

Ω -左 R -模范畴中的平坦对象研究

马晓君, 汤建钢

伊犁师范学院 数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000

摘要: 定义了 Ω -左 R -模范畴. 同理, 可定义 Ω -右 R -模范畴. 给出了平坦 Ω -左 R -模的概念, 研究了 Ω -左 R -模具有平坦性的等价刻画问题. 证明了: 自由 Ω -左 R -模、投射 Ω -左 R -模和内射 Ω -左 R -模均是平坦 Ω -左 R -模.

关键词: Ω -左 R -模范畴; 张量函子; 正合性; 平坦性

中图分类号: O159

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2020)12-0088-08

文献[1]引入了以双诱导映射为态射的 L -fuzzy 群范畴的概念, 并且讨论了该范畴中的乘积运算, 证明了该范畴对乘积运算是封闭的, 特别给出了 L -fuzzy 群范畴中的乘积与经典群范畴中的乘积之间的关系. 文献[2-9]引入了 L -fuzzy 左 R -模范畴的概念, 讨论了该范畴对乘积和上积运算的封闭性, 讨论了自由 L -fuzzy 左 R -模的性质、自由 L -fuzzy 左 R -模函子和遗忘 L -fuzzy 函子的伴随性以及 L -fuzzy 左 R -模范畴中的张量积和张量函子等问题.

本文引入了 Ω -左 R -模范畴和 Ω -右 R -模范畴的概念, 基于张量函子的正合性, 给出了平坦 Ω -左 R -模的概念, 讨论了 Ω -左 R -模具有平坦性的等价刻画, 证明了: 自由 Ω -左 R -模、投射 Ω -左 R -模和内射 Ω -左 R -模均是平坦 Ω -左 R -模.

1 预备知识

用 Set 表示集合范畴, 用 $T = \{ * \}$ 表示单点集, 则 T 是集合范畴的终对象.

定义 1^[10] 设 Ω 是一个五元组, $\Omega = (\Omega, \leq, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 并且满足:

(a) $(\Omega, \leq, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 是完备格;

(b) $a \wedge b \leq c$ 当且当 $b \leq a \rightarrow c$.

则称 Ω 是洛克, 也称为 Heyting 代数, 用 1 表示 Ω 中的最大元, 用 0 表示 Ω 中的最小元, 并且规定 $\vee \emptyset = 0$, $\wedge \emptyset = 1$, 其中 \emptyset 表示空集合.

定义 2^[11-12] 设 $X \in \text{Ob}(\text{Set})$ 是非空集合, $\Omega = (\Omega, \leq, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 是洛克, 映射 $A: X \rightarrow \Omega$ 称为 X 的 Ω -子集.

用 Ω^X 表示 X 的所有 Ω -子集的集合, 按点态方式定义, 容易验证 $\Omega^X = (\Omega^X, \leq, \wedge, \vee, \rightarrow)$ 也是洛克, 用 $\hat{\emptyset}, \hat{X}$ 分别表示它的最小值和最大值, 其中 $\hat{\emptyset}(x) = 0$, $\hat{X}(x) = 1$, 对任意的 $x \in X$ 都成立.

定义 3^[11-12] 设 $X \in \text{Ob}(\text{Set})$, $A \in \Omega^X$, 并且满足正规性, 即存在 $* \in X$ 使得 $A(*) = 1$, 则称偶序

(X, A) 是 Ω -集合.

定义 4^[11-12] 设 $(X, A), (Y, B), (Z, C)$ 是 Ω -集合,

(a) 若映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足 $A \leq Bf$, 则称 f 是由 (X, A) 到 (Y, B) 的 Ω -集映射, 记作 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$;

(b) 设 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B), g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$, 则 Ω -集映射的复合 $g \circ f: (X, A) \rightarrow (Z, C)$ 定义为通常映射的复合 $g \circ f: X \rightarrow Z$;

(c) 设 (X, A) 是 Ω -集合, 其单位 Ω -集映射 $1_{(X, A)} = 1_X$.

注 1 $A \leq B \circ f$ 等价于:

(a) 任意的 $x \in X$, 有 $A(x) \leq B(f(x))$;

(b) 对于任意的 $\alpha \in \Omega$, 任意的 $x \in A_\alpha$, 有 $f(x) \in B_\alpha$, 其中 $A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$ 称为 A 的水平集, $B_\alpha = \{y \in Y \mid B(y) \geq \alpha\}$;

(c) 对于任意的 $\alpha \in \Omega$, 有 $f(A_\alpha) \subseteq B_\alpha$;

(d) 对于任意的 $\alpha \in \Omega$, f 在 A_α 上的限制 $f_\alpha = f|_{A_\alpha}: A_\alpha \rightarrow B_\alpha$ 是一个集映射.

定义 5^[11-12] 以 Ω -集合作为对象, Ω 集映射作为态射, 构成一个范畴, 称为 Ω -集范畴, 记作 $\text{Set}(\Omega)$.

注 2 Ω -集范畴 $\text{Set}(\Omega)$ 的终对象记作 (T, \hat{T}) , 其中 T 为集范畴 Set 中的终对象, 即 $T = \{*\}$ 为单点集, 为方便起见, Ω -集范畴 $\text{Set}(\Omega)$ 的终对象也可用 T 表示.

用 M_R^1 表示左 R -模范畴, 左 R -模范畴 M_R^1 中的零对象(既是始对象也是终对象)记为 $O = \{0\}$, 其中 0 表示零元.

定义 6^[2] 设 Ω 是一个洛克, $M \in \text{Ob}(M_R^1)$, $A: M \rightarrow \Omega$ 是映射且满足:

(a) $A(0) = 1$;

(b) 对于任意的 $m, n \in M$, $A(m) \wedge A(n) \leq A(m+n)$;

(c) 对于任意的 $m \in M$, $A(m) \leq A(-m)$;

(d) 对于任意的 $r \in R, m \in M$, $A(m) \leq A(rm)$.

则称 A 为 M 的 Ω -子模, 称偶序 (M, A) 为 Ω -左 R -模, 简记为 $\Omega\text{-lm}$.

类似地, 可以定义 Ω -右 R -模($\Omega\text{-rm}$)的概念. Ω -左 R -模和 Ω -右 R -模统称为 Ω -模, 分别用 (M_R, A) 和 $({}_R M, A)$ 表示 $\Omega\text{-rm}$ 和 $\Omega\text{-lm}$ 以示区别, 我们定义 Ω -Abelian 群($\Omega\text{-ag}$)为 Ω -左 R -模或者 Ω -右 R -模.

设 $M \in \text{Ob}(M_R^1)$, 用 $\Omega(M)$ 表示 M 的 Ω -左 R -子模的全体.

引理 1^[2] 设 $A_i \in \Omega(M), i \in I$, 则:

(i) $\bigwedge_{i \in I} A_i \in \Omega(M)$;

(ii) $\bigoplus_{i \in I} A_i \in \Omega(M)$, 其中对于任意的 $m \in M, (\bigoplus_{i \in I} A_i)(m) = \vee \left\{ \bigwedge_{1 \leq k \leq p} A_{(i_k)}(m_k) \mid \sum_{k=1}^p x_k = m, p \in \mathbb{Z}_+, m_k \in M \right\}$.

引理 2^[2] 设 $f: M \rightarrow N \in \text{Mor}(M_R^1)$, 则:

(i) $A \in \Omega(M)$, 则 $f^+(A) \in \Omega(N)$;

(ii) $B \in \Omega(N)$, 则 $f^-(B) \in \Omega(M)$.

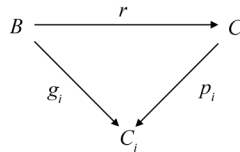
定义 7^[3] 设 $(M, A), (N, B)$ 是两个左 R -模, 若左 R -模同态 $f: M \rightarrow N$ 满足 $A \leq B \circ f$, 则称 f 是由 (M, A) 到 (N, B) 的 Ω -左 R -模同态, 简称为 $\Omega\text{-lm}$ 同态, 记作 $f: (M, A) \rightarrow (N, B)$.

定义 8^[3, 13] 以 Ω -左 R -模为对象, Ω -左 R -模同态为态射, 可构成一范畴, 称之为 Ω -左 R -模范畴, 记作 $M_R^1(\Omega)$.

同理, 可定义 Ω -右 R -模范畴, 记作 $M_R^r(\Omega)$, Ω -Abelian 群范畴记作 $\text{AG}(\Omega)$.

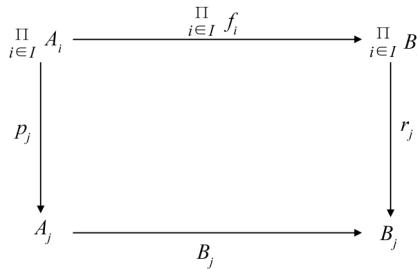
设 C 是一个范畴, 用 $\text{Ob}(C)$ 表示范畴 C 的对象类, $\text{Mor}(C)$ 表示范畴 C 的态射类.

定义 9^[14] 设 C 是一个范畴, $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq Ob(C)$ 是范畴 C 中的对象族, 则诸 C_i 的乘积为集合 $\{C, p_i, i \in I\}$, 其中 $C \in Ob(C)$, $p_i \in Mor(C, C_i)$, $i \in I$, 如果 $B \in Ob(C)$, $g_i \in Mor(B, C_i)$, $i \in I$, 则存在唯一的 $r \in Mor(B, C)$, 使得对任意 $i \in I$, 下图交换:



即对任意 $i \in I$, $p_i \circ r = g_i$. 若记 $r = (g_i)_{i \in I}$, 则对任意 $i \in I$, $p_i \circ ((g_i)_{i \in I}) = g_i$.

引理 3^[14-17] 设 C 是具有任意乘积的范畴, $\{f_i: A_i \rightarrow B_i \mid i \in I\}$ 是范畴 C 中的一族态射 (I 是任意指标集), $\{p_j: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j \mid j \in I\}$ 与 $\{r_j: \prod_{i \in I} B_i \rightarrow B_j \mid j \in I\}$ 分别是 $\{A_i\}_{i \in I}$ 与 $\{B_i\}_{i \in I}$ 的积, 则存在唯一的态射 $\prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ 使得下面的图交换:



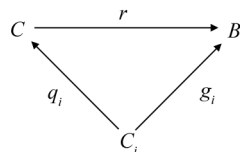
称该态射 $\prod_{i \in I} f_i$ 为态射族 $\{f_i\}_{i \in I}$ 的乘积.

引理 4^[5] 设 $(M_i, A_i) \in Ob(M_R^l(\Omega))$, $i \in I$, 令

$$\prod_{i \in I} M_i = \{\{x_i\} \mid x_i \in M_i, i \in I\} \quad \prod_{i \in I} A_i = \wedge_{i \in I} p_i^*(A_i) = \wedge_{i \in I} A_i p_i$$

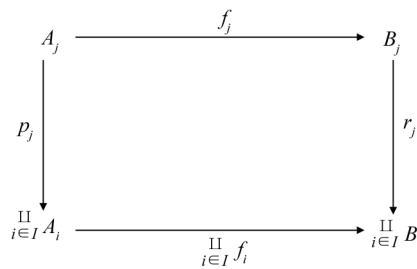
具体地, $(\prod_{i \in I} A_i)(\{x_i\}) = \wedge \{A_i(x_i) \mid x_i \in X_i, i \in I\}$, $p_j: \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$, $p_j(\{x_j\}) = x_j$, 则 $\{(\prod_{i \in I} M_i, \prod_{i \in I} A_i), p_i\}$ 是诸 (M_i, A_i) 在 Ω -左 R -模 $M_R^l(\Omega)$ 中的乘积.

定义 10^[14] 设 C 是一个范畴, $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq Ob(C)$ 是范畴 C 中的对象族, 则诸 C_i 的一个余积为集合 $\{C, q_i\}$, 其中 $C \in Ob(C)$, $q_i \in Mor(C_i, C)$, $i \in I$. 如果 $B \in Ob(C)$, $g_i \in Mor(C_i, B)$, $i \in I$, 则存在唯一的 $r \in Mor(C, B)$, 使得对任意 $i \in I$, 下图交换:



即对任意 $i \in I$, $r \circ q_i = g_i$. 若记 $r = [g_i]_{i \in I}$, 则对任意 $i \in I$, $([g_i]_{i \in I}) \circ q_i = g_i$.

引理 5^[14-17] 设 C 是具有任意余积的范畴, $\{f_i: A_i \rightarrow B_i \mid i \in I\}$ 是范畴 C 中的一族态射 (I 是任意指标集), $\{q_j: A_j \rightarrow \prod_{i \in I} A_i \mid j \in I\}$ 与 $\{s_j: B_j \rightarrow \prod_{i \in I} B_i \mid j \in I\}$ 分别是 $\{A_i\}_{i \in I}$ 与 $\{B_i\}_{i \in I}$ 的余积, 则存在唯一的态射 $\prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ 使得下面的图交换:



称该态射 $\coprod_{i \in I} f_i$ 为态射族 $\{f_i\}_{i \in I}$ 的余积.

引理 6^[5] 设 $(M_i, A_i) \in \text{Ob}(M_R^1(\Omega))$, $i \in I$, 令 $\coprod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $q_j: M_j \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$, $q_j(x) = x$, $\bigoplus_{i \in I} (A_i) = \bigvee_{i \in I} q_i^{-1}(A_i)$. 具体地, $(\bigoplus_{i \in I} A_i)(x) = A_j(x)$, 则 $\{(\bigoplus_{i \in I} M_i, \bigoplus_{i \in I} A_i), q_i\}$ 是诸 (M_i, A_i) 在 Ω -左 R -模 $M_R^1(\Omega)$ 中的余积.

定义 11^[4] 设 $f: (M, A) \longrightarrow (N, B) \in \text{Mor}(M_R^1(\Omega))$, 对任意 $y \in \text{im}f$, $(f \text{im}f)(y) = f(A)(y)$, 则 $f \text{im}f$ 是 $\text{im}f$ 的右 R -子模, 其中 $\text{im}f$ 是右 R -模同态 f 的像, 偶序 $(\text{im}f, f \text{im}f)$ 称为 Ω -lm 同态 f 的 Ω -像, 记作 $F \text{im}f$, 即 $F \text{im}f = (\text{im}f, f \text{im}f)$.

定义 12^[9] 设 $f: (M, A) \longrightarrow (N, B) \in \text{Mor}(M_R^1(\Omega))$, 对任意 $x \in \ker f$, $(f \ker f)(x) = f(A)(x)$, 则 $f \ker f$ 是 $\ker f$ 的右 R -子模, 其中 $\ker f$ 是右 R -模同态 f 的核, 偶序 $(\ker f, f \ker f)$ 称为 Ω -lm 同态 f 的 Ω -核, 记作 $F \ker f$, 即 $F \ker f = (\ker f, f \ker f)$.

定义 13^[9] Ω -lm 同态的一个序列是指形如

$$\cdots \rightarrow (M_{i-1}, A_{i-1}) \xrightarrow{f_{i-1}} (M_i, A_i) \xrightarrow{f_i} (M_{i+1}, A_{i+1}) \rightarrow \cdots$$

的图形, 这个序列称为 Ω -lm 正合列, 是指对任意 i , 有 $(\text{im}f_{i-1}, f \text{im}f_{i-1}) = (\ker f_i, f \ker f_i)$.

定义 14^[14] 设 C 是范畴, $f: A \longrightarrow B$ 是 C 中的态射. 如果对 C 中的任意一对平行态射 $g, h: C \longrightarrow A$ 使得 $fg = fh$, 有 $g = h$, 则称 f 是单态射(这时称 f 是左可约的). 对偶地, 定义 $f: A \longrightarrow B$ 是满态射当且当任意一对平行态射 $g, h: B \longrightarrow C$ 使得 $gf = hf$, 则有 $g = h$ (这时称 f 是右可约的). 如果 f 既是单态射又是满态射, 则称 f 是双态射.

引理 7^[6] 设 $(M, A) \xrightarrow{f} (N, B) \in \text{Mor}(M_R^1(\Omega))$, 则下列结论等价:

- (i) $(M, A) \xrightarrow{f} (N, B)$ 是单态射;
- (ii) $(O, \hat{O}) \longrightarrow (M, A) \xrightarrow{f} (N, B)$ 是 Ω -lm 正合列;
- (iii) 对任意 $\alpha \in \Omega$, $O \longrightarrow A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} B_\alpha$ 是左 R -模正合列;
- (iv) $M \xrightarrow{f} N$ 在左 R -模范畴 M_R^1 中是单同态, 且 $A \leq Bf$.

2 张量积与张量函子

定义 15^[6] 设 $M \in \text{Ob}(M_R^r)$, $A \in \Omega^M$, 令 $\langle A \rangle = \bigwedge \{B \mid A \leq B, B \in \Omega(M)\}$, 则称 $\langle A \rangle$ 是由 A 生成的 M 的 Ω -右 R -子模.

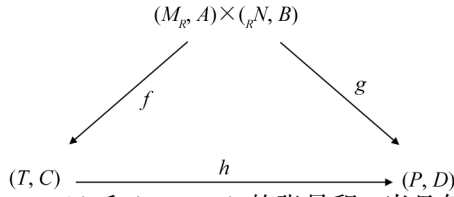
引理 8^[6] 设 $f: M \longrightarrow N \in \text{Mor}(M_R^r)$, $A \in \Omega^M$, 则 $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$.

定义 16^[6] 设 $(M_R, A) \in \text{Ob}(M_R^r(\Omega))$, $({}_R N, B) \in \text{Ob}(M_R^1(\Omega))$, (M_R, A) 与 $({}_R N, B)$ 的平衡乘积是指偶序 $((P, C), f)$, 其中 $(P, C) \in \text{Ob}(\text{AG}(\Omega))$, $f: M \times N \longrightarrow P$ 是通常映射, 并且满足以下条件:

- (a) (P, f) 是 M_R 与 ${}_R N$ 的平衡乘积;
- (b) f 是 $(M_R, A) \times ({}_R N, B)$ 到 (P, C) 的 Ω 集映射.

根据 Zadeh 扩张原理, 映射 $f: M \times N \longrightarrow P$ 可以诱导映射 $f: \Omega^M \times \Omega^N \longrightarrow \Omega^P$, 其中 $f(A, B)(z) = \bigvee \{A(x) \wedge B(y) \mid x \in M, y \in N, f(x, y) = z\}$. 所以 f 是 $(M_R, A) \times ({}_R N, B)$ 到 (P, C) 的 Ω 集合当且仅当 $f(A, B) \leq C$.

定义 17^[6] 设 $(M_R, A) \in \text{Ob}(M_R^r(\Omega))$, $({}_R N, B) \in \text{Ob}(M_R^1(\Omega))$, (M_R, A) 与 $({}_R N, B)$ 的张量积是指平衡乘积 $((T, C), f)$, 使得对于 (M_R, A) 与 $({}_R N, B)$ 的任意平衡乘积 $((P, D), g)$, 存在唯一的 $h \in \text{Hom}_{\text{AG}(\Omega)}((T, C), (P, D))$, 使得 $h \circ f = g$, 即下图交换:



引理 9^[6] $((T, C), f)$ 是 (M_R, A) 和 $({}_R N, B)$ 的张量积, 当且仅当:

- (i) (T, f) 是 M_R 和 ${}_R N$ 的张量积;
- (ii) $C = \langle f(A, B) \rangle$.

设 $(M_R, A) \in Ob(M_R^r(\Omega)), ({}_R N, B) \in Ob(M_R^l(\Omega))$, 则 $M_R \in Ob(M_R^r(\Omega)), {}_R N \in Ob(M_R^l(\Omega))$. 由张量积的存在性定理, $(M \otimes_R N, \otimes)$ 是 M_R 与 ${}_R N$ 的张量积. 令 $A \otimes B = \langle \otimes(A, B) \rangle$, 由引理 2 可知, $((M \otimes_R N, A \otimes B), \otimes)$ 是 (M_R, A) 与 $({}_R N, B)$ 的张量积. 于是有以下引理:

引理 10^[6] 设 $(M_R, A) \in Ob(M_R^r(\Omega)), ({}_R N, B) \in Ob(M_R^l(\Omega))$, 则 $((M_R \otimes_R N, A \otimes B), \otimes)$ 是 (M_R, A) 与 $({}_R N, B)$ 的张量积.

引理 11 设 $(M_R^i, A_i) \in Ob(M_R^r(\Omega))(i \in I), ({}_R N, B) \in Ob(M_R^l(\Omega))$, 则有同构

$$\bigoplus_{i \in I} ((M_R^i, A_i) \otimes_R ({}_R N, B)) \cong (\bigoplus_{i \in I} (M_R^i, A_i)) \otimes_R ({}_R N, B)$$

定义 18^[7] 任意取定 $(M_R, A) \in Ob(M_R^r(\Omega))$, 定义张量函子

$$(M_R, A) \otimes_R -: M_R^l(\Omega) \longrightarrow AG(\Omega)$$

对于任意 $({}_R N, B) \in Ob(M_R^l(\Omega))$,

$$(M_R, A) \otimes_R -: ({}_R N, B) \longmapsto (M_R, A) \otimes_R ({}_R N, B)$$

对于任意 $({}_R N, B) \xrightarrow{f} ({}_R P, C) \in Mor(M_R^l(\Omega))$,

$$(M_R, A) \otimes_R -: f \longmapsto 1_M \otimes_R f \in Hom_{AG(\Omega)}((M_R, A) \otimes_R ({}_R N, B), (M_R, A) \otimes_R ({}_R P, C))$$

容易验证 $(M_R, A) \otimes_R -: M_R^l(\Omega) \longrightarrow AG(\Omega)$ 为加法共变函子.

同理, 对于取定的 $({}_R N, B) \in Ob(M_R^l(\Omega))$, 可定义张量函子

$$- \otimes_R ({}_R N, B): M_R^r(\Omega) \longrightarrow AG(\Omega)$$

同样也是加法共变函子.

定理 1^[7] 对每一个 $(M_R, A) \in Ob(M_R^r(\Omega))$, 张量函子 $(M_R, A) \otimes_R -$ 是右正合函子.

定理 2^[7] 对每一个 $({}_R N, B) \in Ob(M_R^l(\Omega))$, 张量函子 $- \otimes_R ({}_R N, B)$ 是左正合函子.

3 主要结果

定义 19 设 $(F_R, C) \in Ob(M_R^r(\Omega))$, 如果张量函子 $(F_R, C) \otimes_R -$ 是右正合函子, 则称 (F_R, C) 是平坦 Ω -右 R -模. 类似可定义平坦 Ω -左 R -模.

以下讨论平坦 Ω -右 R -模的等价刻画, 平坦 Ω -左 R -模可类似地讨论.

定理 3^[18] 设 $(F_R, C) \in Ob(M_R^r(\Omega))$, 则以下结论等价:

- (i) (F_R, C) 是平坦 Ω -右 R -模;
- (ii) 如果 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_R M, A) \xrightarrow{f} ({}_R N, B)$ 是 Ω -lm 正合列, 则

$$(O, \hat{O}) \longrightarrow (F_R, D) \otimes_R ({}_R M, A) \xrightarrow{1_F \otimes_R f} (F_R, D) \otimes_R ({}_R N, B)$$

是 Ω -ag 正合列;

- (iii) 如果 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_R M, A) \xrightarrow{f} ({}_R N, B) \xrightarrow{g} ({}_R U, C) \longrightarrow (O, \hat{O})$ 是 Ω -lm 短正合列, 则

$(O, \hat{O}) \longrightarrow (F_R, D) \otimes_R ({}_R M, A) \xrightarrow{1_F \otimes_R f} (F_R, D) \otimes_R ({}_R N, B) \xrightarrow{1_F \otimes_R g} (F_R, D) \otimes_R ({}_R U, C) \longrightarrow (O, \hat{O})$
 是 Ω -ag 短正合列.

证 根据定理 1 和定义 19 可证结果.

命题 1 $(F_R^i, C_i) (i \in I)$ 是平坦 Ω -右 R -模当且当 $\bigoplus_{i \in I} (F_R^i, C_i)$ 是平坦 Ω -右 R -模.

证 由于 $(F_R^i, C_i) (\forall i \in I)$ 是平坦 Ω -右 R -模, 当且当对任意 Ω -lm 正合列 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_R M, A) \xrightarrow{f} ({}_R N, B)$, 其诱导同态 $0 \longrightarrow (F_R^i, C_i) \otimes_R ({}_R M, A) \xrightarrow{I_i \otimes_R f} (F_R^i, C_i) \otimes_R ({}_R N, B)$ 是 Ω -ag 正合列, 当且当 $(O, \hat{O}) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} ((F_R^i, C_i) \otimes_R ({}_R M, A)) \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} (I_i \otimes_R f)} \bigoplus_{i \in I} ((F_R^i, C_i) \otimes_R ({}_R N, B))$ 是 Ω -ag 正合列, 当且当 $(O, \hat{O}) \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I} (F_R^i, C_i)) \otimes_R ({}_R M, A) \xrightarrow{(\bigoplus_{i \in I} I_i) \otimes_R f} (\bigoplus_{i \in I} (F_R^i, C_i)) \otimes_R ({}_R N, B)$ 是 Ω -ag 正合列, 当且当 $\bigoplus_{i \in I} (F_R^i, C_i)$ 是平坦 Ω -右 R -模.

定理 4 $(F_R, C) \in Ob(M_R^r(\Omega))$ 是平坦 Ω -右 R -模当且当 $F_R \in Ob(M_R^r)$ 是平坦右 R -模.

证 如果 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_R M, A) \xrightarrow{f} ({}_R N, B)$ 是 Ω -lm 正合列, 根据引理 7, $O \longrightarrow {}_R M \xrightarrow{f} {}_R N$ 是左 R -模正合列. 由于 $F_R \in Ob(M_R^r)$ 是平坦右 R -模, 所以 $O \longrightarrow F_R \otimes_R M \xrightarrow{1_F \otimes_R f} F_R \otimes_R N$ 是 Abel 群正合列. 再根据引理 7, 有

$$(O, \hat{O}) \longrightarrow (F_R, D) \otimes_R ({}_R M, A) \xrightarrow{1_F \otimes_R f} (F_R, D) \otimes_R ({}_R N, B)$$

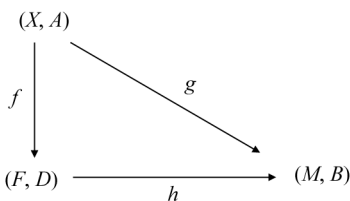
是 Ω -ag 正合列, 所以 $(F_R, C) \in Ob(M_R^r(\Omega))$ 是平坦 Ω -右 R -模.

反过来, 如果 $O \longrightarrow {}_R M \xrightarrow{f} {}_R N$ 是左 R -模正合列, 令 $B \in \Omega({}_R N), A = Bf \in \Omega({}_R M)$, 则 $(O, \hat{O}) \longrightarrow ({}_R M, A) \xrightarrow{f} ({}_R N, B)$ 是 Ω -lm 正合列. 由于 $(F_R, C) \in Ob(M_R^r(\Omega))$ 是平坦 Ω -右 R -模, 所以

$$(O, \hat{O}) \longrightarrow (F_R, D) \otimes_R ({}_R M, A) \xrightarrow{1_F \otimes_R f} (F_R, D) \otimes_R ({}_R N, B)$$

是 Ω -ag 正合列. 根据引理 7, 于是 $O \longrightarrow F_R \otimes_R M \xrightarrow{1_F \otimes_R f} F_R \otimes_R N$ 是 Abel 群正合列, 因此 $F_R \in Ob(M_R^r)$ 是平坦右 R -模.

定义 20^[3] 设 (X, A) 是 Ω -集合, 称 $((F, D), f)$ 为 (X, A) 在范畴 $M_R^1(\Omega)$ 中的自由 Ω -模, 其中 $(F, D) \in Ob(M_R^1(\Omega)), f \in \text{Hom}_{\text{Set}(\Omega)}((X, A), (F, D))$ 满足: 对于任意 $(M, B) \in Ob(M_R^1(\Omega)), g \in \text{Hom}_{\text{Set}(\Omega)}((X, A), (M, B))$, 则存在唯一的 $h \in \text{Hom}_{\text{Set}(\Omega)}((F, D), (M, B))$, 使得 $g = h \circ f$, 即下图交换:



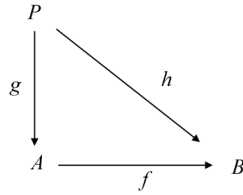
定理 5^[2-3] $((F, D), f)$ 是 Ω -集合 (X, A) 在范畴 $M_R^1(\Omega)$ 中的自由模当且当:

- (i) $((F, D), f)$ 是 X 在左 R -模范畴 M_R^1 中的自由模;
- (ii) $D = \langle f(A) \rangle$.

由于自由右 R -模是平坦右 R -模, 根据定理 4 可知:

推论 1 自由 Ω -右 R -模是平坦 Ω -右 R -模.

定义 21^[10] 设 C 是范畴, $P \in Ob(C)$. 如果对范畴 C 中任意一个满态射 $f: A \rightarrow B$, 以及任意给定的态射 $g: P \rightarrow A$, 存在 f 在 B 上的扩张 $h: P \rightarrow B$, 即下图交换:



则称 P 是范畴 C 中的一个投射对象.

定义 22^[10] 设 C 是范畴, $A \in Ob(C)$, 定义正变函子 $Hom_C(A, -): C \rightarrow Set$ 为

$$B \mapsto Hom_C(A, -)(B) = Hom_C(A, B)$$

$$(f: B \rightarrow C) \mapsto (Hom_C(A, f): Hom_C(A, C) \Rightarrow Hom_C(A, B), g \mapsto fg)$$

称为正变 Hom 函子, 并且用 f^* 表示 $Hom_C(A, f)$.

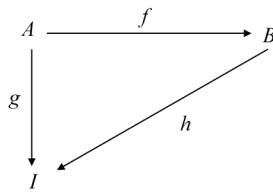
注 3 设 $(M, A), (N, B) \in Ob(M_R^1(\Omega))$. 不难验证 $Hom_{M_R^1(\Omega)}((M, A), (N, B))$ 是加法交换群, 因此是加法交换群范畴 AG 中的对象. 因此, $Hom_{M_R^1(\Omega)}((M, A), -)$ 是 Ω -左 R -模范畴 $M_R^1(\Omega)$ 到加法交换群范畴 AG 的正变函子.

定理 6 设 $(P_R, C) \in Ob(M_R^1(\Omega))$, 则 (P_R, C) 是投射 Ω -右 R -模当且当 $Hom_{M_R^1(\Omega)}((P_R, C), -)$ 是共变正合函子.

由于投射右 R -模是平坦右 R -模, 根据定理 4 可知:

推论 2 投射 Ω -右 R -模是平坦 Ω -右 R -模.

定义 23^[10] 设 C 是范畴, $I \in Ob(C)$, 如果对范畴 C 中任意一个单态射 $f: A \rightarrow B$, 以及任意给定的态射 $g: A \rightarrow I$, 存在 f 在 B 上的扩张 $h: B \rightarrow I$, 即下图交换:



则称 I 是范畴 C 中的一个内射对象.

定义 24^[10] 设 C 是范畴, $A \in Ob(C)$, 定义反变函子 $Hom_C(-, A): C^{op} \rightarrow Set$ 为

$$B \mapsto Hom_C(-, A)(B) = Hom_C(B, A),$$

$$(f: B \rightarrow C) \mapsto (Hom_C(f, A): Hom_C(C, A) \Rightarrow Hom_C(B, A), g \mapsto gf)$$

称为反变 Hom 函子, 并且用 f^* 表示 $Hom_C(f, A)$.

注 4 设 $(M, A), (N, B) \in Ob(M_R^1(\Omega))$. 不难验证 $Hom_{M_R^1(\Omega)}((N, B), (M, A))$ 是加法交换群, 因此是加法交换群范畴 AG 中的对象. 因此, $Hom_{M_R^1(\Omega)}(-, (M, A))$ 是 Ω -左 R -模范畴 $M_R^1(\Omega)$ 到加法交换群范畴 AG 的反变函子.

定理 7 设 $(J, D) \in Ob(M_R^1(\Omega))$, 则 (J, D) 为内射 Ω -模当且当 $Hom_{M_R^1(\Omega)}((P_R, C), -)$ 是反变正合函子.

由于内射右 R -模是平坦右 R -模, 根据定理 4 可知:

推论 3 内射 Ω -右 R -模是平坦 Ω -右 R -模.

参考文献:

[1] 汤建钢, 胡卫敏. L-Fuzzy 半群范畴中的乘积运算 [C] // 第九届全国模糊系统理论及应用学术会议. 保定: 中国系统工程学会, 1998: 239-242.

- [2] TANG J G. Free L -Fuzzy Left R -Modules [J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 1994(1): 23-26.
- [3] TANG J G, LUO M K, LIU M. Free Object in the Category of L -Fuzzy Left R -Modules Determined by L -Fuzzy Set [J]. *Kybernetes*, 2009, 38(3): 506-512.
- [4] 高百俊, 汤建钢. Ω -Abel 群范畴中的积与余积 [J]. *西南师范大学学报(自然科学版)*, 2013, 38(12): 9-12.
- [5] 张娟娟, 汤建钢. Ω -左 R -模范畴的完备性 [J]. *数学的实践与认识*, 2013, 43(23): 268-274.
- [6] 汤建钢. L -Fuzzy 模范畴的张量积与张量函子 [J]. *模糊系统与数学*, 1995, 9(3): 65-73.
- [7] 任东燕, 汤建钢. L -Fuzzy 模范畴中张量函子的正合性 [J]. *模糊系统与数学*, 2014, 28(5): 4-10.
- [8] 耿俊, 汤建钢. 范畴 $M_r^1(\Omega)$ 若干性质的研究 [J]. *数学的实践与认识*, 2019, 49(12): 233-237.
- [9] TANG J G. Invertibility of Morphisms in the Category of L -Fuzzy Left R -Modules [J]. *Fuzzy Sets and System*, 1999, 105(3): 503-507.
- [10] BORCEUX F. *Handbook of Categorical Algebra* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [11] 汤建钢, 罗懋康, 汤娟. L -Fuzzy 集理论的范畴基础与层表示 [J]. *数学的实践与认识*, 2013, 43(8): 254-274.
- [12] 汤建钢, 罗懋康, 汤娟. 基于群范畴的层结构、格值结构、 L -Fuzzy 结构提升范畴及其关系 [J]. *模糊系统与数学*, 2014, 28(2): 1-20.
- [13] 夏伟洪, 汤建钢. 具有左 R -模结构的类型及其范畴逻辑模型 [J]. *数学的实践与认识*, 2015, 45(23): 260-270.
- [14] AWODEY S. *Category Theory* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- [15] 苏小霞, 汤建钢, 张凯强, 等. Topos 中内蕴偏序对象与内蕴格对象之间关系的研究 [J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(19): 228-234.
- [16] 张凯强, 汤建钢. 内蕴群范畴中的乘积性质 [J]. *四川师范大学学报(自然科学版)*, 2018, 41(5): 635-640.
- [17] 周欢欢, 汤建钢, 张凯强. 范畴与其内蕴么半群范畴的乘积之间的关系 [J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(9): 274-284.
- [18] 苑呈涛, 汤建钢. Ω -群范畴的等价刻画 [J]. *模糊系统与数学*, 2015, 29(2): 39-44.

Research on the Flat Object in the Category of Ω -Left R -Modules

MA Xiao-jun, TANG Jian-gang

College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China

Abstract: In this paper, we introduce the concept of category of Ω -left R -modules. Equivalent descriptions of the category of Ω -right R -modules is investigated. The product of a set of Ω -left R -modules is a flat object if and only if it is proved that every one is a flat object. A free Ω -left R -module, a project Ω -left R -module and an inject Ω -left R -module is proved to be a flat Ω -left R -module.

Key words: category of Ω -left R -module; tensor functor; exactness; flat object

责任编辑 廖坤