第 42 卷第 11 期 西南大学学报(自然科学版) 2020年11月
Vol. 42 No. 11 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Nov. 2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.11.012

有限理性与一类主从博弈平衡点集的稳定性

蔡江华， 贾文生， 邓喜才

贵州大学 数学与统计学院，贵阳 550025

摘要：首先在局部凸 Hausdorff 拓扑空间中建立单主多从博弈模型并构造有限理性函数，然后给出此类主从博弈的有限理性模型 M，最后在本质解的意义下研究单主多从博弈 Nash 平衡点的稳定性，即在 Baire 分类意义下，大多数的单主多从博弈都是本质的.

关 键 词：单主多从博弈；Nash 平衡点；本质解；稳定性；有限理性

中图分类号：**F224.32** **文献标志码**：**A** **文章编号**：1673－9868(2020)11－0102－07

文献[1]用博弈论的语言建立了抽象的模型 M，在模型 M 的框架下，利用有限理性条件得到 ε－平衡点集来逼近完全理性条件下得到的平衡点集，其实质是一种对平衡点集的稳定性研究.

近年来，关于非线性问题解集的平衡点的稳定性研究，特别是对解集中的本质解、本质集和本质连通区等的研究，取得了大量成果[2-20].

受上述工作的启发，考虑到实际生活中人们并非完全理性，因此本文把有限理性的思想引入主从博弈，建立了有限理性条件下一个领导者多个跟随者的主从博弈模型，并在本质解的意义下研究了该类主从博弈 Nash 平衡点的稳定性，即在 Baire 分类意义下，大多数的单主多从博弈都是本质的.

1 预备知识

设 $I=\{1,2,\cdots,N\}$，$\forall i\in I$，X 是领导者的策略集，Y_i 是第 i 个跟随者的策略集，记 $Y=\prod\limits_{i=1}^{N}Y_i$，$Y_{-i}=\prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}}Y_j$，领导者的目标函数是 φ：$X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$，第 i 个跟随者的目标函数是 f_i：$X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$，定义含有领导者策略参数 x 的跟随者的 Nash 均衡点集值映射 K：$X\longrightarrow 2^Y$ 为

$$K(x)=\{y\in Y\mid f_i(x,y_i,y_{-i})=\max_{u_i\in Y_i}f_i(x,u_i,y_{-i})\}$$

领导者首先做出策略 $x\in X$，N 人非合作的跟随者展开竞争，设平衡点存在，即存在 $y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_N^*)\in Y$，使 $\forall i\in I$，令 $-i=I\setminus\{i\}$，有

$$f_i(x,y_i^*,y_{-i}^*)=\max_{u_i\in Y_i}f_i(x,u_i,y_{-i}^*)$$

平衡点一般是不唯一的，所有平衡点的集合依赖于 x，记跟随者的平衡点集为 $K(x)$，由 $x\longrightarrow K(x)$ 定义集值映射 K：$X\longrightarrow P_0(Y)$.

领导者同样要使自己的利益最大化，因此要求 $\max\limits_{y\in K(x)}\varphi(x,y)$，记 $V(x)=\max\limits_{y\in K(x)}\varphi(x,y)$，再求出 $\max\limits_{x\in X}V(x)$，因此主从博弈平衡点 (x^*,y^*) 应满足

$$V(x^*)=\max_{x\in X}V(x)=\max_{x\in X}\max_{y\in K(x)}\varphi(x,y)\qquad y^*\in K(x^*)$$

收稿日期：2018－11－08

基金项目：国家自然科学基金项目(11561013，11761023，71961003)；人社部留学归国人员择优资助项目(人社 No.[2015]192)；贵州省自然科学基金项目(黔科合基础[2020]1Y284).

作者简介：蔡江华(1993－)，男，硕士研究生，主要从事非线性分析与博弈论研究.

通信作者：贾文生，博士，教授.

且 $\forall y \in K(x^*)$ 有 $\varphi(x^*, y^*) \geqslant \varphi(x^*, y)$.

定义 1[11] 设 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间，$P_0(Y)$ 是 Y 中所有非空子集的集合，$F: X \longrightarrow P_0(Y)$ 是一个集值映射，则

1) 称集值映射 F 在 x 是上半连续的，如果对 Y 中任意开集 G，$G \supset F(x)$，存在 x 的开邻域 $O(x)$，使 $\forall x' \in O(x)$，有 $G \supset F(x')$.

2) 称集值映射 F 在 x 是下半连续的，如果对 Y 中任意开集 G，$G \cap F(x) \neq \varnothing$，存在 x 的开邻域 $O(x)$，使 $\forall x' \in O(x)$，有 $G \cap F(x') \neq \varnothing$.

3) 称集值映射 F 在 x 是连续的，如果集值映射 F 在 x 既是上半连续的，也是下半连续的. 称集值映射 F 在 X 是连续的，如果集值映射 F 在每一点 $x \in X$ 都是连续的.

文献[1] 用博弈论的语言建立了抽象的模型 $M = \{\Lambda, X, F, \Phi\}$，其中：$\Lambda$ 是参数空间，每个 $\lambda \in \Lambda$ 表示一个博弈；X 是行为空间，每个 $x \in X$ 表示一个策略；$F: \Lambda \times X \longrightarrow P_0(X)$ 是可行策略，而由 F 诱导出行为映射 $S: \Lambda \longrightarrow P_0(X)$，对于 $\forall \lambda \in \Lambda$，$S(\lambda) = \{x \in X: x \in F(\lambda, x)\}$，集值映射 S 的图 $\mathrm{graph}(S) = \{(\lambda, x) \in \Lambda \times X: x \in S(\lambda)\}$，$\Phi: \mathrm{graph}(S) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是理性函数. 对于 $\forall \lambda \in \Lambda$，$\forall \varepsilon \geqslant 0$，定义 $E(\lambda, \varepsilon) = \{x \in S(\lambda): \Phi(\lambda, x) \leqslant \varepsilon\}$ 为博弈的 $\varepsilon-$平衡点集，特别地，当 $\varepsilon = 0$ 时，定义 $E(\lambda) = E(\lambda, 0) = \{x \in S(\lambda): \Phi(\lambda, x) = 0\}$ 为博弈的平衡点集，而 $\Phi(\lambda, x) = 0$ 当且仅当 $x \in E(\lambda)$.

定义 2 1) 对 $\lambda \in \Lambda$，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使 $\forall \lambda' \in \Lambda$，$\rho(\lambda, \lambda') < \delta$，$\exists x' \in E(\lambda')$ 且 $d(x, x') < \varepsilon$，称 $x \in E(\lambda)$ 为博弈 λ 的本质平衡点.

2) 如果 $\forall x \in E(\lambda)$，x 都是博弈 λ 的本质平衡点，则此博弈 λ 是本质的.

以下给出有限理性的主要假设条件：

(H1) (Λ, ρ) 是一个完备度量空间，(X, d) 是一个度量空间；

(H2) 集值映射 $S: \Lambda \longrightarrow P_0(X)$ 是上半连续的，且 $\forall \lambda \in \Lambda$，$S(\lambda)$ 是非空紧集；

(H3) $\Phi: \Lambda \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足当 $x \in S(\lambda)$ 时，$\Phi(\lambda, x) \geqslant 0$ 且在 (λ, x) 是下半连续的；

(H4) $\forall \lambda \in \Lambda$，$E(\lambda) = \{x \in S(\lambda): \Phi(\lambda, x) = 0\} \neq \varnothing$.

引理 1[12] 如果(H1)－(H4) 成立，则

1) 平衡映射 $E: \Lambda \longrightarrow P_0(X)$ 是一个 usco 映射；

2) 存在 Λ 中的一个稠密剩余集 Q，使 $\forall \lambda \in Q$，M 在 λ 上是结构稳定的；

3) $\forall \lambda \in Q$，M 在 λ 对 ε-平衡也是鲁棒的.

引理 2[11] 设 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间，$\{A_\alpha\}$ 是 X 中一族非空紧集网，$A_\alpha \to A$，其中 A 是 X 中一个非空紧集，$\{y^\alpha\}$ 是 Y 中一个网，$y^\alpha \to y \in Y$，$\{f^\alpha(x, y)\}$ 是 $X \times Y$ 上一族连续函数网，$\sup\limits_{(x, y) \in X \times Y} | f^\alpha(x, y) - f(x, y) | \to 0$，其中 $f(x, y)$ 是 $X \times Y$ 上一个连续函数，则

$$\max_{x \in A_\alpha} f^\alpha(x, y^\alpha) \to \max_{x \in A} f(x, y)$$

引理 3[11] 设 X，Y 和 Z 是 3 个度量空间，其中 Z 是紧的，$\{A_m\}$ 是 X 中一列非空紧集，$\{y_m\}$ 是 Y 中一个序列而 $\{\varphi^m(x, y, z)\}$ 是定义在 $X \times Y \times Z$ 上的一列连续函数，如果 $h(A_m, A) \to 0$，其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离，A 是 X 中的一个非空紧集，$y_m \to y \in Y$，且

$$\sup_{(x, y, z) \in X \times Y \times Z} | \varphi^m(x, y, z) - \varphi(x, y, z) | \to 0$$

其中 φ 是定义在 $X \times Y \times Z$ 上的一个连续函数，则

$$\max_{\omega \in A_m} \min_{z \in Z} \varphi^m(\omega, y_m, z) \to \max_{\omega \in A} \min_{z \in Z} \varphi(\omega, y, z)$$

2 单主多从博弈 Nash 平衡点的稳定性

设 X，Y 为两个度量空间，定义博弈空间 $\Lambda = \{\lambda = (\varphi, f_i, K): \varphi$ 在 $X \times Y$ 上是连续的，对任意的 $i \in I$，f_i 在 $X \times Y$ 上是连续的，集值映射 K 在 X 上是连续的，对任意的 $x \in X$，

$$f_i(x, y_i, y_{-i}) = \max_{u_i \in Y_i} f_i(x, u_i, y_{-i}),\ \varphi(x, y_i, y_{-i}) = \max_{x \in X} \max_{(u_i, y_{-i}) \in K(x)} \varphi(x, u_i, y_{-i})$$

记 $E(\lambda)$ 是单主多从博弈的平衡点组成的集合，则 $E(\lambda) \neq \varnothing$，$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$，定义距离

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} | \varphi_1(x, y_i, y_{-i}) - \varphi_2(x, y_i, y_{-i}) | +$$

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y}\sum_{i=1}^{N}|f_i^1(x,y_i,y_{-i})-f_i^2(x,y_i,y_{-i})|+\sup_{x\in X}h(K_1(x),K_2(x))$$

其中 h 是 $X\times Y$ 上的 Hausdorff 距离，假设

$$\sup_{y\in Y}\sum_{i=1}^{N}|\varphi(x,y_i,y_{-i})|<+\infty$$

并且

$$\sup_{y\in Y}\sum_{i=1}^{N}|f_i(x,y_i,y_{-i})|<+\infty$$

则(Λ,ρ)是一个度量空间.

定理 1 (Λ,ρ)是一个完备度量空间.

证 设$\{\lambda_n\}$是 Λ 中的任意一个 Cauchy 序列，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $P(\varepsilon)$，使 $\forall n,m>P(\varepsilon)$，有

$$\rho(\lambda_n,\lambda_m)=\sup_{(x,y)\in X\times Y}|\varphi_n(x,y_i,y_{-i})-\varphi_m(x,y_i,y_{-i})|+$$
$$\sup_{(x,y)\in X\times Y}\sum_{i=1}^{N}|f_i^n(x,y_i,y_{-i})-f_i^m(x,y_i,y_{-i})|+\sup_{x\in X}h(K_n(x),K_m(x))$$

因为 $\mathbb{R}^{N+1}$ 完备，所以对 $\forall(x,y_i,y_{-i})\in X\times Y_i\times Y_{-i}$，$\forall i\in I$，存在函数 $\varphi(x,y_i,y_{-i})$ 与函数 $f_i(x,y_i,y_{-i})$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x,y_i,y_{-i})=\varphi(x,y_i,y_{-i})$$
$$\lim_{m\to\infty}f_i^m(x,y_i,y_{-i})=f_i(x,y_i,y_{-i})$$

且存在一个紧集 $K(x)$，使得 $\lim\limits_{m\to\infty}K_m(x)=K(x)$，且对 $\forall n>P(\varepsilon)$，有

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y}|\varphi_n(x,y_i,y_{-i})-\varphi(x,y_i,y_{-i})|+\sup_{(x,y)\in X\times Y}\sum_{i=1}^{N}|f_i^n(x,y_i,y_{-i})-f_i(x,y_i,y_{-i})|+$$
$$\sup_{x\in X}h(K_n(x),K(x))\leqslant\varepsilon$$

容易证明 φ 在 $X\times Y$ 上是连续的，f_i 在 $X\times Y$ 上是连续的，K 在 X 上是连续的. 由于 $\lambda_n=(\varphi_n,f_i^n,K_n)\in\Lambda$，则存在 $x^n\in X$，$u_i^n\in Y$，$(u_i^n,y_{-i}^n)\in K(x^n)$，使得

$$\varphi_n(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)=\max_{x^n\in X}\max_{(u_i^n,y_{-i}^n)\in K(x^n)}\varphi_n(x^n,u_i^n,y_{-i}^n)$$
$$f_i^n(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)=\max_{u_i^n\in Y_i}f_i^n(x^n,u_i^n,y_{-i}^n)$$

由于 X,Y 都是非空紧集，不妨设$(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)\to(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)\in X\times Y_i\times Y_{-i}$，则

$$h(K_n(x^n),K(x^*))\leqslant h(K_n(x^n),K(x^n))+h(K(x^n),K(x^*))\to 0$$

所以有 $h(K_n(x^n),K(x^*))\to 0$.

设 d 是 Hausdorff 线性拓扑空间上的距离函数，则

$$d((u_i^*,y_{-i}^*),K(x^*))\leqslant d((u_i^*,y_{-i}^*),(u_i^n,y_{-i}^n))+d((u_i^n,y_{-i}^n),K_n(x^n))+h(K_n(x^n),K(x^*))\leqslant$$
$$d((u_i^*,y_{-i}^*),(u_i^n,y_{-i}^n))+h(K_n(x^n),K(x^*))\to 0$$

所以有$(u_i^*,y_{-i}^*)\in K(x^*)$.

因为 f_i 在 $X\times Y$ 上是连续的，所以有

$$|f_i^n(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)-f_i(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)|\leqslant$$
$$|f_i^n(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)-f_i(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)|+|f_i(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)-f_i(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)|\leqslant$$
$$d(f_i^n,f_i)+|f_i(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)-f_i(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)|\longrightarrow 0$$

于是对 $\forall i\in I$，有

$$f_i^n(x^n,y_i^n,y_{-i}^n)\to f_i(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)$$

对 $\forall i\in I$，f_i^n,f_i 连续，

$$f_i^n\to f_i,\ (x^n,y_i^n,y_{-i}^n)\to(x^*,y_i^*,y_{-i}^*)$$

所以根据引理 2，有

$$\max_{u_i\in Y_i}f_i^n(x^n,u_i,y_{-i}^n)\to\max_{u_i\in Y_i}f_i(x^*,u_i,y_{-i}^*)$$

于是对 $\forall i\in I$，有

$$f_i(x^*, y_i^*, y_{-i}^*) = \max_{u_i \in Y_i} f_i(x^*, u_i, y_{-i}^*)$$

设
$$V(x) = \max_{(u_i, y_{-i}) \in K(x)} \varphi(x, u_i, y_{-i})$$

因为
$$\lambda_n = (\varphi_n, f_i^n, K_n) \in \Lambda$$

所以存在
$$(x^n, y_i^n, y_{-i}^n) \in X \times Y_i \times Y_{-i}$$

使得
$$\forall x^n \in X, \varphi_n(x^n) = \max_{u_1 \in X} V_n(u_1)$$

$$\forall (y_i^n, y_{-i}^n) \in K_n(x^n), \varphi_n(x^n, y_i^n, y_{-i}^n) = \max_{x^n \in X} \max_{(u_i, y_{-i}^n) \in K_n(x^n)} \varphi_n(x^n, u_i, y_{-i}^n)$$

由于 X 是紧集，则存在$\{u_{p1}\} \subset X$，使 $u_{p1} \to u$，且 $V_n(u_{p1}) \leqslant V_n(x^n)$，

$$|V_n(x^n) - V(x^*)| \leqslant |V_n(x^n) - V(x^n)| + |V(x^n) - V(x^*)| \to 0$$

有 $V_n(x^n) \to V(x^*)$. 由

$$V(u_{p1}) = V_n(u_{p1}) + (V(u_{p1}) - V_n(u_{p1}))$$

且 $|V_n(u_{p1}) - V(u_{p1})| \to 0$，

$$V(u_1) = \lim_{p \to \infty} V(u_{p1}) = \lim_{p \to \infty} V_p(u_{p1}) \leqslant \lim_{p \to \infty} V_p(x^p) = V(x^*)$$

所以 $V(x^*) = \max\limits_{u_1 \in X} V(u_1)$.

对任意的$(u_i, y_{-i}^n) \in K(x^*)$，有 $h(K_n(x^n), K(x^*)) \to 0$，则存在$(u_{pi}, y_{-pi}^n) \in K_n(x^n)$，使$(u_{pi}, y_{-pi}^n) \to (u_i, y_{-i}^n)$，因为 $\varphi_n(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n) \leqslant \varphi_n(x^n, y_i^n, y_{-i}^n)$，则

$$\begin{aligned} &|\varphi_n(x^n, y_i^n, y_{-i}^n) - \varphi(x^*, y_i^*, y_{-i}^*)| \leqslant \\ &|\varphi_n(x^n, y_i^n, y_{-i}^n) - \varphi(x^n, y_i^n, y_{-i}^n)| + |\varphi(x^n, y_i^n, y_{-i}^n) - \varphi(x^*, y_i^*, y_{-i}^*)| \to 0 \end{aligned}$$

所以
$$\varphi_n(x^n, y_i^n, y_{-i}^n) \to \varphi(x^*, y_i^*, y_{-i}^*)$$

又因为
$$\varphi(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n) = \varphi_n(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n) + (\varphi(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n) - \varphi_n(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n))$$

且
$$|\varphi_n(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n) - \varphi(x^n, u_{pi}, y_{-pi}^n)| \to 0$$

所以
$$\begin{aligned} \varphi(x^*, u_i, y_{-i}^*) &= \lim_{p \to \infty} \varphi(x^p, u_{pi}, y_{-pi}^p) = \\ &\lim_{p \to \infty} \varphi_p(x^p, u_{pi}, y_{-pi}^p) \leqslant \\ &\lim_{p \to \infty} \varphi_p(x^p, y_i^p, y_{-i}^p) \to \varphi(x^*, y_i^*, y_{-i}^*) \end{aligned}$$

有
$$\varphi(x^*, y_i^*, y_{-i}^*) = \max_{x^* \in X} \max_{(u_i, y_{-i}^*) \in K(x^*)} \varphi(x^*, u_i, y_{-i}^*)$$

因此 $\lambda = (\varphi, f_i, K) \in \Lambda$，所以$(\Lambda, \rho)$是一个完备度量空间.

对 $\forall \lambda \in \Lambda$，$\forall (x, y_i, y_{-i}) \in X \times Y_i \times Y_{-i}$，定义集值映射 $S(\lambda) = X \times K(x)$，则集值映射 S 是连续的，且对 $\forall \lambda \in \Lambda$，$S(\lambda)$是一个非空紧集. 对 $\forall (x, y_i, y_{-i}) \in S(\lambda)$，定义单主多从博弈的有限理性函数为：

$$\Phi(\lambda, (x, y_i, y_{-i})) = \max_{(u_i, y_{-i}) \in K(x)} \sum_{i=1}^{N} \min_{\|t\|=1, t \in \mathbb{R}_+^{N+1}} \langle t, w(x, u_i, y_{-i}) \rangle$$

其中：

$$w(x, u_i, y_{-i}) = (w_1(x, u_i, y_{-i}), w_2(x, u_i, y_{-i}))$$
$$w_1(x, u_i, y_{-i}) = \max_{x \in X} \max_{(u_i, y_{-i}) \in K(x)} \varphi(x, u_i, y_{-i}) - \varphi(x, y_i, y_{-i})$$
$$w_2(x, u_i, y_{-i}) = (w_{21}(x, u_i, y_{-i}), w_{22}(x, u_i, y_{-i}), \cdots, w_{2N}(x, u_i, y_{-i}))$$
$$w_{2i}(x, u_i, y_{-i}) = \max_{u_i \in Y_i} f_i(x, u_i, y_{-i}) - f_i(x, y_i, y_{-i})$$

$w_1(x, u_i, y_{-i})$作为领导者的平衡条件；$w_{2i}(x, u_i, y_{-i})$为每个跟随者的 Nash 平衡条件.

设 $E(\lambda)$表示单主多从博弈的平衡点集，显然有 $\Phi(\lambda, (x, y_i, y_{-i})) \geqslant 0$，$\Phi(\lambda, (x, y_i, y_{-i})) = 0$ 当且仅当$(x, y_i, y_{-i}) \in E(\lambda)$.

定理 2　$\Phi(\lambda, (x, y_i, y_{-i}))$在$(\lambda, (x, y_i, y_{-i}))$上是下半连续的.

证　只需证明：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\forall \lambda_n \in \Lambda$，$\lambda_n \to \lambda \in \Lambda$，$\forall (x_n, y_{in}, y_{-in}) \in X \times Y_i \times Y_{-i}$，$(x_n, y_{in}, y_{-in}) \to (x, y_i, y_{-i}) \in X \times Y_i \times Y_{-i}$，则存在正整数 N_0，使 $\forall n \geqslant N_0$，有 $\Phi(\lambda_n, (x_n, y_{in}, y_{-in})) > \Phi(\lambda, (x, y_i, y_{-i})) - \varepsilon$.

由于 K 在 X 上是连续的，且 $K(x)$是紧集，对 $\forall x_n \in X$，$x_n \to x \in X$，

$$h(K^n(x_n),K(x))\leqslant h(K^n(x_n),K(x_n))+h(K(x_n),K(x))\to 0$$

所以 $K^n(x_n)\to K(x)$.

因为 φ 在 (x_n,u_i,y_{-in}) 是连续的，则存在正整数 N_1，当 $\forall n\geqslant N_1$ 时，有

$$|\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi(x_n,u_i,y_{-in})|<\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}$$

由于

$$\varphi(x,y_i,y_{-i})=\max_{x\in X}\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})$$

所以

$$\left|\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi(x_n,u_i,y_{-in})\right|<\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}$$

又因为 $(x_n,u_i,y_{-in})\to(x,u_i,y_{-i})$，则存在正整数 N_2，当 $\forall n\geqslant N_2$ 时，有

$$|\varphi(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi(x,u_i,y_{-i})|<\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}$$

同理可得

$$\left|\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi(x_n,u_i,y_{-in})-\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})\right|<\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}$$

令 $N_3=\max\{N_1,N_2\}$，则对 $\forall n\geqslant N_3$，

$$\begin{aligned}&|\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi(x,u_i,y_{-i})|\leqslant\\&|\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi(x_n,u_i,y_{-in})|+|\varphi(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi(x,u_i,y_{-i})|<\\&\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}+\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}=\frac{\varepsilon}{2N(N+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\max_{x\in X}\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})\right|\leqslant\\&\left|\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi(x_n,u_i,y_{-in})\right|+\\&\left|\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi(x_n,u_i,y_{-in})-\max_{x\in X}\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})\right|<\\&\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}+\frac{\varepsilon}{4N(N+1)}=\frac{\varepsilon}{2N(N+1)}\end{aligned}$$

于是，对任意的 $t\in T$，根据 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$\begin{aligned}&|\langle t,[\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})]-\\&[\max_{x\in X}\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})-\varphi(x,u_i,y_{-i})]\rangle|\leqslant\\&|\langle t,\max_{x_n\in X}\max_{(u_i,y_{-in})\in K^n(x_n)}\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\max_{x\in X}\max_{(u_i,y_{-i})\in K(x)}\varphi(x,u_i,y_{-i})\rangle|+\\&|\langle t,\varphi^n(x_n,u_i,y_{-in})-\varphi(x,u_i,y_{-i})\rangle|<\\&\frac{\varepsilon}{2N(N+1)}+\frac{\varepsilon}{2N(N+1)}=\frac{\varepsilon}{N(N+1)}\end{aligned}$$

所以

$$\langle t,w_1^n(x_n,u_i,y_{-in})\rangle>\langle t,w_1(x,u_i,y_{-i})\rangle-\frac{\varepsilon}{N(N+1)}$$

$$\begin{aligned}&\max_{(u_i,y_{-in})\in K(x_n)}\sum_{i=1}^{N}\min_{\|t\|=1,t\in\mathbb{R}_+^{N+1}}\langle t,w_1^n(x_n,u_i,y_{-in})\rangle>\\&\max_{(u_i,y_{-in})\in K(x_n)}\sum_{i=1}^{N}\min_{\|t\|=1,t\in\mathbb{R}_+^{N+1}}(\langle t,w_1(x,u_i,y_{-i})\rangle-\frac{\varepsilon}{N(N+1)})>\\&\max_{(u_i,y_{-in})\in K(x_n)}\sum_{i=1}^{N}\min_{\|t\|=1,t\in\mathbb{R}_+^{N+1}}\langle t,w_1(x,u_i,y_{-i})\rangle-\frac{\varepsilon}{N+1}\end{aligned}$$

同理可得，对任意的 $j=1,2,\cdots,N$，

$$\max_{(u_i,\ y_{-in})\in K(x_n)} \sum_{i=1}^{N} \min_{\|t\|=1,\ t\in\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle t,\ w_{2j}^{n}(x_n,\ u_i,\ y_{-in})\rangle >$$

$$\max_{(u_i,\ y_{-in})\in K(x_n)} \sum_{i=1}^{N} \min_{\|t\|=1,\ t\in\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle t,\ w_{2j}(x,\ u_i,\ y_{-i})\rangle - \frac{\varepsilon}{N+1}$$

综上可得

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_n,\ (x_n,\ y_{in},\ y_{-in})) &= \max_{(u_i,\ y_{-in})\in K(x_n)} \sum_{i=1}^{N} \min_{\|t\|=1,\ t\in\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle t,\ w^{n}(x_n,\ u_i,\ y_{-in})\rangle > \\ &\max_{(u_i,\ y_{-in})\in K(x_n)} \sum_{i=1}^{N} \min_{\|t\|=1,\ t\in\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle t,\ w(x,\ u_i,\ y_{-i})\rangle - \frac{\varepsilon}{N+1}\cdot(N+1) = \\ &\Phi(\lambda,\ (x,\ y_i,\ y_{-i})) - \varepsilon\end{aligned}$$

注 1　由定理 1 和定理 2 可以得到单主多从博弈满足有限理性的 4 个主要假设条件，所以单主多从博弈满足引理 1 的所有性质，于是有以下定理 3,4,5 成立.

定理 3　平衡映射 $E:\Lambda\longrightarrow P_0(X)$ 是一个 usco 映射.

定理 4　存在 Λ 中的一个稠密剩余集 Q，使 $\forall\lambda\in Q$，M 在 λ 是结构稳定的.

定理 5　$\forall\lambda\in Q$，M 在 λ 对 ε- 平衡也是鲁棒的.

注 2　由于 Q 是稠密集，对于 $\forall\lambda\in\Lambda$ 可以用一列 $\lambda^n\in Q$ 对 λ 任意逼近，其中每个 λ^n 都是本质的. 对于 $\forall\lambda\in Q$，由于集值映射 $E:\Lambda\longrightarrow P_0(X)$ 在 $\lambda\in Q$ 上是连续的，且对 $\forall\lambda'\in\Lambda$，$E(\lambda')$ 是非空紧集，从而有 $\lim\limits_{\lambda'\longrightarrow\lambda} h(E(\lambda'),\ E(\lambda))=0$，即单主多从博弈 Nash 平衡点在 λ 上是稳定的. 又 Q 是第二纲的，所以在 Baire 分类意义上，大多数的单主多从博弈 $\lambda\in\Lambda$ 都是本质的.

定理 6　$\lambda\in\Lambda$，如果 $E(\lambda)=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\}$(单点集)，则博弈 λ 必是本质的.

证　对 X 中的任意开集 O，有 $O\cap E(\lambda)\neq\varnothing$，由 $E(\lambda)=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\}$，有 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\in O$，所以 $O\supset E(\lambda)$，由于集值映射 $E:\Lambda\longrightarrow P_0(X)$ 是一个 usco 映射，所以集值映射 E 在 λ 是上半连续的，则存在 λ 的开邻域 $U(\lambda)$，使得 $\forall\lambda'\in U(\lambda)$，有 $O\supset E(\lambda')$，所以 $O\cap E(\lambda')\neq\varnothing$，集值映射 E 在 λ 上是下半连续的，从而由定理 4 知，博弈 λ 必是本质的.

注 3　如果 Λ 是完备度量空间，而 M 在 $\lambda\in\Lambda$ 上是结构稳定的，即平衡映射 E 在 λ 上是连续的，则表明博弈 λ 是本质的，定理 4 正是博弈 λ 的平衡点集通有稳定性的结果.

注 4　如果 Λ 不是完备度量空间，只需将定理 4、定理 5 中稠密剩余集 Q 中的“稠密”二字去掉. 去掉“稠密”二字，定理 4 与定理 5 的结论仍然有意义.

根据定理 1,2,6 可得以下稳定性结论成立：

推论 1　存在一个稠密剩余集 Q，使得对 $\forall\lambda\in Q$，$\forall\lambda_n\in\Lambda$，$\lambda_n\to\lambda$，$\varepsilon_n\to 0$，有 $h(E(\lambda_n,\ \varepsilon_n),\ E(\lambda))\to 0$.

注 5　推论 1 表明当 $\lambda\in Q$ 时，虽然博弈 λ_n 是近似的，求解方法也是近似的(一般来说 $\varepsilon_n>0$ 但较小)，但可以用有限理性得到的 ε_n- 平衡点集 $E(\lambda_n,\ \varepsilon_n)$ 来近似代替完全理性得到的平衡点集 $E(\lambda)$. 注意到 Q 是第二纲的(或是第二范畴的)，这表明在 Baire 分类的意义上，或者在非线性分析和拓扑学的意义上，有限理性的引入不会对完全理性之上的模型分析结果产生较大的影响或冲击，这就是本文的理论意义所在.

3　结　论

本文主要研究了有限理性条件下单主多从博弈中平衡点集的稳定性. 同时也指出了对于非本质的平衡点集，可以利用有限理性得到的平衡点集来近似代替完全理性得到的平衡点集，也即非本质的平衡点集可以被本质的平衡点集逼近. 进一步，可将此结论应用到实际的博弈问题，例如多寡头 Stackelberg 模型以及地方政府模型等.

参考文献：

[1]　ANDERLINI L，CANNING D. Structural Stability Implies Robustness to Bounded Rationality [J]. Journal of Economic Theory，2001，101(2)：395-422.

[2]　FORT M K. Essential and Non Essential Fixed Points [J]. American Journal of Mathematics，1950，72(2)：315-322.

[3] YU J，XIANG S W. On Essential Components of the Set of Nash Equilibrium Points [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，1999，38(2)：259-264.
[4] YU J. Essential Equilibria of N-Person Noncooperative Games [J]. Journal of Mathematical Economics，1999，31(3)：361-372.
[5] XIANG S W，LIU G D，ZHOU Y H. On the Strongly Essential Components of Nash Equilibria of Infinite -Person Games with Quasiconcave Payoffs [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2005，63(5-7)：e2639-e2647.
[6] XIANG S W，ZHOU Y H. On Essential Sets and Essential Components of Efficient Solutions for Vector Optimization Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，315(1)：317-326.
[7] YU C，YU J. On Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2006，65(3)：583-592.
[8] YU C，YU J. Bounded Rationality in Multiobjective Games [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2007，67(3)：930-937.
[9] YU J，YANG H，YU C. Structural Stability and Robustness to Bounded Rationality for Non-Compact Cases [J]. Journal of Global Optimization，2009，44(1)：149-157.
[10] 何基好，向淑文，贾文生，等. 约束对应的图像拓扑下拟变分不等式解的稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(10)：103-106.
[11] 俞　建. 博弈论与非线性分析 [M]. 北京：科学出版社，2008.
[12] 俞　建. 博弈论与非线性分析续论 [M]. 北京：科学出版社，2011.
[13] 俞　建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性 [M]. 北京：科学出版社，2017.
[14] JIANG J. Essential Equilibrium Points n-Person Non-Cooperative Games [J]. Scientia Sinica，1962，11(10)：1307-1322.
[15] JIA W S，XIANG S W，HE J H，et al. Existence and Stability of Weakly Pareto-Nash Equilibrium for Generalized Multiobjective Multi-Leader-Follower Games [J]. Journal of Global Optimization，2015，61(2)：397-405.
[16] YU J，WANG H L. An Existence Theorem for Equilibrium Points for Multi-Leader-Follower Games [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2008，69(5-6)：1775-1777.
[17] YANG Z，JU Y. Existence and Generic Stability of Cooperative Equilibria for Multi-Leader-Multi-Follower Games [J]. Journal of Global Optimization，2016，65(3)：563-573.
[18] 俞　建. 几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性 [J]. 系统科学与数学，2009，29(7)：999-1008.
[19] 杨　辉，俞　建. 向量拟平衡问题的本质解及解集的本质连通区 [J]. 系统科学与数学，2004，24(1)：74-84.
[20] 邓喜才，左　羽. 有限理性与一类多主从博弈问题的良定性 [J]. 经济数学，2012，29(3)：16-19.

Bounded Rationality and Stability of the Set of Equilibrium Points for a Class of Leader-Follower Games

CAI Jiang-hua，　JIA Wen-sheng，　DENG Xi-cai

College of Mathematics and Statistics，Guizhou University，Guiyang 550025，China

Abstract：In this paper，we mainly study the stability of equilibrium point set for single-leader-multi-follower games under the condition of bounded rationality. First，in locally convex Hausdorff topological space，we introduce the single-leader-multi-follower game model and construct the bounded rationality function. Then，the bounded rationality model M of single-leader-multi-follower games is given. Finally，we study the stability of Nash equilibrium for single-leader-multi-follower games under the essential solution，i.e.，most of single-leader-multi-follower games are essential in Baire category.

Key words：single-leader-multi-follower game；Nash equilibrium point；essential solution；stability；bounded rationality

责任编辑　张　枸