第42卷第12期　　西南大学学报(自然科学版)　　2020年12月
Vol. 42　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2020

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.12.012

圆域上二阶椭圆特征值问题的一种高效有限元方法

杨　敏，　安　静

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：针对圆域上的二阶椭圆特征值问题，提出了一种基于降维格式的有限元方法. 首先，利用极坐标变换，将原问题转化为一系列的一维特征值问题. 对每个一维特征值问题，引入适当的Sobolev空间，推导出其弱形式和相应的离散格式. 其次，利用紧算子的谱理论和插值算子的逼近性质证明了逼近特征值和特征值向量的误差估计. 最后，给出一些数值例子，数值结果表明该算法是非常有效的.

关　键　词：二阶椭圆特征值问题；降维格式；有限元方法；误差估计；圆形区域

中图分类号：**O174**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2020)12-0096-07

特征值问题有着重要的物理背景，它在量子力学、流体力学和随机过程等方面有着广泛的应用[1-5]. 关于特征值问题的数值计算，主要的方法有有限元方法[6-9]、有限差分法[10]、三角域谱方法[11-15]等. 然而，对于圆域上的特征值问题，由于涉及曲边边界，要获得高精度的数值解，通常的有限元方法需要花费大量的计算时间和内存容量. 因此，提出圆形区域上二阶椭圆特征值问题的一些高精度的数值算法是有意义的，作为一个模型问题，我们考虑下面的二阶椭圆特征值问题：

$$\begin{cases}-\Delta u+\beta u=\lambda u & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中β是非负常数，Ω是圆盘区域或圆环区域，$\partial\Omega$为区域Ω的边界. 如何用有限元方法有效地求解这些特殊区域上的二阶椭圆特征值问题？据我们所知，很少有相关的研究和报道. 因此，本文针对圆域上二阶椭圆特征值问题，提出了一种基于降维格式的有限元方法. 首先，利用极坐标变换，将原问题转化为一系列的一维特征值问题. 对每个一维特征值问题，引入了适当的Sobolev空间，推导了弱形式和相应的离散格式. 其次，利用紧算子的谱理论和插值算子的逼近性质证明了逼近特征值和特征值向量的误差估计. 最后，我们给出了一些数值例子，数值结果表明我们的算法是非常有效的.

本文的组织如下：在第1部分，推导了二阶椭圆特征值问题的降维格式；在第2部分，推导了弱形式和相应的离散格式；在第3部分，证明了逼近特征值和特征向量的误差估计；在第4部分，详细描述了算法的有效实现；在第5部分，给出了一些数值算例.

1　降维格式和极条件

设$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2: R_1<|x|<R_2\}$，其中$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. 定义微分算子：

收稿日期：2020-03-17

基金项目：国家自然科学基金项目(11661022)；贵州省科学技术基金项目([2018]5769-01).

作者简介：杨　敏(1996-)，女，硕士研究生，主要从事偏微分方程数值解的研究.

通信作者：安　静，教授.

$$Lv=\frac{1}{r}(rv_r)_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}$$

则当 $R_1=0$ 时，由极坐标变换：$x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$，方程(1) 可化为

$$\begin{cases}-L\psi+\beta\psi=\lambda\psi & (r,\theta)\in Q\\ \psi(R_2,\theta)=0 & \theta\in[0,2\pi)\end{cases}\tag{2}$$

其中 $Q=(0,R_2)\times[0,2\pi)$，$\psi(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$. 由于 ψ 在 θ 方向上是以 2π 为周期的，则由傅里叶基函数展开得

$$\psi(r,\theta)=\sum_{|m|=0}^{\infty}\tilde{\psi}_m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\tag{3}$$

由(3) 式我们有

$$L\psi=\sum_{|m|=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left((r\tilde{\psi}_m')'-\frac{m^2}{r}\tilde{\psi}_m\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\tag{4}$$

使得(4) 式有意义的本质极条件为

$$m\tilde{\psi}_m\mid_{r=0}=0$$

即

$$\tilde{\psi}_m(0)=0\qquad |m|\geqslant 1$$

令

$$l_mv=\frac{1}{r}(rv_r)_r-\frac{m^2}{r^2}v$$

将(3) 式代入(2) 式，对于每一个傅里叶模 m，我们可得到一系列等价的一维特征值问题：

$$l_m\tilde{\psi}_m+\beta\tilde{\psi}_m=\lambda_m\tilde{\psi}_m\qquad r\in(0,R_2)\tag{5}$$

$$\tilde{\psi}_m(R_2)=0\qquad m=0\tag{6}$$

$$\tilde{\psi}_m(0)=\tilde{\psi}_m(R_2)=0\qquad |m|\geqslant 1\tag{7}$$

令 $r=x$，$u_m(x)=\tilde{\psi}_m$. 那么(5)－(7) 式等价于

$$\begin{cases}-u_0''-\dfrac{1}{x}u_0'+\beta u_0=\lambda_0u_0 & x\in(0,R_2)\\ u_0(R_2)=0\end{cases}\tag{8}$$

和

$$\begin{cases}-u_m''-\dfrac{1}{x}u_m'+\dfrac{m^2}{x^2}u_m+\beta u_m=\lambda_mu_m & x\in(0,R_2)\\ u_m(0)=u_m(R_2)=0\end{cases}\tag{9}$$

其中，$|m|\geqslant 1$.

对于 $R_1>0$，类似于 $R_1=0$ 的推导，方程(1) 等价于

$$\begin{cases}-u_m''-\dfrac{1}{x}u_m'+\dfrac{m^2}{x^2}u_m+\beta u_m=\lambda_mu_m & x\in(R_1,R_2)\\ u_m(R_1)=u_m(R_2)=0\end{cases}\tag{10}$$

2　弱形式和离散格式

这一部分我们将推导弱形式和相应的离散格式，我们只考虑 $m\geqslant 0$ 的情形，$m<0$ 的情况可以类似地推导. 定义通常的带权 Sobolev 空间

$$L_\omega^2(I)=\left\{u:\int_I\omega u^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

相应的内积和范数分别为

$$(u, v)_\omega = \int_I \omega u v \mathrm{d}x \qquad \| u \|_w = \left(\int_I \omega u^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\omega = x$ 是权函数, $I = (R_1, R_2)$. 当 $R_1 = 0$ 时, 再引入非一致带权 Sobolev 空间 $H^1_{0,\omega,m}(I)$:

$$H^1_{0,\omega,0}(I) = \{u: \partial^k_x u \in L^2_\omega(I);\ k = 0, 1;\ u(R_2) = 0\}$$

$$H^1_{0,\omega,m}(I) = \{u: \partial^k_x u \in L^2_{\omega^{2k-1}}(I);\ k = 0, 1;\ u(0) = u(R_2) = 0\} \qquad m \geqslant 1$$

相应的内积和范数分别为

$$(u, v)_{1,\omega,0} = \sum_{k=0}^{1} (\partial^k_x u, \partial^k_x v)_\omega \qquad \| u \|_{1,\omega,0} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{1,\omega,0}$$

$$(u, v)_{1,\omega,m} = \sum_{k=0}^{1} (\partial^k_x u, \partial^k_x v)_{\omega^{2k-1}} \qquad \| u \|_{1,\omega,m} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{1,\omega,m}$$

则(8)-(9)式的弱形式为: 找 $(\lambda_m, u_m) \in \mathbb{R} \times H^1_{0,\omega,m}(I)$, 使得

$$a_m(u_m, v) = \lambda_m b_m(u_m, v) \qquad \forall v \in H^1_{0,\omega,m}(I) \tag{11}$$

其中

$$a_m(u_m, v) = \int_I \left(x u'_m v' + \frac{m^2}{x} u_m v + \beta x u_m v\right) \mathrm{d}x$$

$$b_m(u_m, v) = \int_I x u_m v \mathrm{d}x$$

对于 $R_1 > 0$ 的情况, 引入下面的 Sobolev 空间:

$$H^1_0(I) = \{u: \partial^k_x u \in L^2(I);\ k = 0, 1;\ u(R_1) = u(R_2) = 0\}$$

相应的内积和范数分别为

$$(u, v)_{1,I} = \sum_{k=0}^{1} (\partial^k_x u, \partial^k_x v) \qquad \| u \|_{1,I} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{1,I}$$

则(10)式的弱形式为: 找 $(\lambda_m, u_m) \in \mathbb{R} \times H^1_0(I)$, 使得

$$a_m(u_m, v) = \lambda_m b_m(u_m, v) \qquad \forall v \in H^1_0(I) \tag{12}$$

现在定义有限元逼近空间 $S_h(m) = U_h \cap H^1_{0,\omega,m}(I)$ 和 $\overline{S}_h = U_h \cap H^1_0(I)$, 其中 U_h 表示分片线性插值函数空间, 则(11)式的离散格式为: 找 $(\lambda_{mh}, u_{mh}) \in \mathbb{R} \times S_h(m)$, 使得

$$a_m(u_{mh}, v_h) = \lambda_{mh} b_m(u_{mh}, v_h) \qquad \forall v_h \in S_h(m) \tag{13}$$

(12)式的离散格式为: 找 $(\lambda_{mh}, u_{mh}) \in \mathbb{R} \times \overline{S}_h$, 使得

$$a_m(u_{mh}, v_h) = \lambda_{mh} b_m(u_{mh}, v_h) \qquad \forall v_h \in \overline{S}_h \tag{14}$$

3 逼近特征值的误差估计

为了简便起见, 我们仅对 $R_1 > 0$ 的情况给出误差分析. 对于 $R_1 = 0$ 的情况能够类似地推导. 我们用 $a \lesssim b$ 表示 $a \leqslant Cb$, 其中 C 为正常数.

定理 1 $a_m(u, v)$ 是定义在 $H^1_0(I) \times H^1_0(I)$ 上的正定连续的双线性形式, 即

$$| a_m(u, v) | \lesssim \| u \|_{1,I} \| v \|_{1,I} \qquad a_m(u, u) \gtrsim \| u \|^2_{1,I}$$

证 由于 $x \in (R_1, R_2)$, 则由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$| a_m(u, v) | = \left| \int_I \left(x u' v' + \frac{m^2}{x} u v + \beta x u v\right) \mathrm{d}x \right| \lesssim \int_I \left(x \mid u' v' \mid + \frac{1}{x} \mid uv \mid + x \mid uv \mid\right) \mathrm{d}x \lesssim$$

$$\int_I (| u' v' | + | uv |) \mathrm{d}x \lesssim \left[\int_I ((u')^2 + u^2) \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_I ((v')^2 + v^2) \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\| u \|_{1,I} \| v \|_{1,I}$$

$$a_m(u, u) = \int_I \left(x u' u' + \frac{m^2}{x} uv + \beta x uu\right) \mathrm{d}x \gtrsim \int_I ((u')^2 + u^2) \mathrm{d}x = \| u \|^2_{1,I}$$

类似于定理 1 的证明, 我们可得:

定理 2　$b(u,v)$ 是定义在 $L^2(I)\times L^2(I)$ 上的正定连续的双线性形式，即

$$|b(u,v)|\lesssim\|u\|\,\|v\|\qquad b(u,u)\gtrsim\|u\|^2$$

假设 $V(\lambda_m)$ 和 $V(\lambda_{mh})$ 分别为 λ_m 和 λ_{mh} 相应的特征函数空间．令

$$\varepsilon_h=\sup_{u_m\in V(\lambda_m),\ \|u_m\|_{a_m}=1}\ \inf_{v_{mh}\in\bar{S}_h}\|u_m-v_{mh}\|_{a_m}\tag{15}$$

其中

$$\|u_m\|_{a_m}=\sqrt{a_m(u_m,u_m)}$$

由于 $H_0^1(I)$ 紧嵌入 $L^2(I)$，那么由定理 1 和定理 2 以及自共轭正定特征值问题的谱理论有下面的定理：

定理 3　令(λ_m,u_m)和(λ_{mh},u_{mh})分别为(12)式和(14)式的特征对，则有

$$\|u_m-u_{mh}\|_{a_m}\lesssim\varepsilon_h\qquad\lambda_m-\lambda_{mh}\lesssim\varepsilon_h^2\tag{16}$$

定义插值投影 $I_hu:H_0^1(I)\longrightarrow U_h$，根据文献[16]中的分段线性插值理论，有下面的定理：

定理 4　对于 $u\in H_0^1(I)$，如果 $u(x)$ 在区间 I 上有连续导数，则

$$\|I_hu-u\|_{1,I}\lesssim h\tag{17}$$

定理 5　令(λ_m,u_m)和(λ_{mh},u_{mh})分别是(12)式和(14)式的特征对，则有

$$\|u_m-u_{mh}\|_{a_m}\lesssim h\qquad\lambda_{mh}-\lambda_m\lesssim h^2\tag{18}$$

证　由于

$$\varepsilon_h=\sup_{u_m\in V(\lambda_m),\ \|u_m\|_{a_m}=1}\ \inf_{v_{mh}\in\bar{S}_h}\|u_m-v_{mh}\|_{a_m}\leqslant\sup_{u_m\in V(\lambda_m),\ \|u_m\|_{a_m}=1}\|u_m-I_hu_m\|_{a_m}\lesssim$$
$$\sup_{u_m\in V(\lambda_m),\ \|u_m\|_{a_m}=1}\|u_m-I_hu_m\|_{1,I}$$

结合定理 3 和定理 4 可得(18)式．

4　算法的有效实现

在这一部分，我们将给出如何求解(13)式和(14)式的方法．构造一组山形基函数：

$$\varphi_0=\begin{cases}1-\dfrac{x-x_0}{h_1} & x_0\leqslant x\leqslant x_1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x-x_i}{h_i} & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\\ 1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}} & x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

其中 $i=1,\cdots,n-1$．则有

$$S_h(0)=\mathrm{span}\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)\}$$
$$S_h(m)=\bar{S}_h(m)=\mathrm{span}\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x)\}$$

当 $R_1=0$，$m=0$ 时，令

$$u_{0h}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}u_i^0\varphi_i(x)\tag{19}$$

将表达式(19)代入(13)式，然后让 v_h 取遍 $S_h(0)$ 中的基函数，得到以下的线性特征值系统：

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{U}^0=\lambda_{0h}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}^0\tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0=(a_{ij}^0)\qquad\boldsymbol{B}_0=(b_{ij}^0)\qquad\boldsymbol{U}^0=(u_0^0,u_1^0,\cdots,u_{n-1}^0)^{\mathrm{T}}$$
$$a_{ij}^0=a_0(\varphi_j(x),\varphi_i(x))\qquad b_{ij}^0=b_0(\varphi_j(x),\varphi_i(x))$$

类似地，当 $R_1=0$，$m\geqslant1$ 和 $R_1>0$ 时，可分别得到下面相应的线性特征值系统：

$$\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{U}^m=\lambda_{mh}\boldsymbol{D}_m\boldsymbol{U}^m\qquad\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{U}^m=\lambda_{mh}\boldsymbol{F}_m\boldsymbol{U}^m\tag{21}$$

由山形基函数的性质可知(20)式和(21)式中的刚度矩阵和质量矩阵都是三对角的稀疏矩阵．

5 数值实验

为了表明算法的有效性，我们进行了一系列的数值实验，在 MATLAB R2016b 平台上进行编程计算.

例 1 取 $R_1=0$，$R_2=1$，$\beta=1$ 和 $m=0,1$. 对于不同的 m 和 h，前 4 个特征值的数值结果分别在表 1、表 2 中被列出.

表 1 当 $m=0$，$R_1=0$ 时，对不同的 h，前 4 个特征值的数值结果

h	λ_{0h}^1	λ_{0h}^2	λ_{0h}^3	λ_{0h}^4
$\frac{1}{64}$	6.783 312 038 758 4	31.484 171 230 607 2	75.978 866 224 481 5	140.378 385 768 358 9
$\frac{1}{128}$	6.783 217 508 840 8	31.474 490 817 010 6	75.909 977 875 207 9	140.124 813 442 085 4
$\frac{1}{256}$	6.783 193 851 312 4	31.472 069 553 605 0	75.892 750 076 038 5	140.061 417 483 541 4
$\frac{1}{512}$	6.783 187 935 168 3	31.471 464 152 711 9	75.888 442 652 106 5	140.045 567 777 976 7
$\frac{1}{1\,024}$	6.783 186 456 030 7	31.471 312 796 407 6	75.887 365 759 065 5	140.041 605 272 140 4

表 2 当 $m=1$，$R_1=0$ 时，对不同的 h，前 4 个特征值的数值结果

h	λ_{1h}^1	λ_{1h}^2	λ_{1h}^3	λ_{1h}^4
$\frac{1}{64}$	15.683 892 657 713 1	50.252 069 035 809 3	104.668 907 925 231 3	179.052 357 629 387 6
$\frac{1}{128}$	15.682 451 174 248 4	50.226 858 994 787 9	104.541 805 080 696 1	178.653 579 632 021 5
$\frac{1}{256}$	15.682 090 776 922 0	50.220 556 958 464 3	104.510 040 920 890 9	178.553 964 698 689 7
$\frac{1}{512}$	15.682 000 675 933 0	50.218 981 478 918 3	104.502 100 603 408 1	178.529 065 952 334 4
$\frac{1}{1\,024}$	15.681 978 150 580 1	50.218 587 610 872 8	104.500 115 569 198 3	178.522 841 577 634 2

从表 1、表 2 可知，当 $h\leqslant\frac{1}{512}$时，前 4 个特征值至少达到 4 位有效数字的精度. 为了进一步表明算法的精度和有效性，我们取 $h=\frac{1}{1\,024}$时的数值解作为参考解，对于不同的 m，在图 1 和图 2 中画出了逼近特征值与参考解之间的误差.

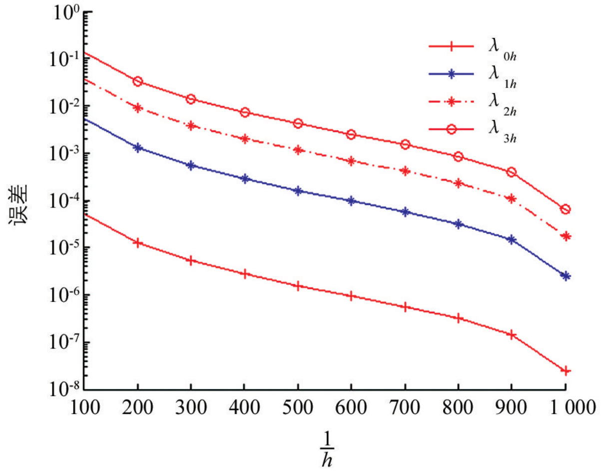

图 1 $R_1=0$，$m=0$ 时，数值解与参考解之间的误差

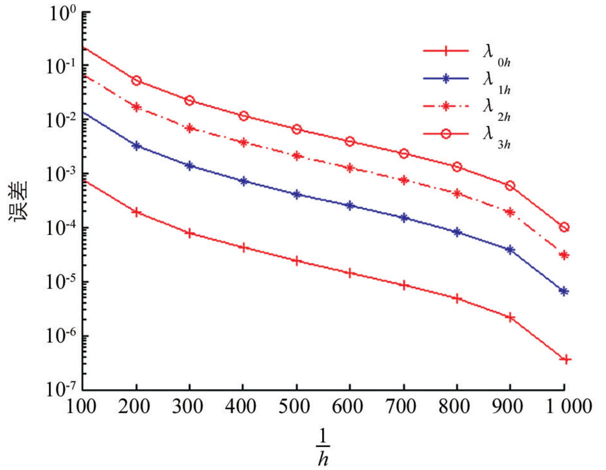

图 2 $R_1=0$，$m=1$ 时，数值解与参考解之间的误差

例 2　我们取 $R_1=1$，$R_2=2$，$\beta=1$ 和 $m=0,1$. 对于不同的 m 和 h，前 4 个特征值的数值结果在表 3、表 4 中被列出.

表 3　当 $m=0$，$R_1>0$ 时，对不同的 h，前 4 个特征值的数值结果

h	λ_{0h}^1	λ_{0h}^2	λ_{0h}^3	λ_{0h}^4
$\frac{1}{64}$	10.755 359 392 843 4	40.387 922 048 068 8	89.863 736 341 232 6	159.298 163 222 690 2
$\frac{1}{128}$	10.753 831 403 488 2	40.363 975 199 867 5	89.742 886 609 978 4	158.916 431 073 990 9
$\frac{1}{256}$	10.753 449 442 045 4	40.357 990 414 606 4	89.712 695 227 945 6	158.821 114 321 293 5
$\frac{1}{512}$	10.753 353 953 924 6	40.356 494 338 809 0	89.705 148 700 749 1	158.797 292 427 936 3
$\frac{1}{1\,024}$	10.753 330 082 034 4	40.356 120 327 392 6	89.703 262 151 374 9	158.791 337 410 946 9

表 4　当 $m=1$，$R_1>0$ 时，对不同的 h，前 4 个特征值的数值结果

h	λ_{1h}^1	λ_{1h}^2	λ_{1h}^3	λ_{1h}^4
$\frac{1}{64}$	11.220 141 239 413 3	40.877 671 705 739 4	90.359 009 282 255 2	159.795 463 257 036 9
$\frac{1}{128}$	11.218 620 280 459 4	40.853 733 128 696 1	90.238 168 164 174 4	159.413 739 867 430 2
$\frac{1}{256}$	11.218 240 076 244 9	40.847 750 409 558 7	90.207 978 931 551 5	159.318 425 297 449 1
$\frac{1}{512}$	11.218 145 027 412 2	40.846 254 850 194 9	90.200 432 941 471 7	159.294 603 949 345 5
$\frac{1}{1\,024}$	11.218 121 265 341 7	40.845 880 967 875 8	90.198 546 526 368 5	159.288 649 068 635 4

从表 3、表 4 可知，当 $h\leqslant\frac{1}{512}$时，前 4 个特征值至少达到 4 位有效数字的精度.

6　结　论

本文针对二阶椭圆特征值问题，提出了一种基于降维格式的有限元方法. 该方法主要通过极坐标变换将二维问题转化为一系列相互独立的一维特征值问题，从而可以并行求解，大大地节约了计算时间和内存容量. 另外，利用紧算子的谱理论以及插值算子的逼近性质证明了逼近特征值和特征函数的误差估计，而且数值实验表明我们提出的算法是非常有效的.

参考文献：

[1] 张琪慧，尚月强. Navier-Stokes 方程的亚格子模型后处理混合有限元方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(3)：67-74.

[2] 刘诗焕，朱先阳. 高维空间中阻尼 Boussinesq 方程初值问题的整体解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(9)：1-5.

[3] BOFFI D. Finite Element Approximation of Eigenvalue Problems [J]. Acta Numer，2010，19：1-120.

[4] HU J，HUANG Y Q，SHEN H M. The Lower Approximation of Eigenvalue by Lumped Mass Finite Element Method [J]. Comput Math，2004，22(4)：545-556.

[5] GREBENKOV D S，NGUYEN B T. Geometrical Structure of Laplacian Eigenfunctions [J]. SIAM Review，2013，55(4)：601-667.

[6] DAVIS C B. A Partition of Unity Method with Penalty for Fourth Order Problems [J]. J of Sci Comput，2014，60(1)：228-248.

[7] SUN J G. A New Family of High Regularity Elements [J]. Numer Methods PDE, 2012, 28(1): 1-16.
[8] ZHOU J W, ZHANG J, XING X Q. Galerkin Spectral Approximations for Optimal Control Problems Governed by the Fourth Order Equation with an Integral Constraint on State [J]. Comput Math Appl, 2016, 72(10): 2549-2561.
[9] OH H S, DAVIS C, JEONG J W. Meshfree Particle Methods for Thin Plates [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2012, 209: 156-171.
[10] BJORSTAD P E, TJOSTHEIM B P. Timely Communication: Eifficient Algorithms for Solving a Fourth Order Equation with the Spectral-Galerkin Method [J]. SIAM Sci Comput, 1997, 18(2): 621-632.
[11] SHERWIN S J, KARNIADAKIS G E. A Triangular Spectral Element Method: Applications to the Incompressible Navier-Stokes Equations [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 1995, 123(1-4): 189-229.
[12] OWENS R G. Spectral Approximations on the Triangle [J]. Proceedings of the Royal Society, 1998, 454: 857-872.
[13] DUBINER M. Spectral Methods on Triangles and Other Domains [J]. Sci Comput, 1991, 6(4): 345-390.
[14] KARNIADAKIS G, SHERWIN S J. Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics [M]. Oxford: Oxford University Press, 2005.
[15] BRAESS D, SCHWAB C. Approximation on Simplices with Respect to Weighted Sobolev Norms [J]. Approx Theory, 2000, 103(2): 329-337.
[16] 李荣华. 偏微分方程数值解法 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 90-92.

An Efficient Finite Element Method for Second-Order Elliptic Eigenvalue Problems in Circular Fields

YANG Min, AN Jing
School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: A finite element method based on dimension reduction scheme is proposed for second-order elliptic eigenvalue problems in a circular domain. Firstly, the original problem is transformed into a series of one-dimensional eigenvalue problems by polar coordinate transformation. For each one-dimensional eigenvalue problem, an appropriate Sobolev space is introduced and its weak form and corresponding discrete scheme are derived. Secondly, the spectral theory of compact operators and the approximation property of interpolation operators are used to prove the error estimation of approximate eigenvalues and eigenfunctions. Finally, some numerical examples are given, and the numerical results show that the algorithm is very effective.

Key words: second-order elliptic eigenvalue problem; dimension reduction scheme; finite element method; error estimation; circular domain

责任编辑 廖 坤