3得到(2)式的必要性. 所以，只需要论证(2)的充分性. 由 K-泛函的定义、定理2、定理5，得

$$K(f,t;B^s_{p,q},D)\leqslant\|L_n(f)-f\|_{B^s_{p,q}}+t\|L_n(f)\|_D\leqslant$$

$$Mn^{-\frac{s}{2}\theta}+tMn^{s-1}K(f,n^{-\frac{s}{2}};B^s_{p,q},D) \tag{15}$$

取 $A\in\mathbb{N}$(A 待定)，取 $t=A^{-m-1}$($m\in\mathbb{N}$)，取 n 使得

$$(n-1)^{\frac{s}{2}}\leqslant A^m<n^{\frac{s}{2}}$$

即

$$n=[A^{\frac{1}{2}\frac{m}{s}}]+1$$

则有

$$K(f,A^{-m-1};B^s_{p,q},D)\leqslant MA^{-m\theta}+4MA^{-1}K(f,A^{-m};B^s_{p,q},D) \tag{16}$$

取 $v_m\leqslant A^{m\theta}K(f,A^{-m};B^s_{p,q},D)$，(16)式两边同时乘以 $A^{(m+1)\theta}$，得到

$$v_{m+1}\leqslant MA^{\theta}+4MA^{\theta-1}v_m\leqslant\max\{2MA^{\theta},8MA^{\theta-1}v_m\} \tag{17}$$

因为 $A\in\mathbb{N}$(A 待定)，取 $A\in\mathbb{N}$ 使得 $8MA^{\theta-1}<1$，即

$$A>(8M)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{18}$$

取

$$A=(8M)^{\frac{1}{1-\theta}}+1$$

根据(17)式，得

$$v_{m+1}\leqslant\max\{2MA^{\theta},v_m\}\leqslant\max\{2MA^{\theta},v_1\} \tag{19}$$

因为

$$v_1 = A^{\theta} K(f, A^{-1}; B^s_{p,q}, D) < +\infty$$

且 M 是与 f, n 无关的常数，则 $v_1 < +\infty$，即有

$$K(f, A^{-m-1}; B^s_{p,q}, D) \leqslant M A^{(-m-1)\theta} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \tag{20}$$

又因 $t = A^{-m-1}(m \in \mathbb{N})$，带入(20) 式可以得到

$$K(f, t; B^s_{p,q}, D) = O(t^{\theta}) \qquad \forall t > 0$$

参考文献：

[1] 官心果，何翠玲，钟　宇，等．修正二元 Gauss-Weierstrass 算子在 $L_p(R^2_+)$空间中的逼近［J］．云南民族大学学报(自然科学版)，2019，28(6)：571-575.

[2] 官心果，李娌芝，何翠玲，等．修正二元 Gauss-Weierstrass 算子在 Orlicz 空间中的逼近［J］．兴义民族师范学院学报，2019(3)：120-124.

[3] 王　涛．Gauss-Weierstrass 算子的逼近性质研究［J］．山东大学学报(理学版)，2019，54(6)：96-98，111.

[4] 王军辉，杨柱元，雷　靖．关于 Gauss-Weierstrass 算子的加权逼近［J］．云南民族大学学报(自然科学版)，2012，21(3)：188-192.

[5] 张海芳，费秀海．关于 Gauss-Weierstrass 算子线性组合 L_p-同时逼近的一个相关定理［J］．乐山师范学院学报，2010，25(5)：19-20.

[6] 王军辉，杨柱元，雷　靖．Gauss-Weierstrass 算子加 Jacobi 权的 L_p-逼近［J］．云南大学学报(自然科学版)，2011，33(S2)：165-167,172.

[7] 宣培才．关于 Gauss-Weierstrass 算子的 L_p-逼近［J］．工程数学学报，1992，9(4)：47-52.

[8] 宣培才．关于 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的 L_p-逼近［J］．浙江大学学报(自然科学版)，1992，26(2)：131-137.

[9] 赵德钧，宋儒瑛．一类多元 Gauss-Weierstrass 算子线性组合的逼近［J］．数学研究与评论，2002，22(3)：481-486.

[10] BERGH J，LOFSTROM J．Interpolation Spaces［M］．New York：Springer-Verlag，1976.

Direct and Inverse Theorems of Gauss-Weierstrass Operators in Besov Space

GUAN Xin-guo[1]，　ZHONG　Yu[1]，　HE Cui-ling[1]，　WU Xiao-gang[2]

1. School of Mathematics and Computer Science，Yunnan Minzu University，Kunming 650500，China；

2. School of Information Technology，Xingyi Normal University for Nationalities，Xingyi Guizhou 562400，China

Abstract：On the basis of research on the L_p approximation of Gauss-Weierstrass operator，combined with the interpolation theorem of operator norm，the properties and theorems of Gauss-Weierstrass operators in $B^s_{p,q}$ and L_p are further studied and deduced. By means of K-functional，the approximation of the Gauss-Weiersttrass operator in Besov space is given，and the positive and negative theorems of the Gauss-Weierstrass operator in Besov space are obtained，and the Besov space is described.

Key words：K-functional；Gauss-Weierstrass operator；Besov space

责任编辑　廖　坤