第 42 卷第 12 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2020年12月
Vol. 42　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2020

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2020.12.011

Ω-左 R-模范畴中的平坦对象研究

马晓君，　汤建钢

伊犁师范学院 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000

摘要：定义了 Ω- 左 R- 模范畴. 同理，可定义 Ω- 右 R- 模范畴. 给出了平坦 Ω- 左 R- 模的概念，研究了 Ω- 左 R- 模具有平坦性的等价刻画问题. 证明了：自由 Ω- 左 R- 模、投射 Ω- 左 R- 模和内射 Ω- 左 R- 模均是平坦 Ω- 左 R- 模.

关　键　词：Ω- 左 R- 模范畴； 张量函子； 正合性； 平坦性

中图分类号：O159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2020)12－0088－08

文献[1]引入了以双诱导映射为态射的 L-fuzzy 群范畴的概念，并且讨论了该范畴中的乘积运算，证明了该范畴对乘积运算是封闭的，特别给出了 L-fuzzy 群范畴中的乘积与经典群范畴中的乘积之间的关系. 文献[2－9] 引入了 L-fuzzy 左 R-模范畴的概念，讨论了该范畴对乘积和上积运算的封闭性，讨论了自由 L-fuzzy 左 R-模的性质、自由 L-fuzzy 左 R-模函子和遗忘 L-fuzzy 函子的伴随性以及 L-fuzzy 左 R-模范畴中的张量积和张量函子等问题.

本文引入了 Ω- 左 R- 模范畴和 Ω- 右 R- 模范畴的概念，基于张量函子的正合性，给出了平坦 Ω- 左 R- 模的概念，讨论了 Ω- 左 R- 模具有平坦性的等价刻画，证明了：自由 Ω- 左 R- 模、投射 Ω- 左 R- 模和内射 Ω- 左 R- 模均是平坦 Ω- 左 R- 模.

1　预备知识

用 Set 表示集合范畴，用 $T=\{*\}$ 表示单点集，则 T 是集合范畴的终对象.

定义 1[10]　设 Ω 是一个五元组，$\Omega=(\Omega, \leqslant, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 并且满足：

(a) $(\Omega, \leqslant, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 是完备格；

(b) $a \wedge b \leqslant c$ 当且当 $b \leqslant a \rightarrow c$.

则称 Ω 是洛克，也称为 Heyting 代数，用 1 表示 Ω 中的最大元，用 0 表示 Ω 中的最小元，并且规定 $\vee \varnothing = 0$，$\wedge \varnothing = 1$，其中 $\varnothing$ 表示空集合.

定义 2[11-12]　设 $X \in Ob(\mathrm{Set})$ 是非空集合，$\Omega=(\Omega, \leqslant, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 是洛克，映射 $A: X \longrightarrow \Omega$ 称为 X 的 Ω- 子集.

用 Ω^X 表示 X 的所有 Ω- 子集的集合，按点态方式定义，容易验证 $\Omega^X=(\Omega^X, \leqslant, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 也是洛克，用 $\hat{\varnothing}, \hat{X}$ 分别表示它的最小值和最大值，其中 $\hat{\varnothing}(x)=0$，$\hat{X}(x)=1$，对任意的 $x \in X$ 都成立.

定义 3[11-12]　设 $X \in Ob(\mathrm{Set})$，$A \in \Omega^X$，并且满足正规性，即存在 $* \in X$ 使得 $A(*)=1$，则称偶序

收稿日期：2020－03－20
基金项目：国家自然科学基金项目(11161050，31424020)；2019 年度新疆自治区高校科研计划自然科学重点项目(XJEDU2019I024).
作者简介：马晓君 (1995)，女，硕士研究生，主要从事范畴论及其应用的研究.
通信作者：汤建钢，教授.

(X, A) 是 Ω-集合.

定义 4[11-12]　设 (X, A)，(Y, B)，(Z, C) 是 Ω-集合，

(a) 若映射 $f: X \longrightarrow Y$ 满足 $A \leqslant Bf$，则称 f 是由 (X, A) 到 (Y, B) 的 Ω-集映射，记作 $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$；

(b) 设 $f: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$，$g: (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$，则 Ω-集映射的复合 $g \circ f: (X, A) \longrightarrow (Z, C)$ 定义为通常映射的复合 $g \circ f: X \longrightarrow Z$；

(c) 设 (X, A) 是 Ω-集合，其单位 Ω-集映射 $1_{(X, A)} = 1_X$.

注 1　$A \leqslant B \circ f$ 等价于：

(a) 任意的 $x \in X$，有 $A(x) \leqslant B(f(x))$；

(b) 对于任意的 $\alpha \in \Omega$，任意的 $x \in A_\alpha$，有 $f(x) \in B_\alpha$，其中 $A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geqslant \alpha\}$ 称为 A 的水平集，$B_\alpha = \{y \in Y \mid B(y) \geqslant \alpha\}$；

(c) 对于任意的 $\alpha \in \Omega$，有 $f(A_\alpha) \subseteq B_\alpha$；

(d) 对于任意的 $\alpha \in \Omega$，f 在 A_α 上的限制 $f_\alpha = f|_{A_\alpha}: A_\alpha \longrightarrow B_\alpha$ 是一个集映射.

定义 5[11-12]　以 Ω-集合作为对象，Ω 集映射作为态射，构成一个范畴，称为 Ω-集范畴，记作 $\mathrm{Set}(\Omega)$.

注 2　Ω-集范畴 $\mathrm{Set}(\Omega)$ 的终对象记作 $(T, \hat{T})$，其中 T 为集范畴 Set 中的终对象，即 $T = \{*\}$ 为单点集，为方便起见，Ω-集范畴 $\mathrm{Set}(\Omega)$ 的终对象也可用 T 表示.

用 M_R^l 表示左 R-模范畴，左 R-模范畴 M_R^l 中的零对象（既是始对象也是终对象）记为 $O = \{0\}$，其中 0 表示零元.

定义 6[2]　设 Ω 是一个洛克，$M \in Ob(M_R^l)$，$A: M \longrightarrow \Omega$ 是映射且满足：

(a) $A(0) = 1$；

(b) 对于任意的 $m, n \in M$，$A(m) \wedge A(n) \leqslant A(m+n)$；

(c) 对于任意的 $m \in M$，$A(m) \leqslant A(-m)$；

(d) 对于任意的 $r \in R$，$m \in M$，$A(m) \leqslant A(rm)$.

则称 A 为 M 的 Ω-子模，称偶序 (M, A) 为 Ω-左 R-模，简记为 Ω-lm.

类似地，可以定义 Ω-右 R-模（Ω-rm）的概念. Ω-左 R-模和 Ω-右 R-模统称为 Ω-模，分别用 (M_R, A) 和 $({}_RM, A)$ 表示 Ω-rm 和 Ω-lm 以示区别，我们定义 Ω-Abelian 群（Ω-ag）为 Ω-左 R-模或者 Ω-右 R-模.

设 $M \in Ob(M_R^l)$，用 $\Omega(M)$ 表示 M 的 Ω-左 R-子模的全体.

引理 1[2]　设 $A_i \in \Omega(M)$，$i \in I$，则：

(i) $\bigwedge\limits_{i \in I} A_i \in \Omega(M)$；

(ii) $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i \in \Omega(M)$，其中对于任意的 $m \in M$，$(\bigoplus\limits_{i \in I}(A_i))(m) = \bigvee \left\{ \bigwedge\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} A_{(i_k)}(m_k) \mid \sum\limits_{k=1}^{p} x_k = m,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ m_k \in M \right\}$.

引理 2[2]　设 $f: M \longrightarrow N \in \mathrm{Mor}(M_R^l)$，则：

(i) $A \in \Omega(M)$，则 $f^{\rightarrow}(A) \in \Omega(N)$；

(ii) $B \in \Omega(N)$，则 $f^{\leftarrow}(B) \in \Omega(M)$.

定义 7[3]　设 (M, A)，(N, B) 是两个左 R-模，若左 R-模同态 $f: M \longrightarrow N$ 满足 $A \leqslant B \circ f$，则称 f 是由 (M, A) 到 (N, B) 的 Ω-左 R-模同态，简称为 Ω-lm 同态，记作 $f: (M, A) \longrightarrow (N, B)$.

定义 8[3, 13]　以 Ω-左 R-模为对象，Ω-左 R-模同态为态射，可构成一范畴，称之为 Ω-左 R-模范畴，记作 $M_R^l(\Omega)$.

同理，可定义 Ω-右 R-模范畴，记作 $M_R^r(\Omega)$，Ω-Abelian 群范畴记作 $\mathrm{AG}(\Omega)$.

设 C 是一个范畴，用 $Ob(C)$ 表示范畴 C 的对象类，$\mathrm{Mor}(C)$ 表示范畴 C 的态射类.

定义 9[14] 设 C 是一个范畴，$\{C_i\}_{i\in I}\subseteq Ob(C)$ 是范畴 C 中的对象族，则诸 C_i 的乘积为集合 $\{C, p_i, i\in I\}$，其中 $C\in Ob(C)$，$p_i\in \mathrm{Mor}(C, C_i)$，$i\in I$，如果 $B\in Ob(C)$，$g_i\in \mathrm{Mor}(B, C_i)$，$i\in I$，则存在唯一的 $r\in \mathrm{Mor}(B, C)$，使得对任意 $i\in I$，下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "g_i"'] & & C \arrow[dl, "p_i"] \\
& C_i &
\end{tikzcd}
$$

即对任意 $i\in I$，$p_i\circ r=g_i$. 若记 $r=(g_i)_{i\in I}$，则对任意 $i\in I$，$p_i\circ((g_i)_{i\in I})=g_i$.

引理 3[14-17] 设 C 是具有任意乘积的范畴，$\{f_i: A_i\longrightarrow B_i \mid i\in I\}$ 是范畴 C 中的一族态射(I 是任意指标集)，$\left\{p_j: \prod\limits_{i\in I} A_i\longrightarrow A_j \mid j\in I\right\}$ 与 $\left\{r_j: \prod\limits_{i\in I} B_i\longrightarrow B_j \mid j\in I\right\}$ 分别是 $\{A_i\}_{i\in I}$ 与 $\{B_i\}_{i\in I}$ 的积，则存在唯一的态射 $\prod\limits_{i\in I} f_i: \prod A_i\longrightarrow \prod B_i$ 使得下面的图交换：

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "\prod\limits_{i\in I} f_i"] \arrow[d, "p_j"'] & \prod\limits_{i\in I} B_i \arrow[d, "r_j"] \\
A_j \arrow[r, "B_j"'] & B_j
\end{tikzcd}
$$

称该态射 $\prod\limits_{i\in I} f_i$ 为态射族 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的乘积.

引理 4[5] 设 $(M_i, A_i)\in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，$i\in I$，令

$$
\prod_{i\in I} M_i=\{\{x_i\} \mid x_i\in M_i, i\in I\} \qquad \prod_{i\in I} A_i=\wedge_{i\in I} p_i^{\leftarrow}(A_i)=\wedge_{i\in I} A_i p_i
$$

具体地，$(\prod\limits_{i\in I} A_i)(\{x_i\})=\wedge\{A_i(x_i) \mid x_i\in X_i, i\in I\}$，$p_j: \prod\limits_{i\in I} M_i\longrightarrow M_j$，$p_j(\{x_j\})=x_j$，则 $\left\{(\prod\limits_{i\in I} M_i, \prod\limits_{i\in I} A_i), p_i\right\}$ 是诸 (M_i, A_i) 在 Ω-左 R-模 $M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)$ 中的乘积.

定义 10[14] 设 C 是一个范畴，$\{C_i\}_{i\in I}\subseteq Ob(C)$ 是范畴 C 中的对象族，则诸 C_i 的一个余积为集合 $\{C, q_i\}$，其中 $C\in Ob(C)$，$q_i\in \mathrm{Mor}(C_i, C)$，$i\in I$. 如果 $B\in Ob(C)$，$g_i\in \mathrm{Mor}(C_i, B,)$，$i\in I$，则存在唯一的 $r\in \mathrm{Mor}(C, B)$，使得对任意 $i\in I$，下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "r"] & & B \\
& C_i \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

即对任意 $i\in I$，$r\circ q_i=g_i$. 若记 $r=[g_i]_{i\in I}$，则对任意 $i\in I$，$([g_i]_{i\in I})\circ q_i=g_i$.

引理 5[14-17] 设 C 是具有任意余积的范畴，$\{f_i: A_i\longrightarrow B_i \mid i\in I\}$ 是范畴 C 中的一族态射(I 是任意指标集)，$\{q_j: A_j\longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} A_i \mid j\in I\}$ 与 $\{s_j: B_j\longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} B_i \mid j\in I\}$ 分别是 $\{A_i\}_{i\in I}$ 与 $\{B_i\}_{i\in I}$ 的余积，则存在唯一的态射 $\coprod\limits_{i\in I} f_i: \coprod\limits_{i\in I} A_i\longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} B_i$ 使得下面的图交换：

$$
\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "p_j"'] & B_j \arrow[d, "r_j"] \\
\coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[r, "\coprod\limits_{i\in I} f_i"'] & \coprod\limits_{i\in I} B_i
\end{tikzcd}
$$

称该态射 $\coprod_{i\in I} f_i$ 为态射族$\{f_i\}_{i\in I}$ 的余积.

引理 6[5] 设$(M_i, A_i)\in Ob(M_R^l(\Omega))$，$i\in I$，令 $\coprod_{i\in I} M_i=\bigoplus_{i\in I} M_i$，$q_j: M_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$，$q_j(x)=x$，$\bigoplus_{i\in I}(A_i)=\bigvee_{i\in I} q_i^{\rightarrow}(A_i)$. 具体地，$(\bigoplus_{i\in I} A_i)(x)=A_j(x)$，则$\{(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{i\in I} A_i), q_i\}$是诸$(M_i, A_i)$在 Ω-左 R-模 $M_R^l(\Omega)$ 中的余积.

定义 11[4] 设 $f:(M, A)\longrightarrow(N, B)\in \mathrm{Mor}(M_R^l(\Omega))$，对任意 $y\in \mathrm{im}f$，$(f\mathrm{im}f)(y)=f(A)(y)$，则 $f\mathrm{im}f$ 是 $\mathrm{im}f$ 的右 R-子模，其中 $\mathrm{im}f$ 是右 R-模同态 f 的像，偶序$(\mathrm{im}f, f\mathrm{im}f)$称为 Ω-lm 同态 f 的 Ω-像，记作 $F\mathrm{im}f$，即 $F\mathrm{im}f=(\mathrm{im}f, f\mathrm{im}f)$.

定义 12[9] 设 $f:(M, A)\longrightarrow(N, B)\in \mathrm{Mor}(M_R^l(\Omega))$，对任意 $x\in \ker f$，$(f\ker f)(x)=f(A)(x)$，则 $f\ker f$ 是 $\ker f$ 的右 R-子模，其中 $\ker f$ 是右 R-模同态 f 的核，偶序$(\ker f, f\ker f)$称为 Ω-lm 同态 f 的 Ω-核，记作 $F\ker f$，即 $F\ker f=(\ker f, f\ker f)$.

定义 13[9] Ω-lm 同态的一个序列是指形如

$$\cdots \rightarrow (M_{i-1}, A_{i-1}) \xrightarrow{f_{i-1}} (M_i, A_i) \xrightarrow{f_i} (M_{i+1}, A_{i+1}) \longrightarrow \cdots$$

的图形，这个序列称为 Ω-lm 正合列，是指对任意 i，有$(\mathrm{im}f_{i-1}, f\mathrm{im}f_{i-1})=(\ker f_i, f\ker f_i)$.

定义 14[14] 设 C 是范畴，$f: A\longrightarrow B$ 是 C 中的态射. 如果对 C 中的任意一对平行态射 $g, h: C\longrightarrow A$ 使得 $fg=fh$，有 $g=h$，则称 f 是单态射(这时称 f 是左可约的). 对偶地，定义 $f: A\longrightarrow B$ 是满态射当且当任意一对平行态射 $g, h: B\longrightarrow C$ 使得 $gf=hf$，则有 $g=h$(这时称 f 是右可约的). 如果 f 既是单态射又是满态射，则称 f 是双态射.

引理 7[6] 设$(M, A)\xrightarrow{f}(N, B)\in \mathrm{Mor}(M_R^l(\Omega))$，则下列结论等价：

(i) $(M, A)\xrightarrow{f}(N, B)$ 是单态射；

(ii) $(O, \hat{O})\longrightarrow(M, A)\xrightarrow{f}(N, B)$ 是 Ω-lm 正合列；

(iii) 对任意 $\alpha\in\Omega$，$O\longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} B_\alpha$ 是左 R-模正合列；

(iv) $M\xrightarrow{f} N$ 在左 R-模范畴 M_R^l 中是单同态，且 $A\leqslant Bf$.

2　张量积与张量函子

定义 15[6] 设 $M\in Ob(M_R^r)$，$A\in\Omega^M$，令$\langle A\rangle=\wedge\{B\mid A\leqslant B, B\in\Omega(M)\}$，则称$\langle A\rangle$是由 A 生成的 M 的 Ω-右 R-子模.

引理 8[6] 设 $f: M\longrightarrow N\in \mathrm{Mor}(M_R^r)$，$A\in\Omega^M$，则 $f(\langle A\rangle)=\langle f(A)\rangle$.

定义 16[6] 设$(M_R, A)\in Ob(M_R^r(\Omega))$，$({}_RN, B)\in Ob(M_R^l(\Omega))$，$(M_R, A)$与$({}_RN, B)$的平衡乘积是指偶序$((P, C), f)$，其中$(P, C)\in Ob(\mathrm{AG}(\Omega))$，$f: M\times N\longrightarrow P$ 是通常映射，并且满足以下条件：

(a) (P, f)是 M_R 与 ${}_RN$ 的平衡乘积；

(b) f 是$(M_R, A)\times({}_RN, B)$到(P, C)的 Ω 集映射.

根据 Zadeh 扩张原理，映射 $f: M\times N\longrightarrow P$ 可以诱导映射 $f: \Omega^M\times\Omega^N\longrightarrow\Omega^P$，其中 $f(A, B)(z)=\vee\{A(x)\wedge B(y)\mid x\in M, y\in N, f(x, y)=z\}$. 所以 f 是$(M_R, A)\times({}_RN, B)$到(P, C)的 Ω 集合当且仅当 $f(A, B)\leqslant C$.

定义 17[6] 设$(M_R, A)\in Ob(M_R^r(\Omega))$，$({}_RN, B)\in Ob(M_R^l(\Omega))$，$(M_R, A)$与$({}_RN, B)$的张量积是指平衡乘积$((T, C), f)$，使得对于$(M_R, A)$与$({}_RN, B)$的任意平衡乘积$((P, D), g)$，存在唯一的 $h\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{AG}(\Omega)}((T, C), (P, D))$，使得 $h\circ f=g$，即下图交换：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (M_R, A)\times({}_RN, B) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ (T, C) \arrow[rr, "h"] & & (P, D) \end{tikzcd}$$

引理 9[6] $((T, C), f)$ 是 (M_R, A) 和 $({}_RN, B)$ 的张量积，当且仅当：

(i) (T, f) 是 M_R 和 ${}_RN$ 的张量积；

(ii) $C = \langle f(A, B)\rangle$.

设 $(M_R, A) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，$({}_RN, B) \in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，则 $M_R \in Ob(M_R^{\mathrm{r}})$，${}_RN \in Ob(M_R^{\mathrm{l}})$. 由张量积的存在性定理，$(M \underset{R}{\otimes} N, \underset{R}{\otimes})$ 是 M_R 与 ${}_RN$ 的张量积. 令 $A \underset{R}{\otimes} B = \langle \underset{R}{\otimes}(A, B)\rangle$，由引理2可知，$((M \underset{R}{\otimes} N, A \underset{R}{\otimes} B), \underset{R}{\otimes})$ 是 (M_R, A) 与 $({}_RN, B)$ 的张量积. 于是有以下引理：

引理 10[6] 设 $(M_R, A) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，$({}_RN, B) \in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，则 $((M_R \underset{R}{\otimes} {}_RN, A \underset{R}{\otimes} B), \underset{R}{\otimes})$ 是 (M_R, A) 与 $({}_RN, B)$ 的张量积.

引理 11 设 $(M_R^i, A_i) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))(i \in I)$，$({}_RN, B) \in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，则有同构

$$\bigoplus_{i\in I}((M_R^i, A_i) \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B)) \cong (\bigoplus_{i\in I}(M_R^i, A_i)) \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B)$$

定义 18[7] 任意取定 $(M_R, A) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，定义张量函子

$$(M_R, A) \underset{R}{\otimes} -: M_R^{\mathrm{l}}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{AG}(\Omega)$$

对于任意 $({}_RN, B) \in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，

$$(M_R, A) \underset{R}{\otimes} -: ({}_RN, B) \longmapsto (M_R, A) \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B)$$

对于任意 $({}_RN, B) \xrightarrow{f} ({}_RP, C) \in \mathrm{Mor}(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，

$$(M_R, A) \underset{R}{\otimes} -: f \longmapsto 1_M \underset{R}{\otimes} f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{AG}(\Omega)}((M_R, A) \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B), (M_R, A) \underset{R}{\otimes} ({}_RP, C))$$

容易验证 $(M_R, A) \underset{R}{\otimes} -: M_R^{\mathrm{l}}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{AG}(\Omega)$ 为加法共变函子.

同理，对于取定的 $({}_RN, B) \in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，可定义张量函子

$$- \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B): M_R^{\mathrm{r}}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{AG}(\Omega)$$

同样也是加法共变函子.

定理 1[7] 对每一个 $(M_R, A) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，张量函子 $(M_R, A) \underset{R}{\otimes} -$ 是右正合函子.

定理 2[7] 对每一个 $({}_RN, B) \in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，张量函子 $- \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B)$ 是左正合函子.

3 主要结果

定义 19 设 $(F_R, C) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，如果张量函子 $(F_R, C) \underset{R}{\otimes} -$ 是右正合函子，则称 (F_R, C) 是平坦 Ω-右 R-模. 类似可定义平坦 Ω-左 R-模.

以下讨论平坦 Ω-右 R-模的等价刻画，平坦 Ω-左 R-模可类似地讨论.

定理 3[18] 设 $(F_R, C) \in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，则以下结论等价：

(i) (F_R, C) 是平坦 Ω-右 R-模；

(ii) 如果 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_RM, A) \xrightarrow{f} ({}_RN, B)$ 是 Ω-lm 正合列，则

$$(O, \hat{O}) \longrightarrow (F_R, D) \underset{R}{\otimes} ({}_RM, A) \xrightarrow{1_F \underset{R}{\otimes} f} (F_R, D) \underset{R}{\otimes} ({}_RN, B)$$

是 Ω-ag 正合列；

(iii) 如果 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_RM, A) \xrightarrow{f} ({}_RN, B) \xrightarrow{g} ({}_RU, C) \longrightarrow (O, \hat{O})$ 是 Ω-lm 短正合列，则

$$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RM,A)\xrightarrow{1_F\underset{R}{\otimes}f}(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RN,B)\xrightarrow{1_F\underset{R}{\otimes}g}(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RU,C)\longrightarrow(O,\overset{\vartriangle}{O})$$

是 Ω-ag 短正合列.

证　根据定理 1 和定义 19 可证结果.

命题 1　$(F_R^i,C_i)(i\in I)$ 是平坦 Ω- 右 R- 模当且当 $\underset{i\in I}{\oplus}(F_R^i,C_i)$ 是平坦 Ω- 右 R- 模.

证　由于$(F_R^i,C_i)(\forall i\in I)$是平坦 Ω- 右 R- 模，当且当对任意 Ω-lm 正合列$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow({}_RM,A)\xrightarrow{f}({}_RN,B)$，其诱导同态 $0\longrightarrow(F_R^i,C_i)\underset{R}{\otimes}({}_RM,A)\xrightarrow{I_i\underset{R}{\otimes}f}(F_R^i,C_i)\underset{R}{\otimes}({}_RN,B)$ 是 Ω-ag 正合列，当且当$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow\underset{i\in I}{\oplus}((F_R^i,C_i)\underset{R}{\otimes}({}_RM,A))\xrightarrow{\underset{i\in I}{\oplus}(I_i\underset{R}{\otimes}f)}\underset{i\in I}{\oplus}((F_R^i,C_i)\underset{R}{\otimes}({}_RN,B))$ 是 Ω-ag 正合列，当且当$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow(\underset{i\in I}{\oplus}(F_R^i,C_i))\underset{R}{\otimes}({}_RM,A)\xrightarrow{(\underset{i\in I}{\oplus}I_i)\underset{R}{\otimes}f}(\underset{i\in I}{\oplus}(F_R^i,C_i))\underset{R}{\otimes}({}_RN,B)$ 是 Ω-ag 正合列，当且当 $\underset{i\in I}{\oplus}(F_R^i,C_i)$ 是平坦 Ω- 右 R- 模.

定理 4　$(F_R,C)\in Ob(M_R^r(\Omega))$ 是平坦 Ω- 右 R- 模当且当 $F_R\in Ob(M_R^r)$ 是平坦右 R- 模.

证　如果$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow({}_RM,A)\xrightarrow{f}({}_RN,B)$ 是 Ω-lm 正合列，根据引理 7，$O\longrightarrow{}_RM\xrightarrow{f}{}_RN$ 是左 R- 模正合列. 由于 $F_R\in Ob(M_R^r)$ 是平坦右 R- 模，所以 $O\longrightarrow F_R\underset{R}{\otimes}{}_RM\xrightarrow{1_F\underset{R}{\otimes}f}F_R\underset{R}{\otimes}{}_RN$ 是 Abel 群正合列. 再根据引理 7，有

$$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RM,A)\xrightarrow{1_F\underset{R}{\otimes}f}(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RN,B)$$

是 Ω-ag 正合列，所以$(F_R,C)\in Ob(M_R^r(\Omega))$ 是平坦 Ω- 右 R- 模.

反过来，如果 $O\longrightarrow{}_RM\xrightarrow{f}{}_RN$ 是左R- 模正合列，令 $B\in\Omega({}_RN)$，$A=Bf\in\Omega({}_RM)$，则$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow({}_RM,A)\xrightarrow{f}({}_RN,B)$ 是 Ω-lm 正合列. 由于$(F_R,C)\in Ob(M_R^r(\Omega))$ 是平坦 Ω- 右 R- 模，所以

$$(O,\overset{\vartriangle}{O})\longrightarrow(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RM,A)\xrightarrow{1_F\underset{R}{\otimes}f}(F_R,D)\underset{R}{\otimes}({}_RN,B)$$

是 Ω-ag 正合列. 根据引理 7，于是 $O\longrightarrow F_R\underset{R}{\otimes}{}_RM\xrightarrow{1_F\underset{R}{\otimes}f}F_R\underset{R}{\otimes}{}_RN$ 是 Abel 群正合列，因此 $F_R\in Ob(M_R^r)$ 是平坦右 R- 模.

定义 20[3]　设(X,A)是 Ω- 集合，称$((F,D),f)$为(X,A)在范畴 $M_R^l(\Omega)$ 中的自由 Ω- 模，其中$(F,D)\in Ob(M_R^l(\Omega))$，$f\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(\Omega)}((X,A),(F,D))$ 满足：对于任意$(M,B)\in Ob(M_R^l(\Omega))$，$f\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(\Omega)}((X,A),(F,D))$，则存在唯一的 $h\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}(\Omega)}((X,A),(F,D))$，使得 $g=h\circ f$，即下图交换：

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
(F,D) \arrow[r, "h"'] & (M,B)
\end{tikzcd}$$

定理 5[2-3]　$((F,D),f)$ 是 Ω- 集合(X,A)在范畴 $M_R^l(\Omega)$ 中的自由模当且当：

(i) $((F,D),f)$ 是 X 在左 R- 模范畴 M_R^l 中的自由模；

(ii) $D=\langle f(A)\rangle$.

由于自由右 R- 模是平坦右 R- 模，根据定理 4 可知：

推论 1　自由 Ω- 右 R- 模是平坦 Ω- 右 R- 模.

定义 21[10]　设 C 是范畴，$P\in Ob(C)$. 如果对范畴 C 中任意一个满态射 $f: A\longrightarrow B$，以及任意给定的态射 $g: P\longrightarrow A$，存在 f 在 B 上的扩张 $h: P\longrightarrow B$，即下图交换：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

则称 P 是范畴 C 中的一个投射对象.

定义 22[10]　设 C 是范畴，$A\in Ob(C)$，定义正变函子 $\mathrm{Hom}_C(A,-): C\longrightarrow \mathrm{Set}$ 为

$$B\longmapsto \mathrm{Hom}_C(A,-)(B)=\mathrm{Hom}_C(A,B)$$

$$(f: B\longrightarrow C)\longmapsto (\mathrm{Hom}_C(A,f): \mathrm{Hom}_C(A,C)\Rightarrow \mathrm{Hom}_C(A,B),\ g\longmapsto fg)$$

称为正变 Hom 函子，并且用 f^* 表示 $\mathrm{Hom}_C(A,f)$.

注 3　设 $(M,A),(N,B)\in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$. 不难验证 $\mathrm{Hom}_{M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)}((M,A),(N,B))$ 是加法交换群，因此是加法交换群范畴 AG 中的对象. 因此，$\mathrm{Hom}_{M_R^{l}(\Omega)}((M,A),-)$ 是 Ω-左 R-模范畴 $M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)$ 到加法交换群范畴 AG 的正变函子.

定理 6　设 $(P_R,C)\in Ob(M_R^{\mathrm{r}}(\Omega))$，则 (P_R,C) 是投射 Ω-右 R-模当且当 $\mathrm{Hom}_{M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)}((P_R,C),-)$ 是共变正合函子.

由于投射右 R-模是平坦右 R-模，根据定理 4 可知：

推论 2　投射 Ω-右 R-模是平坦 Ω-右 R-模.

定义 23[10]　设 C 是范畴，$I\in Ob(C)$，如果对范畴 C 中任意一个单态射 $f: A\longrightarrow B$，以及任意给定的态射 $g: A\longrightarrow I$，存在 f 在 B 上的扩张 $h: B\longrightarrow I$，即下图交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

则称 I 是范畴 C 中的一个内射对象.

定义 24[10]　设 C 是范畴，$A\in Ob(C)$，定义反变函子 $\mathrm{Hom}_C(-,A): C^{op}\longrightarrow \mathrm{Set}$ 为

$$B\longmapsto \mathrm{Hom}_C(-,A)(B)=\mathrm{Hom}_C(B,A),$$

$$(f: B\longrightarrow C)\longmapsto (\mathrm{Hom}_C(f,A): \mathrm{Hom}_C(C,A)\Rightarrow \mathrm{Hom}_C(B,A),\ g\longmapsto gf)$$

称为反变 Hom 函子，并且用 f^* 表示 $\mathrm{Hom}_C(f,A)$.

注 4　设 $(M,A),(N,B)\in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$. 不难验证 $\mathrm{Hom}_{M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)}((N,B),(M,A))$ 是加法交换群，因此是加法交换群范畴 AG 中的对象. 因此，$\mathrm{Hom}_{M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)}(-,(M,A))$ 是 Ω-左 R-模范畴 $M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)$ 到加法交换群范畴 AG 的反变函子.

定理 7　设 $(J,D)\in Ob(M_R^{\mathrm{l}}(\Omega))$，则 (J,D) 为内射 Ω-模当且当 $\mathrm{Hom}_{M_R^{\mathrm{l}}(\Omega)}((P_R,C),-)$ 是反变正合函子.

由于内射右 R-模是平坦右 R-模，根据定理 4 可知：

推论 3　内射 Ω-右 R-模是平坦 Ω-右 R-模.

参考文献：

[1]　汤建钢，胡卫敏. L-Fuzzy 半群范畴中的乘积运算［C］//第九届全国模糊系统理论及应用学术会议. 保定：中国系统工程学会，1998：239-242.

[2] TANG J G. Free L-Fuzzy Left R-Modules [J]. Fuzzy Systems and Mathematics，1994(1)：23-26.
[3] TANG J G，LUO M K，LIU M. Free Object in the Category of L-Fuzzy Left R-Modules Determined by L-Fuzzy Set [J]. Kybernetes，2009，38(3)：506-512.
[4] 高百俊，汤建钢. Ω-Abel 群范畴中的积与余积 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(12)：9-12.
[5] 张娟娟，汤建钢. Ω-左 R-模范畴的完备性 [J]. 数学的实践与认识，2013，43(23)：268-274.
[6] 汤建钢. L-Fuzzy 模范畴的张量积与张量函子 [J]. 模糊系统与数学，1995，9(3)：65-73.
[7] 任东燕，汤建钢. L-Fuzzy 模范畴中张量函子的正合性 [J]. 模糊系统与数学，2014，28(5)：4-10.
[8] 耿　俊，汤建钢. 范畴 $M_R^l(\Omega)$若干性质的研究 [J]. 数学的实践与认识，2019，49(12)：233-237.
[9] TANG J G. Invertibility of Morphisms in the Category of L-Fuzzy Left R-Modules [J]. Fuzzy Sets and System，1999，105(3)：503-507.
[10] BORCEUX F. Handbook of Categorical Algebra [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1994.
[11] 汤建钢，罗懋康，汤　娟. L-Fuzzy 集理论的范畴基础与层表示 [J]. 数学的实践与认识，2013，43(8)：254-274.
[12] 汤建钢，罗懋康，汤　娟. 基于群范畴的层结构、格值结构、L-Fuzzy 结构提升范畴及其关系 [J]. 模糊系统与数学，2014，28(2)：1-20.
[13] 夏伟洪，汤建钢. 具有左 R-模结构的类型及其范畴逻辑模型 [J]. 数学的实践与认识，2015，45(23)：260-270.
[14] AWODEY S. Category Theory [M]. Oxford：Oxford University Press，2006.
[15] 苏小霞，汤建钢，张凯强，等. Topos 中内蕴偏序对象与内蕴格对象之间关系的研究 [J]. 数学的实践与认识，2018，48(19)：228-234.
[16] 张凯强，汤建钢. 内蕴群范畴中的乘积性质 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2018，41(5)：635-640.
[17] 周欢欢，汤建钢，张凯强. 范畴与其内蕴幺半群范畴的乘积之间的关系 [J]. 数学的实践与认识，2018，48(9)：274-284.
[18] 苑呈涛，汤建钢. Ω-群范畴的等价刻画 [J]. 模糊系统与数学，2015，29(2)：39-44.

Research on the Flat Object in the Category of Ω-Left R-Modules

MA Xiao-jun，　TANG Jian-gang

College of Mathematics and Statistics，Yili Normal University，Yining Xinjiang 835000，China

Abstract：In this paper，we introduce the concept of category of Ω-left R-modules. Equivalent descriptions of the category of Ω-right R- modules is investigated. The product of a set of Ω-left R-modules is a flat object if and only if it is proved that every one is a flat object. A free Ω-left R-module，aproject Ω-left R-module and oraninject Ω-left R-module is proved to be a flat Ω-left R-module.

Key words：category of Ω-left R-module；tensor functor；exactness；flat object

责任编辑　廖　坤