DOI: 10.13718/j. cnki. xdzk. 2020. 10. 015

带有临界指数增长的分数阶问题解的存在性

余　芳，　陈文晶

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：讨论了一类分数阶拟线性方程非平凡解的存在性，其非线性项与分数阶 Trudinger-Moser 型不等式有关，非线性项 $f(x, u)$ 在无穷远处具有 $e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}}$ 的临界指数增长，其中 $\alpha > 0$，从而导致问题对应的能量泛函缺失紧性.

关　键　词：解的存在性；分数阶 Trudinger-Moser 型不等式；临界指数

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)10-0116-08

本文中，我们考虑如下问题：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s_{\frac{N}{s}} u = f(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega\end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的光滑有界区域，$0 < s < 1$，非线性项 $f(x, u)$ 满足：当 $u \to \infty$ 时临界指数增长，$(-\Delta)^s_{\frac{N}{s}}$ 是分数阶拉普拉斯算子，定义为

$$(-\Delta)^s_{\frac{N}{s}} \varphi(x) = 2\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^{\frac{N}{s}-2} (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{2N}} \mathrm{d}y \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

其中 $B_\varepsilon(x)$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中球心在 x 处，半径为 $\varepsilon > 0$ 的球.

众所周知，对任意的 $1 \leqslant p < \infty$，$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 成立，但 $W_0^{1,N}(\Omega) \not\subseteq L^\infty(\Omega)$. 文献[1]得到了 $W_0^{1,N}(\Omega)$ 能以最大增长速度 $\phi(t) = e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} - 1$ 嵌入到 Orlicz 空间 $L_\phi(\Omega)$ 中. 随后，文献[2]得到了下列结果：

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} \mathrm{d}x \begin{cases} \leqslant C(|\Omega|) & \alpha \leqslant \alpha_N \\ = +\infty & \alpha > \alpha_N \end{cases}$$

其中 $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$，$\omega_{N-1}$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中单位球的球表面测度，$|\Omega|$ 表示 Ω 的测度. 近年来，有关分数阶椭圆型问题的研究受到了广泛关注[3-7]. 关于分数阶 Trudinger-Moser 不等式的研究，文献[8]给出了 Sobolev-Slobodeckij 空间 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$ 中的相关结果，即存在正的有限的 $\alpha_{N,s}$，使得对所有 $\alpha \leqslant \alpha_{N,s}$，有

$$\sup_{u \in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega),\ \|u\| \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x < +\infty \tag{2}$$

收稿日期：2020-02-05
基金项目：国家自然科学基金项目(1971392).
作者简介：余　芳(1995-)，女，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：陈文晶，教授，博士研究生导师.

其中

$$\| u \| = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{| u(x) - u(y) |^{\frac{N}{s}}}{| x - y |^{2N}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{\frac{s}{N}}$$

另外，存在$\alpha^*_{N,s} \geqslant \alpha_{N,s}$，使得对于任意的$\alpha > \alpha^*_{N,s}$，(2) 式中的上确界为正无穷. 但是$\alpha^*_{N,s}$与$\alpha_{N,s}$是否相等，仍然是一个值得探索的问题. 文献[9-12]讨论了非线性项是临界指数增长的分数阶问题解的存在性以及多解性，相应的局部情形的相关结果可参见文献[13-15].

本文中，我们主要研究问题(1) 的非平凡解的存在性，假设非线性项 $f(x, u)$ 满足下列条件：

(F_1) f 在无穷远处满足临界指数增长，即存在常数$\alpha_0 > 0$，使得：当$\alpha > \alpha_0$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty} f(x, t)\mathrm{e}^{-\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}} = 0$；当$\alpha < \alpha_0$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty} f(x, t)\mathrm{e}^{-\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}} = \infty$.

(F_2) 存在 $t_0 > 0$，$M_0 > 0$，使得对 $\forall (x, t) \in \Omega \times [t_0, +\infty)$，有

$$0 < F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\mathrm{d}s \leqslant M_0 f(x, t)$$

(F_3) 对 $\forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$，存在 $\theta > \dfrac{N}{s}$，使得

$$0 < \theta F(x, t) \leqslant f(x, t)t$$

(F_4) 对 $\forall x \in \Omega$，$\limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{NF(x, t)}{s | t |^{\frac{N}{s}}} < \lambda_1$ 一致成立，其中

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)} \frac{\| u \|^{\frac{N}{s}}}{\| u \|^{\frac{N}{s}}_{L^{\frac{N}{s}}(\Omega)}}$$

(F_5) 对 $\forall (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$，存在常数 $q > \dfrac{N}{s}$ 和 C_q，使得 $f(x, t) \geqslant C_q t^{q-1}$，其中

$$C_q > \left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{(N-qs)(N-s)}{Ns}} \left(\frac{qs - N}{qs}\right)^{\frac{qs-N}{N}} S_q^q$$

且

$$S_q = \inf_{u \in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)} \frac{\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{| u(x) - u(y) |^{\frac{N}{s}}}{| x - y |^{2N}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{\frac{s}{N}}}{\left(\int_\Omega | u |^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{s}{qN}}}$$

定义 1　对 $\forall \phi \in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$，若$\langle u, \phi \rangle_{s,\frac{N}{s}} = \int_\Omega f(x, u)\phi \mathrm{d}x$，则称 $u \in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$ 是问题(1) 的一个弱解. 其中

$$\langle u, \phi \rangle_{s,\frac{N}{s}} = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{| u(x) - u(y) |^{\frac{N}{s}-2}(u(x) - u(y))(\phi(x) - \phi(y))}{| x - y |^{2N}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

本文的主要结果如下：

定理 1　假设 $N \geqslant 1$，$0 < s < 1$，条件(F_1) − (F_5) 成立，则问题(1) 存在一个非平凡的弱解.

注 1　令 $f(t) = F'(t)$，其中 $F(t) = t^\mu \mathrm{e}^{\alpha_0 |t|^{\frac{N}{N-s}}}$，$t \geqslant 0$ 并且 $\mu > \dfrac{N}{s}$，则 f 满足定理 1 中所有的假设.

问题(1) 的能量泛函 J 定义为

$$J(u) = \frac{s}{N} \| u \|^{\frac{N}{s}} - \int_\Omega F(x, u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

由条件$(F_1)-(F_3)$与分数阶 Trudinger-Moser 不等式(2),可得$F(x,u)\in L^1(\Omega)$,且对$\forall u,v\in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$,有$f(x,u)v\in L^1(\Omega)$. 因此$J\in C^1(W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega),\mathbb{R})$. 另外,存在正的常数$c$和$C$,使得

$$|f(x,t)|\leqslant C\mathrm{e}^{c|t|^{\frac{N}{N-s}}}\qquad \forall x\in\Omega,\ \forall t\in\mathbb{R} \tag{4}$$

通过直接计算可得

$$J'(u)v=\langle u,v\rangle_{s,\frac{N}{s}}-\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x\qquad \forall v\in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$$

引理 1[16] 令$(X,\|\cdot\|_X)$是实的 Banach 空间,$I\in C^1(X,\mathbb{R})$满足$I(0)=0$,并且满足:

(i) 存在常数$\rho,\alpha>0$,使得$I|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$;

(ii) 存在$e\in X\backslash B_\rho$,使得$I(e)<0$.

那么常数

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}I(\gamma(t))\geqslant\alpha$$

存在序列$\{u_k\}\subset X$,使得$I(u_k)\to c$,$I'(u_k)\to 0$,其中

$$\Gamma=\{\gamma\in C^1([0,1],X):\gamma(0)=0,\gamma(1)=\mathrm{e}\}$$

引理 2[12] (Lions-type 引理) 假设$\{u_k\}_k$是$W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$中的有界序列,满足$\|u_k\|=1$,$u_k\rightharpoonup u\neq 0$. 若$1<p<P=(1-\|u\|^{\frac{N}{s}})^{-\frac{s}{N-s}}$,则

$$\sup_k\int_\Omega \mathrm{e}^{p\alpha_{N,s}|u_k|^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x<+\infty$$

引理 3 假设条件$(F_1)-(F_4)$成立,则:

(i) 存在正的常数ρ和δ,使得当$\|u\|=\rho$时,有$J(u)\geqslant\delta$;

(ii) 存在$e\in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$,使得$\|e\|>\rho$,但是$J(e)<0$.

证 (i) 由条件(F_4),存在$\tau,\delta_0>0$,当$|u|\leqslant\delta_0$,$x\in\Omega$时,我们有

$$F(x,u)\leqslant\frac{s}{N}(\lambda_1-\tau)|u|^{\frac{N}{s}} \tag{5}$$

从(4)式可知,存在$r>\frac{N}{s}$,$C_1>0$,当$|u|\geqslant\delta_0$,$x\in\Omega$时,有

$$F(x,u)\leqslant C_1|u|^r\mathrm{e}^{c|u|^{\frac{N}{N-s}}}$$

因此

$$J(u)\geqslant\frac{s}{N}\|u\|^{\frac{N}{s}}-\frac{s}{N}(\lambda_1-\tau)\int_\Omega|u|^{\frac{N}{s}}\mathrm{d}x-C_1\int_\Omega|u|^r\mathrm{e}^{c|u|^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{s\tau}{N\lambda_1}\|u\|^{\frac{N}{s}}-C_1\left(\int_\Omega|u|^{2r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\mathrm{e}^{2c|u|^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

选取$\rho>0$使得$2c\rho^{\frac{N}{N-s}}\leqslant\alpha_{N,s}$,由(2)式可得,对$\forall u\in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$,满足$\|u\|=\rho$时,有

$$\int_\Omega\mathrm{e}^{2c|u|^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x=\int_\Omega\mathrm{e}^{2c\|u\|^{\frac{N}{N-s}}\left(\frac{u}{\|u\|}\right)^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x\leqslant C_2$$

因为

$$\left(\int_\Omega|u|^{2r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_3\|u\|^r$$

所以

$$J(u) \geqslant \|u\|^{\frac{N}{s}}\left[\frac{\tau}{N\lambda_1} - C\|u\|^{r-\frac{N}{s}}\right] \tag{6}$$

取

$$\|u\| = \rho < \min\left\{\left(\frac{\alpha_{N,s}}{2c}\right)^{\frac{N-s}{N}}, \left(\frac{\tau}{NC\lambda_1}\right)^{\frac{s}{rs-N}}\right\}$$

则(i)得证.

(ii)　由条件(F_3)可知，存在正的常数 c_1 和 c_2，对任意的 $t \geqslant 0$，使得 $F(x, t) \geqslant c_1 t^{\theta} - c_2$，于是

$$J(tu) = \frac{s}{N}t^{\frac{N}{s}}\|u\|^{\frac{N}{s}} - \int_{\Omega} F(x, tu)\mathrm{d}x \leqslant \frac{s}{N}t^{\frac{N}{s}}\|u\|^{\frac{N}{s}} - c_1 t^{\theta}\int_{\Omega}|u|^{\theta}\mathrm{d}x + c_2|\Omega|$$

则由 $\theta > \dfrac{N}{s}$ 知，当 $t \to \infty$ 时，有 $J(tu) \to -\infty$，结果得证.

命题 1　若 $c < \dfrac{s}{N}\left(\dfrac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$，则泛函 J 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　设$\{u_k\} \subset W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$是泛函 J 的一个$(\mathrm{PS})_c$ 序列，即当 $k \to \infty$ 时，有

$$J(u_k) = \frac{s}{N}\|u_k\|^{\frac{s}{N}} - \int_{\Omega} F(x, u_k)\mathrm{d}x \to c \tag{7}$$

$$|J'(u_k)v| = \left|\langle u_k, v\rangle_{s,\frac{N}{s}} - \int_{\Omega} f(x, u_k)v\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon_k\|v\| \qquad \forall v \in W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega) \tag{8}$$

这里当 $k \to \infty$，$\varepsilon_k \to 0$ 时，由条件(F_3)可得

$$\theta c + \varepsilon_k\|u_k\| \geqslant \left(\frac{s\theta}{N} - 1\right)\|u_k\|^{\frac{s}{N}} - \int_{\Omega}[\theta F(x, u_k) - f(x, u_k)u_k]\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{s\theta}{N} - 1\right)\|u_k\|^{\frac{s}{N}}$$

因此，u_k 在 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$中有界. 由(7)式和(8)式，我们有

$$\int_{\Omega} F(x, u_k)\mathrm{d}x \leqslant C \qquad \int_{\Omega} f(x, u_k)u_k\mathrm{d}x \leqslant C$$

从而存在弱收敛子列，仍然记为$\{u_k\}$，在 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$中，$u_k \rightharpoonup u$；对 $\forall r \geqslant 1$，在 $L^r(\Omega)$中，$u_k \to u$；在 Ω 中，$u_k \to u$ 几乎处处成立. 从文献[14]的引理 2.1 可知，在 $L^1(\Omega)$中，当 $k \to \infty$ 时，有 $f(x, u_k) \to f(x, u)$. 由条件(F_1)和广义的 Lebesgue 控制收敛定理知，在 $L^1(\Omega)$中，当 $k \to \infty$ 时，有

$$F(x, u_k) \to F(x, u)$$

由(7)式，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{s}{N}\|u_k\|^{\frac{N}{s}} = c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x$$

利用条件(F_3)和(8)式，可知

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{N}{s}\int_{\Omega} F(x, u_k)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{k\to\infty}\theta\int_{\Omega} F(x, u_k)\mathrm{d}x \leqslant \\ \lim_{k\to\infty}\int_{\Omega} f(x, u_k)u_k\mathrm{d}x = \\ \lim_{k\to\infty}\|u_k\|^{\frac{N}{s}} = \frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right)\end{aligned} \tag{9}$$

所以 $c \geqslant 0$. 利用(8)式，可得对 $\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)$，有

$$\langle u, v\rangle_{s,\frac{N}{s}} = \int_{\Omega} f(x, u)v\mathrm{d}x$$

利用 $C_0^{\infty}(\Omega)$在 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$中的稠密性，所以，$u$ 是问题(1)的一个弱解.

接下来，将分成 3 种情形讨论：在 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$ 中，当 $k\to\infty$ 时，$u_k\to u$.

情形 1　$c=0$.

此时，有

$$0\leqslant J(u)=\frac{s}{N}\|u\|^{\frac{N}{s}}-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant \liminf_{k\to\infty}\frac{s}{N}\|u_k\|^{\frac{N}{s}}-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x=\liminf_{k\to\infty}J(u_k)=0$$

这说明

$$\frac{s}{N}\|u\|^{\frac{N}{s}}=\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$$

且当 $k\to\infty$ 时，$\|u_k\|\to\|u\|$.

情形 2　$c>0$ 且 $u=0$.

在此种情形下，由(7) 式和(8) 式，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k\|^{\frac{N}{s}}=\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f(x,u_k)u_k\mathrm{d}x=\frac{N}{s}c \qquad \int_\Omega F(x,u_k)\mathrm{d}x=0$$

这是不可能成立的. 因为 f 是临界增长的，那么，对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $\zeta>1$，存在 $t_\varepsilon>0$ 和 $C_{\varepsilon,\zeta}>0$，使得当 $|t|\geqslant t_\varepsilon$，$x\in\Omega$ 时，有

$$|f(x,t)|^\zeta\leqslant C_{\varepsilon,\zeta}\mathrm{e}^{\alpha_0(1+\varepsilon)|t|^{\frac{N}{N-s}}} \tag{10}$$

故有

$$\int_\Omega|f(x,u_k)|^\zeta\mathrm{d}x=\int_{\{|u_k|\leqslant t_\varepsilon\}}|f(x,u_k)|^\zeta\mathrm{d}x+\int_{\{|u_k|>t_\varepsilon\}}|f(x,u_k)|^\zeta\mathrm{d}x\leqslant C\max_{\Omega\times[-t_\varepsilon,t_\varepsilon]}|f(x,t)|^\zeta+C_{\varepsilon,\zeta}\int_\Omega\mathrm{e}^{\alpha_0(1+\varepsilon)|u_k|^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x$$

由

$$c<\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$$

可知存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$$c=(1-\eta)\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$$

又因为 $\|u_k\|^{\frac{N}{s}}\to\frac{N}{s}c$，所以，存在 $k_\eta>0$，使得对 $\forall k\geqslant k_\eta$，有

$$\|u_k\|^{\frac{N}{N-s}}\leqslant(1-\eta)^{\frac{s}{N-s}}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)$$

故

$$\alpha_0(1+\varepsilon)\|u_k\|^{\frac{N}{N-s}}\leqslant(1+\varepsilon)(1-\eta)^{\frac{s}{N-s}}\alpha_{N,s}$$

只需取 $\varepsilon>0$ 足够小，使得 $\alpha_0(1+\varepsilon)\|u_k\|^{\frac{N}{N-s}}\leqslant\alpha_{N,s}$ 成立，那么

$$\int_\Omega\mathrm{e}^{\alpha_0(1+\varepsilon)|u_k|^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x=\int_\Omega\mathrm{e}^{\alpha_0(1+\varepsilon)\|u_k\|^{\frac{N}{N-s}}\left(\frac{u_k}{\|u_k\|}\right)^{\frac{N}{N-s}}}\mathrm{d}x\leqslant C$$

由分数阶 Trudinger-Moser 不等式(2) 可知，存在 $\zeta>1$，使得

$$\int_{\Omega} | f(x, u_k) |^{\zeta} \mathrm{d}x \leqslant C \tag{11}$$

由(11)式和(8)式，取 $v = u_k$，再由 Hölder 不等式，当 $k \to +\infty$ 时，我们可得

$$\| u_k \|^{\frac{N}{s}} \leqslant C\varepsilon_k + \left(\int_{\Omega} | f(x, u_k) |^{\zeta} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\zeta}} \left(\int | u_k |^{\zeta'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\zeta'}} \to 0$$

其中$\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'} = 1$，并且 $\zeta > 1$. 因此 $c = 0$，这与所假设的 $c > 0$ 矛盾.

情形 3　$c > 0$ 且 $u \neq 0$.

在此情形中，我们将证 $c = J(u)$，同时，这也说明了

$$\lim_{k \to +\infty} \| u_k \|^{\frac{N}{s}} = \frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right) = \frac{N}{s}\left(J(u) + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right) = \| u \|^{\frac{N}{s}}$$

事实上，在 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$ 中，由范数的弱下半连续性知

$$\| u \|^{\frac{N}{s}} \leqslant \liminf_{k \to \infty} \| u_k \|^{\frac{N}{s}}$$

因此 $J(u) \leqslant c$. 反证法，假设 $J(u) < c$，它等价于

$$\| u \|^{\frac{N}{s}} \leqslant \frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right)$$

取

$$v_k = \frac{u_k}{\| u_k \|} \qquad v = u\left[\frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right)\right]^{-\frac{s}{N}}$$

因为在 $W_0^{s,\frac{N}{s}}(\Omega)$ 中，$v_k \rightharpoonup v$，$v \neq 0$，$\| v_k \| = 1$ 且 $\| v \| \leqslant 1$，所以，由引理2，对 $\forall\, 1 < p < \frac{1}{(1 - \| v \|^{\frac{N}{s}})^{\frac{s}{N-s}}}$，可得

$$\sup_k \int_{\Omega} \mathrm{e}^{p\alpha_{N,s} |v_k|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x < +\infty$$

紧接着，当 $\zeta > 1$ 时，将估计 $f(x, u_k)$ 的 L^{ζ} 范数. 由引理 2 和(10)式可得

$$\int_{\Omega} | f(x, u_k) |^{\zeta} \mathrm{d}x = \int_{\{|u_k| \leqslant t_{\varepsilon}\}} | f(x, u_k) |^{\zeta} \mathrm{d}x + \int_{\{|u_k| > t_{\varepsilon}\}} | f(x, u_k) |^{\zeta} \mathrm{d}x \leqslant$$

$$C \max_{\Omega \times [-t_{\varepsilon}, t_{\varepsilon}]} | f(x, t) |^{\zeta} + C_{\varepsilon,\zeta} \int_{\Omega} \mathrm{e}^{\alpha_0 (1+\varepsilon) |u_k|^{\frac{N}{N-s}}} \mathrm{d}x \leqslant C$$

其中，对 $\forall\, 1 < p < \frac{1}{(1 - \| v \|^{\frac{N}{s}})^{\frac{s}{N-s}}}$，需满足 $\alpha_0 (1 + \varepsilon) \| u_k \|^{\frac{N}{N-s}} \leqslant p\alpha_{N,s}$. 由 v 的定义可得

$$\frac{1}{1 - \| v \|^{\frac{N}{s}}} = \frac{\frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right)}{\frac{N}{s}c + \frac{N}{s}\int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x - \| u \|^{\frac{N}{s}}} = \frac{c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x}{c - J(u)}$$

因为

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k \|^{\frac{N}{s}} = \frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right)$$

所以

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_{N,s}}(1 + \varepsilon) \| u_k \|^{\frac{N}{N-s}} \leqslant \frac{\alpha_0}{\alpha_{N,s}}(1 + 2\varepsilon)\left[\frac{N}{s}\left(c + \int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x\right)\right]^{\frac{s}{N-s}} =$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_{N,s}}(1+2\varepsilon)\left[\frac{N}{s}\frac{c-J(u)}{1-\|v\|^{\frac{N}{s}}}\right]^{\frac{s}{N-s}}<\frac{1}{(1-\|v\|^{\frac{N}{s}})^{\frac{s}{N-s}}}$$

其中

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_{N,s}}(1+2\varepsilon)\left(\frac{N}{s}\right)^{\frac{s}{N-s}}<\frac{1}{(c-J(u))^{\frac{s}{N-s}}}$$

即

$$(1+2\varepsilon)^{\frac{N-s}{s}}(c-J(u))<\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}} \tag{12}$$

由 $J(u)\geqslant 0$ 和 $c<\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$，可选取 $\varepsilon>0$，使得(12)式成立.

定理1的证明 由引理3可知，J 存在一个$(\mathrm{PS})_c$ 序列$\{u_k\}$，并且

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}I(\gamma(t))\geqslant\alpha$$

由命题1，我们只需证

$$c<\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$$

事实上，由Sobolev嵌入，存在函数 $w(x)$，使得

$$\int_\Omega|w(x)|^q\mathrm{d}x=1$$

且 $\|w\|=S_q$. 从引理3(ⅱ)，可推断出：当 $t\to+\infty$ 时，有 $J(tw)\to-\infty$. 因此，由条件(F_5)可得

$$c\leqslant\max_{t\geqslant 0}J(tw)=\max_{t\geqslant 0}\left(\frac{s}{N}t^{\frac{N}{s}}S_q^{\frac{N}{s}}-\int_\Omega F(x,tw)\mathrm{d}x\right)\leqslant$$

$$\max_{t\geqslant 0}\left(\frac{s}{N}t^{\frac{N}{s}}S_q^{\frac{N}{s}}-\frac{t^q}{q}C_q\right)=\left(\frac{s}{N}-\frac{1}{q}\right)\frac{S_q^{\frac{Nq}{qs-N}}}{C_q^{\frac{Ns}{qs-N}}}<\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{N,s}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$$

参考文献:

[1] TRUDINGER N. On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications [J]. J Math Mech, 1967, 17: 473-483.

[2] MOSER J. A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger [J]. Indiana Univ Math J, 1970, 71(20): 1077-1092.

[3] 陈 卫, 唐春雷. 一类超线性分数阶Schrödinger方程解的多重性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(4): 26-30.

[4] NEZZA E D, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bull Sci Math, 2012, 136(5): 521-573.

[5] MOLICA BISCI G, RÂDULESCU V, SERVADEI R. Variational Methods for Nonlocal Fractional Equations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

[6] 张 维, 唐春雷. 一类次线性分数阶Schrödinger方程的无穷多解 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(6): 78-83.

[7] 叶景兰, 邓圣兵. 带有一般非线性项的分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统的变号解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(4): 16-21.

[8] PARINI E, BUF B. On the Moser-Trudinger Inequality in Fractional Sobolev-Slobodeckij Spaces [J]. Journal d'Analvse Mathematique, 2019, 138(1): 281-300.

[9] DE SOUZA M, ARAUJO Y L. Semilinear Elliptic Equations for the Fractional Laplacian Involving Critical Exponential

Growth [J]. Math Methods Appl Sci, 2017, 40(5): 1757-1772.

[10] IANNIZZOTTO A, SQUASSINA M. 1/2-Laplacian Problems with Exponential Nonlinearity [J]. J Math Anal Appl, 2014, 414(1): 372-385.

[11] LI Q, YANG Z D. Multiple Solutions for a Class of Fractional Quasi-Linear Equations with Critical Exponential Growth in $\mathbb{R}^N$ [J]. Complex Var Elliptic Equ, 2016, 61(7): 969-983.

[12] PERERA K, SQUASSINA M. Bifurcation Results for Problems with Fractional Trudinger-Moser Nonlinearity [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2018, 11(3): 561-576.

[13] BEZERRA DO J M. Semilinear Dirichlet Problems for the N-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with Nonlinearities in the Critical Growth Range [J]. Differential and Integral Equations, 1996, 9(5): 967-979.

[14] FIGUEIREDO D G, MIYAGAKI O H, RUF B. Elliptic Equations in $\mathbb{R}^2$ with Nonlinearities in the Critical Growth Range [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 1996, 4(2): 139-153.

[15] LAM N, LU G. Existence and Multiplicity of Solutions to Equations of N-Laplacian Type with Critical Exponential Growth in $\mathbb{R}^N$ [J]. J Funct Anal, 2012, 262(3): 1132-1165.

[16] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian System [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

Existence of Solutions for a Fractional Laplacian Problem with Critical Exponential Growth

YU　Fang,　CHEN Wen-jing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we consider the existence of nontrivial solutions to a fractional quasilinear problem, whose nonlinear term is related to the fractional Trudinger-Moser-type inequality. The associated energy functional lacks compactness, because the nonlinear term $f(x, u)$ is of critical exponential growth, which behaves like $e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}}$ as $u\to+\infty$ for some $\alpha>0$.

Key words: existence of solutions; fractional Trudinger-Moser inequality; critical exponent

责任编辑　廖　坤