DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.12.010

模的拟 Harmanci-内射性

秦军权，　梁　力

兰州交通大学 数理学院，兰州 730070；

摘要：介绍了拟 Harmanci-内射模的概念，并给出了一些性质及刻画. 特别地，证明了在任意环 R 上，($\mathscr{SMF}$, $\mathscr{NHI}$) 构成遗传的余挠对，其中 $\mathscr{NHI}$ 是拟 Harmanci-内射模类，$\mathscr{SMF}$ 是强 Matlis 平坦模类.

关　键　词：拟 Harmanci-内射模；强 Matlis 平坦模；余挠对

中图分类号：O154.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)12-0083-05

本文中 R 指有单位元的结合环，$E(R)$ 代表左 R-模 R 的内射包络.

内射模作为同调代数的主要研究对象之一，对同调代数的发展起着至关重要的作用. 近年来很多学者在推广内射模方面做了许多工作. 文献[1]定义了 Whitehead 模：设 M 是右 R-模，如果 $\mathrm{Ext}_R^1(M, R)=0$，则称右 R-模 M 是 Whitehead 模. 作为 Whitehead 模的对偶，文献[2]定义了 Matlis 内射模：如果 $\mathrm{Ext}_R^1(E(R), M)=0$，则称左 R-模 M 是 Matlis 内射模. 文献[3]给出了 Matlis 平坦模的定义：如果 $\mathrm{Tor}_1^R(M, E(R))=0$，则称右 R-模 M 是 Matlis 平坦模. 借助 Matlis 平坦模，文献[4]给出了 Harmanci-内射模的定义：如果对任意 Matlis 平坦右 R-模 N，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0$，则称右 R-模 M 是 Harmanci-内射模. 同时，文献[4]研究了 Harmanci-内射模的性质，证明了 Harmanci-内射模类是一个余挠对的右部分，并且该余挠对是遗传的当且仅当对任意 Harmanci-内射右 R-模 M，都有 $E(M)/M$ 是 Harmanci-内射的，其中 $E(M)$ 是 M 的内射包络.

本文进一步优化 Harmanci-内射模的概念，介绍并研究了拟 Harmanci-内射模. 特别地，证明了在任意环上，拟 Harmanci-内射模类是一个遗传的余挠对的右部分(见定理 1).

定义 1　设 R 是环. 如果对任意的 $i \geqslant 1$，有 $\mathrm{Tor}_i^R(M, E(R))=0$，则称右 R-模 M 是强 Matlis 平坦模.

命题 1　设 R 是环. 则：

(i) 强 Matlis 平坦模类对扩张封闭；

(ii) 强 Matlis 平坦模类对直和项封闭.

证　(i) 设 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是右 R-模的短正合列，并且 A, C 是强 Matlis 平坦模. 则对任意的 $i \geqslant 1$，有

$$\mathrm{Tor}_i^R(A, E(R))=\mathrm{Tor}_i^R(C, E(R))=0$$

收稿日期：2020-03-08

基金项目：国家自然科学基金项目(11761045)；兰州交通大学"百名青年优秀人才培养计划"基金项目；甘肃省自然科学基金项目(18JR3RA113).

作者简介：秦军权(1994-)，男，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

通信作者：梁　力，教授.

用 $-\otimes_R E(R)$ 作用到上述短正合列上得到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(A, E(R)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(B, E(R)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(C, E(R)) \longrightarrow \cdots$$

故 $\mathrm{Tor}_i^R(B, E(R))=0$，从而 B 是强 Matlis 平坦模.

(ii) 设 $M=M_1 \oplus M_2$ 是强 Matlis 平坦模，则对任意的 $i \geqslant 1$，有 $\mathrm{Tor}_i^R(M, E(R))=0$. 又因为

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, E(R)) \cong \mathrm{Tor}_i^R(M_1, E(R)) \oplus \mathrm{Tor}_i^R(M_2, E(R))$$

所以

$$\mathrm{Tor}_i^R(M_1, E(R))=\mathrm{Tor}_i^R(M_2, E(R))=0$$

故 M_1, M_2 是强 Matlis 平坦模.

定义 2 设 R 是环. 如果对任意强 Matlis 平坦右 R-模 N，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0$，则称右 R-模 M 是拟 Harmanci-内射模.

命题 2 设 R 是环，则：

(i) 拟 Harmanci-内射右 R-模的直积是拟 Harmanci-内射的；

(ii) 拟 Harmanci-内射右 R-模的直和项是拟 Harmanci-内射的；

(iii) 拟 Harmanci-内射右 R-模的类对扩张封闭.

证 (i) 设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是拟 Harmanci-内射右 R-模簇，$M=\prod_{i\in I} M_i$，并且 N 是强 Matlis 平坦右 R-模. 则有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^1(N, M_i)=0$，所以 M 是拟 Harmanci-内射的.

(ii) 设 $M=M_1 \oplus M_2$ 是拟 Harmanci-内射右 R-模，并且 N 是强 Matlis 平坦右 R-模. 则 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0$. 又因为 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^1(N, M_1) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(N, M_2)$，故得 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M_1)=\mathrm{Ext}_R^1(N, M_2)=0$. 从而 M_1 和 M_2 都是拟 Harmanci-内射的.

(iii) 设 $0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$ 是右 R-模的短正合列，并且 M, L 是拟 Harmanci-内射模. 令 N 是强 Matlis 平坦右 R-模. 用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ 作用到上述短正合列得到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, K) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, L) \longrightarrow \cdots$$

由假设得到 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=\mathrm{Ext}_R^1(N, L)=0$，故得 $\mathrm{Ext}_R^1(N, K)=0$. 从而 K 是拟 Harmanci-内射模.

命题 3 设 M 是拟 Harmanci-内射右 R-模，K 是 M 的子模，并且 K 的内射维数小于等于 1. 则 M/K 是拟 Harmanci-内射模.

证 由于 K 是 M 的子模，所以得到正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$. 设 N 是强 Matlis 平坦右 R-模，用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ 作用到上述短正合列得到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, M/K) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(N, K) \longrightarrow \cdots$$

因为 M 是拟 Harmanci-内射模，K 的内射维数小于等于 1，则 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0$，并且 $\mathrm{Ext}_R^2(N, K)=0$，故得 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M/K)=0$. 从而 M/K 是拟 Harmanci-内射模.

定义 3 如果 M 是某个内射模的同态像，则称 R-模 M 是 h-可除的.

命题 4 设 R 是环. 则以下结论等价：

(i) 拟 Harmanci-内射右 R-模类对同态像封闭；

(ii) 任意 h-可除右 R-模是拟 Harmanci-内射模；

(iii) 任意强 Matlis 平坦右 R-模的投射维数小于等于 1.

证 (i)$\Longrightarrow$(ii) 注意到内射模是拟 Harmanci-内射的，故得.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 设 M 是任意右 R-模，$E(M)$ 是 M 的内射包络，N 是强 Matlis 平坦右 R-模. 用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ 作用到短正合列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/M \longrightarrow 0$，得到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, E(M)/M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(N, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(N, E(M)) \longrightarrow \cdots$$

因为 $E(M)/M$ 是 h- 可除的，所以由 (ii) 知 $\mathrm{Ext}_R^1(N, E(M)/M)=0$. 而 $\mathrm{Ext}_R^2(N, E(M))=0$，故得 $\mathrm{Ext}_R^2(N, M)=0$. 从而 N 的投射维数小于等于 1.

(iii)$\Longrightarrow$(i)　设 M 是拟 Harmanci- 内射右 R- 模，K 是 M 的子模，N 是强 Matlis 平坦右 R- 模. 用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ 作用到短正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow M\longrightarrow M/K\longrightarrow 0$，得到正合列

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, M)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, M/K)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(N, K)\longrightarrow\cdots$$

由 M 的拟 Harmanci- 内射性和 (iii) 得到 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0=\mathrm{Ext}_R^2(N, K)$，故 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M/K)=0$. 从而 M/K 是拟 Harmanci- 内射的.

命题 5　设有右 R- 模短正合列

$$T_1: 0\longrightarrow M\xrightarrow{f_1} B\xrightarrow{g_1} C\longrightarrow 0$$

$$T_2: 0\longrightarrow M\xrightarrow{f_2} D\xrightarrow{g_2} E\longrightarrow 0$$

其中 C, E 是强 Matlis 平坦右 R- 模，B, D 是拟 Harmanci- 内射模. 则 $B\oplus E\cong D\oplus C$.

证　用 $\mathrm{Hom}_R(-, B)$ 作用到短正合列 T_2，得到正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(E, B)\xrightarrow{g_2^*}\mathrm{Hom}_R(D, B)\xrightarrow{f_2^*}\mathrm{Hom}_R(M, B)\longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(E, B)\longrightarrow\cdots$$

由于 E 是强 Matlis 平坦右 R- 模，B 是拟 Harmanci- 内射模，故 $\mathrm{Ext}_R^1(E, B)=0$，因此 f_2^* 是满态射，故存在态射 $h\in\mathrm{Hom}_R(D, B)$，使得 $f_2^*(h)=hf_2=f_1$. 故可得如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\|"'] & D \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_1"] & B \arrow[r, "g_1"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

从而可得正合列 $0\longrightarrow M\longrightarrow M\oplus D\longrightarrow B\oplus E\longrightarrow C\longrightarrow 0$. 考虑如下列正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "="] \arrow[d, "\|"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & M\oplus D \arrow[r] \arrow[d] & B\oplus E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\|"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & B\oplus E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

得到正合列 $0\longrightarrow D\longrightarrow B\oplus E\longrightarrow C\longrightarrow 0$. 由于 C 是强 Matlis 平坦右 R- 模，D 是拟 Harmanci- 内射模，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(C, D)=0$，所以上述正合列可裂，从而 $B\oplus E\cong D\oplus C$.

引理 1　设 M 是右 R- 模. 则以下结论等价：

(i) M 是拟 Harmanci- 内射模；

(ii) 对任意强 Matlis 平坦右 R- 模 N 以及任意 $k\geqslant 0$，有 $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N, M)=0$；

(iii) 若 C 是强 Matlis 平坦右 R- 模，则任意右 R- 模正合列 $0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$ 是 $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ 正合列.

证　(i)$\Longrightarrow$(ii)　结论对 $k=0$ 显然成立. 令 $k\geqslant 1$. 假设结论对 $k-1$ 成立. 现在证明结论对 k 也成立. 令 N 是强 Matlis 平坦右 R- 模，考虑短正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow P\longrightarrow N\longrightarrow 0$，其中 P 是投射模. 对 $i\geqslant 1$，用 $-\otimes_R E(R)$ 作用到上述正合列，得到正合列

$$0=\mathrm{Tor}_{i+1}^R(P, E(R))\longrightarrow \mathrm{Tor}_{i+1}^R(N, E(R))\longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(K, E(R))\longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(P, E(R))=0$$

从而 $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(N, E(R)) \cong \mathrm{Tor}_i^R(K, E(R))$. 由 N 是强 Matlis 平坦右 R-模得 $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(N, E(R))=0$, 故得 $\mathrm{Tor}_i^R(K, E(R))=0$. 所以 K 是强 Matlis 平坦右 R-模, 由归纳假设知 $\mathrm{Ext}_R^k(K, M)=0$. 因此 $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^k(K, M)=0$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 用 $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ 作用正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, 由 (ii) 得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, M)=0$$

故 (iii) 得证.

(iii)$\Longrightarrow$(i) 令 C 是强 Matlis 平坦右 R-模, 考虑正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow C \longrightarrow 0$, 其中 P 是投射模. 用 $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ 作用得到正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(C, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(P, M)=0$$

由 (iii) 知 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M) \longrightarrow 0$ 正合. 故 $\mathrm{Ext}_R^1(C, M)=0$, 即 M 是拟 Harmanci-内射的.

引理 2 设 R 是环, 令 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ 是右 R-模的正合列, 则:

(i) 若 A, B 是拟 Harmanci-内射模, 则 C 也是拟 Harmanci-内射模;

(ii) 若 B, C 是强 Matlis 平坦模, 则 A 也是强 Matlis 平坦模.

证 (i) 设 N 是强 Matlis 平坦模, 用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ 作用正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, 得到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1(N, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^2(N, A) \longrightarrow \cdots$$

由 A, B 是拟 Harmanci-内射模知 $\mathrm{Ext}_R^1(N, B)=0$, 再由引理 1 知 $\mathrm{Ext}_R^2(N, A)=0$, 因此 $\mathrm{Ext}_R^1(N, C)=0$. 所以 C 也是拟 Harmanci-内射模.

(ii) 对 $i \geqslant 1$, 用 $-\otimes_R E(R)$ 作用正合列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, 得到正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{i+1}^R(C, E(R)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(A, E(R)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^R(B, E(R)) \longrightarrow \cdots$$

由于 B, C 是强 Matlis 平坦右 R-模, 故有 $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(C, E(R))=0$, 并且 $\mathrm{Tor}_i^R(B, E(R))=0$, 因此 $\mathrm{Tor}_i^R(A, E(R))=0$, 故 A 是强 Matlis 平坦右 R-模.

引理 3 设 R 是环. 则 $\mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)$ 是拟 Harmanci-内射模.

证 设 N 是强 Matlis 平坦右 R-模, 故有 $\mathrm{Tor}_1^R(N, E(R))=0$. 根据同构

$$\mathrm{Ext}_R^1(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}_1^R(N, E(R)), Q/Z))$$

知 $\mathrm{Ext}_R^1(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z))=0$. 因此 $\mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)$ 是拟 Harmanci-内射模.

以下余挠对的定义由文献[5]首先提出(也可参见文献[6]的定义 7.1.2).

定义 4[5-6] 令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是由右 R-模构成的类. 记

$$\mathscr{A}^{\perp}=\{B \mid 对任意\ A \in \mathscr{A}\ 有\ \mathrm{Ext}_R^1(A, B)=0\}$$

$$^{\perp}\mathscr{B}=\{A \mid 对任意\ B \in \mathscr{B}\ 有\ \mathrm{Ext}_R^1(A, B)=0\}$$

如果 $\mathscr{A}^{\perp}=\mathscr{B}$ 且 $^{\perp}\mathscr{B}=\mathscr{A}$, 则称$(\mathscr{A}, \mathscr{B})$是余挠对. 如果对任意 $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ 及 $i \geqslant 1$, 都有 $\mathrm{Ext}_R^i(A, B)=0$, 则称余挠对$(\mathscr{A}, \mathscr{B})$是遗传的.

用 $\mathscr{SMF}$ 表示由所有强 Matlis 平坦右 R-模构成的类, $\mathscr{NHI}$ 表示由所有拟 Harmanci-内射右 R-模构成的类.

定理 1 令 R 是环, 则$(\mathscr{SMF}, \mathscr{NHI})$是遗传的余挠对.

证 由拟 Harmanci-内射模的定义得到 $\mathscr{SMF}^{\perp}=\mathscr{NHI}$, 并且 $\mathscr{SMF} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{NHI}$. 下证 $\mathscr{SMF} \supseteq {}^{\perp}\mathscr{NHI}$. 设 $N \in {}^{\perp}\mathscr{NHI}$. 由引理 3 知 $\mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)$ 是拟 Harmanci-内射模, 故 $\mathrm{Ext}_R^1(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z))=0$. 取正合列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z) \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0$, 其中 I 是内射模. 用 $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ 作用得到 $\mathrm{Ext}_R^2(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)) \cong \mathrm{Ext}_R^1(N, C)$. 由引理 3 知 $\mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)$ 是拟 Harmanci-内射模.

再由引理 2 知 C 也是拟 Harmanci-内射模，因此 $\mathrm{Ext}_R^1(N, C)=0$，故 $\mathrm{Ext}_R^2(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z))=0$. 如此继续可得，对任意 $i \geqslant 1$ 有 $\mathrm{Ext}_R^i(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z))=0$，因此由文献[7]的推论 10.63 得到同构 $\mathrm{Ext}_R^i(N, \mathrm{Hom}_Z(E(R), Q/Z)) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}_i^R(N, E(R)), Q/Z)$，则 $\mathrm{Tor}_i^R(N, E(R))=0$，从而 N 是强 Matlis 平坦模，故 $\mathscr{SMF} \supseteq {}^{\perp}\mathscr{NHI}$，所以$(\mathscr{SMF}, \mathscr{NHI})$ 是余挠对. 再由引理 2 和文献[8]的定理 2.1.4 得到余挠对$(\mathscr{SMF}, \mathscr{NHI})$ 是遗传的.

参考文献：

[1] EKLOF P C, SHELAH S. On Whitehead Modules [J]. J Algebra, 1991, 142(2): 492-510.

[2] YAN H Y. Matlis Injectives Modules [J]. Bull Korean Math Soc, 2013, 50(2): 459-467.

[3] SELVARDJ C, PRABAKARAN P. Matlis Flat Modules [J]. Tbilisi Math J, 2016, 9(2): 105-114.

[4] UNGOR B. Harmanci Injectivity of Modules [EB/OL]. [2020-01-15]. http://arxiv. org/abs/1902. 00707.

[5] SALCE L. Cotorsion Theories for Abelian Groups [J]. Sympos Math, 1979, 23: 11-32.

[6] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[7] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York: Springer, 2000.

[8] ENOCHS E E, OYONARTE L. Covers, Envelopes and Cotorsion Theories [M]. New York: Nova Science Publishers, 2002.

Quasi-Harmanci Injectivity of Modules

QIN Jun-quan,　LIANG　Li

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, we introduce the concept of quasi-Harmanci injective modules and give their characterizations. Let $\mathscr{NHI}$ denote the class of quasi-Harmanci injective modules and $\mathscr{SMF}$ denote the class of strongly Matlis flat modules. We prove that over an arbitrary ring R, the pair $(\mathscr{SMF}, \mathscr{NHI})$ is a hereditary cotorsion pair.

Key words: quasi-Harmanci injective module; strongly Matlis flat module; cotorsion pair

责任编辑　廖　坤