DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2020.12.013

一类新的带有相同参数的混合分数阶可微变分不等式的拓扑处理方法

吴欣锟

黔南民族师范学院 数学与统计学院，贵州 都匀 558000

摘要：引进了一类新的混合分数阶可微变分不等式，给出了它的模型. 证明出该模型的解集是非空的.

关　键　词：分数阶可微变分不等式；混合分数阶可微变分不等式；解集

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2020)12-0103-04

文献[1]首次介绍和研究了一类含有初值的可微变分不等式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t))+B(t,x(t))\cdot u(t)\\ u(t)\in \mathrm{SOL}(K,G(t,x(t))+S)\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

其中 K 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个非空闭凸子集，$\Omega=[0,T]\times\mathbb{R}^n$，$(f,B,G):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^m$ 和 $S:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是两个函数. 在某些条件下，文献[1]得到了可微变分不等式(1)的一个 Caratheodory 弱解的存在性.

文献[2]首次将可微变分不等式(1)推广到了分数阶的情形，其数学表达式为

$$\begin{cases}{}^{C}D_t^{\delta}x(t)\in F(t,x(t))+B(t,x(t))u(t) & t\in I\\ \langle v-u(t),G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle\geqslant 0 & \forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in I\\ x(0)=x_0+h(x)\end{cases}\tag{2}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$，$u(t)\in K$，$0<\delta<1$，${}^{C}D_t^{\delta}$ 是分数阶导数的表示符号，F 是一个从 $I\times\mathbb{R}^n$ 到 $Kv(\mathbb{R}^n)$ 的满足一定条件的映射，$Kv(\mathbb{R}^n)$ 在下文中有定义，B 是一个从 $I\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 的满足一定条件的映射，G 是从 $I\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的满足一定条件的映射，Q 是从 K 到 $\mathbb{R}^m$ 的满足一定条件的映射.

在本文中，我们把(2)式中的变分不等式推广为更一般的混合变分不等式，得到新的一类分数阶混合可微变分不等式

$$\begin{cases}{}^{C}D_t^{\delta}x(t)\in F(t,x(t))+B(t,x(t))u(t) & t\in I\\ \langle v-u(t),G(t,x(t))+Q(u(t))\rangle+\varphi(v)-\varphi(u(t))\geqslant 0 & \forall v\in K,\ \text{a.e. } t\in I\\ x(0)=x_0+h(x)\end{cases}\tag{3}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$，$u(t)\in K$，$0<\delta<1$，${}^{C}D_t^{\delta}$ 是分数阶导数的表示符号，F,B,G 和 Q 这 4 个映射的定义与(2)式中的定义是相同的，φ 是一个从 $\mathbb{R}^m$ 到$(-\infty,+\infty]$的真凸下半连续函数.

1　预备知识

设 X 是一个度量空间，E 是一个 Banach 空间. 定义

收稿日期：2018-04-10
基金项目：贵州省联合基金项目(黔科合 LH 字[2016]7102).
作者简介：吴欣锟(1986-)，男，讲师，主要从事优化理论及应用的研究.

$$P(E)=\{U \subset E: U \neq \varnothing\}$$
$$B(E)=\{U \in P(E): U \text{ 是有界的}\}$$
$$K(E)=\{U \in P(E): U \text{ 是紧的}\}$$
$$Kv(E)=\{U \in K(E): U \text{ 是凸的}\}$$

定义 1 令 $M: X \longrightarrow P(E)$ 是集值算子,

(a) 如果对 E 的任一闭子集 V,都有 $M^{-1}(V)=\{x \in X: M(x) \cap V \neq \varnothing\}$ 是 X 的闭子集,则称 M 是上半连续的;

(b) 如果对 E 的任一弱闭子集 V,都有 $M^{-1}(V)=\{x \in X: M(x) \cap V \neq \varnothing\}$ 是 X 的闭子集,则称 M 是弱上半连续的;

(c) 如果图 $\Gamma_M=\{(y, z): z \in M(y)\}$ 是 $X \times E$ 的闭子集,则称 M 是闭的;

(d) 如果 M 是上半连续的且对 X 里的每个有界集 Ω, $M(\Omega)$ 是 E 里的相对紧集,则称 M 是完备上半连续的;

(e) 如果对 X 的任一紧子集 Ω, $M(\Omega)$ 是 E 里的相对紧集,则称 M 是拟紧的.

引理 1[3] 如果 $M: X \longrightarrow P(E)$ 是一个闭的且拟紧的集值算子,则 M 是上半连续的.

引理 2[4] 设 E 是 Banach 空间,Ω 是另外一个 Banach 空间的非空子集. 如果 $N: \Omega \longrightarrow P(E)$ 是映射到弱紧凸集的集值算子,则 N 是弱上半连续的当且仅当条件 $\{x_n\} \subset \Omega$, $x_n \rightarrow x_0 \in \Omega$ 和 $y_n \in N(x_n)$ 能够推出 $\{y_n\}$ 存在一个子序列弱收敛于 y_0,其中 $y_0 \in N(x_0)$.

引理 3[3] 设 M 是 E 的有界闭凸子集,$T: M \longrightarrow Kv(M)$ 是完备上半连续的集值映射,则 $\mathrm{Fix}(T)=\{x: x \in T(x)\}$ 是非空的紧子集.

2 主要结果

在这一部分,我们主要分析和研究(3)式的解的存在性.

定义 2[5] 对于函数 $x:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$,它的 Caputo 导数 ${}^C D_t^\delta x(t)$ 被定义成

$$
{}^C D_t^\delta x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^t \frac{x^{\prime}(s)}{(t-s)^\delta} \mathrm{d} s \qquad 0<\delta<1
$$

其中 $\Gamma(1-\delta)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-\delta} \mathrm{d} t$,符号 Γ 表示伽玛函数.

定义 3[6] 如果函数 $\varphi:(-\infty,+\infty]$ 满足下面两个条件:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(x) \leqslant \liminf\limits_{y \rightarrow x} \varphi(y)$;

(b) $\forall r \in \mathbb{R}$, $V_r=\{x \in \mathbb{R}^m: \varphi(x)>r\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开子集.

则称 φ 是下半连续的.

为了得到(3)式的解的存在性,我们需要如下假设成立:

(F1) $F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 是上半 Caratheodory 集值映射,等价于说对 $\forall v \in \mathbb{R}^n$,集值映射 $F(\cdot, v): I \longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 确定了一个可测选择,且对于几乎处处 $t \in I$,集值映射 $F(t, \cdot): \mathbb{R}^n \longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ 是上半连续的;

(F2) 对于映射 $F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$,存在非减的连续函数 $\Psi_F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 和函数 $\eta_F \in L^p(I, \mathbb{R})$,使得

$$
\|F(t, v)\|=\sup \{\|z\|: z \in F(t, v)\} \leqslant \eta_F(t) \Psi_F(\|v\|) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \text{ a.e. } t \in I
$$

其中 p 是大于 $\frac{1}{\delta}$ 的正整数;

(B) $B: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ 是连续映射,满足

$$
\|B(t, v)\| \leqslant \eta_B \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I
$$

其中 η_B 是正数;

(G) 对于连续映射 $G: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,存在非减的连续函数 $\Psi_G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 和函数 $\eta_G \in L^p(I, \mathbb{R})$,使

得

$$\| G(t, v) \| \leqslant \eta_G(t)\Psi_G(\| v \|) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I$$

(Q) $Q: K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个满足下面两个条件的连续映射：

(Q_1) Q 在 K 上是单调的，也即是说

$$\langle u - v, Q(u) - Q(v) \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in K$$

(Q_2) 存在 $v_0 \in K$，使得

$$\liminf_{v \in K, \| v \| \to \infty} \frac{\langle v - v_0, Q(v) \rangle}{\| v \|^2} > 0$$

(h) $h: C(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续映射且存在非减的连续函数 $\Psi_h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，使得

$$\| h(x) \| \leqslant \Psi_h(\| x \|_C) \qquad \forall x \in C(I, \mathbb{R}^n)$$

(Φ) 函数 $\varphi: \mathbb{R}^m \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ 是真凸下半连续的函数.

从条件(F1) 和(F2)，我们可以推出：从 $C(I, \mathbb{R}^n)$ 映射到 $P(L^p(I, \mathbb{R}^n))$ 的集值映射

$$P_F^p(x) = \{ f \in L^p(I, \mathbb{R}^n): f(t) \in F(t, x(t)), \text{a. e. } t \in I \}$$

是闭的[2]，其中 $P(L^p(I, \mathbb{R}^n))$ 表示 $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ 的所有子集组成的集合.

定义 4　(3) 式的一个解 $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ 是指存在可积函数 $u: I \longrightarrow K$ 和函数 $f \in P_F^p(x)$，满足

$$x(t) = x_0 + h(x) + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} [f(s) + B(s, x(s))u(s)] \mathrm{d}s \qquad t \in I$$

$$\langle v - u(t), G(t, x(t)) + Q(u(t)) \rangle + \varphi(v) - \varphi(u(t)) \geqslant 0 \qquad \forall v \in K, \text{a. e. } t \in I$$

对于函数 $Q: K \longrightarrow \mathbb{R}^m$，定义 $\mathrm{SOL}(K, Q, \varphi)$ 为

$$\mathrm{SOL}(K, Q, \varphi) = \{ v \in K: \langle w - v, Q(v) \rangle + \varphi(w) - \varphi(v) \geqslant 0, \forall w \in K \} \tag{4}$$

依据文献[6] 的引理 2.3，我们可以得到：

引理 4[6]　如果条件(Q) 和条件(Φ) 满足，则对于 $\forall z \in \mathbb{R}^m$，解集 $\mathrm{SOL}(K, z + Q(\cdot), \varphi)$ 是非空的闭凸集，且存在正数 $\eta_\varphi > 0$ 满足

$$\| v \| \leqslant \eta_\varphi (1 + \| z \|) \qquad \forall v \in \mathrm{SOL}(K, z + Q(\cdot), \varphi) \tag{5}$$

为了解决(3) 式，设

$$U(z) = \mathrm{SOL}(K, z + Q(\cdot), \varphi) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^m$$

再定义 $\Phi: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow P(\mathbb{R}^n)$ 为

$$\Phi(t, v) = \{ B(t, v)y: y \in U(G(t, v)) \} \tag{6}$$

则可以把(3) 式转化为

$$x(t) = x_0 + h(x) + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} [f(s) + g(s)] \mathrm{d}s \qquad t \in I, f \in P_F^p(x), g \in P_\Phi^p(x) \tag{7}$$

为了解决(7) 式，我们引入集值映射 $\Sigma: C(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow P(C(I, \mathbb{R}^n))$，

$$\Sigma(x) = \left\{ x_0 + h(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s) + g(s)] \mathrm{d}s: f \in P_F^p(x), g \in P_\Phi^p(x) \right\}$$

则 $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ 是(7) 式的解等价于说 x 是集值映射 Σ 的不动点.

引理 5　在条件(F1),(F2),(B),(G),(h) 和(Φ) 的假设下，P_F^p 和 P_Φ^p 是弱上半连续的.

证　当条件(Q) 和条件(Φ) 满足时，引理 4 里的不等式(5) 成立，剩下的证明过程与文献[2] 中的引理 3.5 的证明过程是一样的.

设从 $L^p(I, \mathbb{R}^n)$ 映射到 $C(I, \mathbb{R}^n)$ 的映射 W 为

$$W(f)(t) = x_0 + h(x) + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} f(s) \mathrm{d}s$$

引理 6[2]　映射 W 和算子 Σ 分别是完备连续的和完备上半连续的.

定理 1　假设(F1),(F2),(B),(G),(Q),(h) 和(Φ) 这几个条件成立. 如果

$$\liminf_{k \to \infty} \left[\frac{\Psi_h(k)}{k} + \frac{\Psi_F(k)}{k\Gamma(\delta)} \sup_{t \in I} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \eta_F(s) \mathrm{d}s + \frac{\Psi_G(k)}{k\Gamma(\delta)} \eta_\varphi \eta_B \sup_{t \in I} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \eta_G(s) \mathrm{d}s \right] < 1$$

则(7)式至少有一个解.

证 当条件(Q)和条件(Φ)满足时，引理4的不等式(5)成立，剩下的证明过程与文献[2]中的定理3.9的证明过程是一样的.

参考文献:

[1] PANG J S, STEWARD D E. Differential Variational Inequalities [J]. Math Program, 2008, 113(2): 345-424.
[2] LOI N V, DINH K T, OBUKHOVSKII V, et al. Topological Methods for Some Classes of Differential Variational Inequalities [J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2016, 2016: 1-18.
[3] KAMENSKII M, OBUKHOVSKII V, ZECCA P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces [M]. Berlin, New York: De Gruyter, 2001.
[4] BOTHE D. Multivalued Perturbations of m-Accretive Differential Inclusions [J]. Israel J Math, 1998, 108(1): 109-138.
[5] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
[6] LI X S, HUANG L J, O'REGAN D. Differential Mixed Variational Inequalities in Finite Dime-Nsional Spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2010, 12(9-10): 3875-3886.

Topological Methods for a New Class of Fractional Mixed Differential Variational Inequalities with the Same Parameter

WU Xin-kun

College of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun Guizhou 558000, China

Abstract: In this paper, a new class of fractional mixed differential variational inequalities are introduced and studied, and it's proved that the set of solutions of this differential variational inequalities is nonempty.

Key words: fractional differential variational inequality; fractional mixed differential variational inequality; set of solutions

责任编辑 廖 坤