第 43 卷第 1 期 西南大学学报(自然科学版) 2021 年 1 月
Vol. 43 No. 1 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jan. 2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.01.013

一类带交叉扩散项的捕食-食饵模型全局分歧研究

宋倩倩， 李艳玲

陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710119

摘要：研究了一类具有交叉扩散项的捕食-食饵模型在齐次 Dirichlet 边界条件下分歧正解的存在性. 首先利用极大值原理得到正解的先验估计；接着，借助 Crandall-Rabinowitz 分歧理论，得到局部分歧正解的存在性；再将局部分歧延拓为全局分歧，从而给出捕食者与食饵在一定条件下可以共存的条件；最后，利用谱分析的方法得到了关于分歧解稳定性的一个条件.

关 键 词：捕食-食饵；Leslie-Gower 型；交叉扩散；全局分歧；谱分析

中图分类号：O175.26 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2021)01-0106-10

近年来，随着种群生态学的发展，捕食系统已经成为数学和生物学领域的一个重要课题，据此研究者已经建立了包括 Lotka-Volterra 模型、比率型、Holling-Leslie 模型等在内的多种捕食食饵模型. 文献[1]给出如下带有扩散项的 Holling-Leslie 捕食食饵模型

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = u(1-u) - \dfrac{u^2 v}{mv^2+u^2} & x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t - d_2\Delta v = v\left(b-\dfrac{v}{u}\right) & x\in\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0\geqslant 0,\ v(x,0)=v_0\geqslant 0 & x\in\Omega \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0 & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty) \end{cases} \tag{1}$$

文献[1]主要研究该系统周期轨道的存在性和非常数正解的全局稳定性. 文献[2]主要研究系统(1)中 $b=1$ 的情况下正解存在性与其分歧解的局部和全局稳定性.

首先，对于系统(1)考虑到食饵 u 严重匮乏引起捕食其他种类，以及物种在空间上分布不均匀的情况，文献[3]基于实验得到了优化的 Leslie-Gower 型反应函数$\dfrac{a_1 y}{k_1+x}$，其中 x，y 分别表示食饵和捕食者的种群密度，a_1 表示食饵最大消耗率，k_1 表示环境对食饵的保护程度，相关的修正的动力学行为模型也取得了很多研究成果[3-5].

其次，种群间的相互影响在种群扩散中起着非常重要的作用[6-12]. 其中：文献[6]解释了一类具有交叉

收稿日期：2018-06-21
基金项目：国家自然科学基金项目(61672021).
作者简介：宋倩倩，硕士研究生，主要从事反应扩散方程与数学生物学的研究.
通信作者：李艳玲，教授.

扩散项的生物意义并讨论捕食食饵模型非常数正解存在性；文献[7-8] 研究了一类带交叉扩散项的的局部分歧正解情况；文献[9]研究了空间不均匀环境下带交叉扩散项的Lotka-Volterra竞争模型正解问题. 然而目前在齐次Dirichlet边界条件下研究带有交叉扩散项和优化的Leslie-Gower型反应函数系统的研究工作所见不多. 故本文受文献[4,7-8]的启发在文献[1]的基础上研究如下带有修正的Leslie-Gower模型和交叉扩散项的竞争模型

$$\begin{cases} u_t-\Delta(1+\alpha v)u=au-u^2-\dfrac{u^2v}{mv^2+u^2} & x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t-\Delta(1+\beta u)v=bv-\dfrac{v^2}{k+u} & x\in\Omega,\ t>0 \\ u=v=0 & x\in\partial\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0\geqslant 0,\ v(x,0)=v_0\geqslant 0 & x\in\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中：Δ 为 Lapalce 算子；Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有光滑边界的有界开区域；u,v 分别表示食饵和捕食者的种群密度；α,β,a,b,m,k 都是正常数，α 和β 代表交叉扩散系数，a 和b 分别表示食饵种群和捕食者种群的内禀增长率，齐次的 Dirichlet 边界条件意味着两个物种的居住区域 Ω 被一个敌对的环境所包围.

在食物严重缺乏的情况下区别于模型(1) 的反应函数，模型(2) 中优化的 Leslie-Gower 型反应函数表明，即使食饵数量急剧减少也不会对捕食者数量的增长产生较大的影响. 此外，模型(2) 中还增加了二者之间的交叉扩散项，这使模型更具有实际的生物意义.

1　正解的先验估计

考虑如下方程的特征值问题，设 $q(x)\in C(\overline{\Omega})$，$\lambda_1(q(x))$ 是下面边值问题的主特征值

$$-\mu\Delta\psi+q(x)\psi=\lambda\psi,\ x\in\Omega;\ \psi=0,\ x\in\partial\Omega$$

$\lambda_1(q(x))$ 关于 $q(x)$ 递增. 记 $\lambda_1(0)=\lambda_1$，对应的主特征函数记作 $\psi_1(\psi_1>0,\ x\in\Omega)$.

考虑非线性边值问题

$$-\Delta u=u(a-u),\ x\in\Omega;\ u=0,\ x\in\partial\Omega \tag{3}$$

若 $a<\lambda_1$，则 $u=0$ 是(3) 式的唯一非负解；若 $a>\lambda_1$，则(3) 式有唯一正解，记为 θ_a，θ_a 关于a 单调递增.

同理，考虑非线性边值问题

$$-\Delta v=v(b-\beta v),\ x\in\Omega;\ v=0,\ x\in\partial\Omega \tag{4}$$

若 $b<\lambda_1$，则 $v=0$ 是(4) 式的唯一非负解；若 $b>\lambda_1$，则(4) 式有唯一正解，记为 θ_b，θ_b 关于b 单调递增. 以上结论可参考文献[13].

令

$$U=(1+\alpha v)u \qquad V=(1+\beta u)v$$

由于

$$\frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}=(1+\alpha v)(1+\beta u)-\alpha\beta uv>0$$

因此在 $\mathbb{R}_+^2=\{u\geqslant 0,\ v\geqslant 0\}$ 上，映射$(u,v)\longrightarrow(U,V)$ 是可逆且连续的，(u,v) 是(U,V) 的函数，且(u,v) 和(U,V) 之间存在一一对应关系，则系统(1) 的平衡态方程等价于如下椭圆系统

$$\begin{cases} -\Delta U=au-u^2-\dfrac{u^2v}{mv^2+u^2} & x\in\Omega \\ -\Delta V=bv-\dfrac{v^2}{k+u} & x\in\Omega \\ U=V=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

显然方程(5)存在平凡解$(0,0)$，此外，当$a>\lambda_1$时方程(5)存在平凡解$(\theta_a,0)$；当$b>\lambda_1$时方程(5)存在平凡解$(0,k\theta_b)$．令$C_0(\overline{\Omega})=\{U\in C_0(\overline{\Omega}):U=0,\ x\in\partial\Omega\}$，并定义算子$L_a w=-\Delta w-(a-2\theta_a)w$，$w\in C^2(\Omega)\cap C_0(\overline{\Omega})$．易知，算子$L_a$的所有特征值都是正的，这说明$L_a$可逆．

引理1 若$a\leqslant\lambda_1$或者$b\leqslant\lambda_1$，则方程(5)没有正解．

证 假设方程(5)有正解(U,V)，由方程(5)关于U的方程可得

$$-\Delta U=\frac{U}{1+\alpha v}\left(a-u-\frac{uv}{mv^2+u^2}\right)<aU$$

两边同乘U，在Ω上积分，结合Green公式得

$$\int_\Omega|\nabla U|^2\mathrm{d}x=\|\nabla U\|_2^2<a\|U\|_2^2$$

由Poincaré不等式知$\lambda_1\|U\|_2^2<\|\nabla U\|_2^2$．从而$a>\lambda_1$，同理可得$b>\lambda_1$．因此当$a\leqslant\lambda_1$或$b\leqslant\lambda_1$时，方程(5)没有正解．

引理2 若$a,b>\lambda_1$，(U,V)是方程(5)的任一正解，则对于任意的$x\in\Omega$，有

$$0<u(x)<U(x)\leqslant M(a)=a(1+\alpha a^2)\qquad 0<v(x)<V(x)\leqslant(1+\beta M(a))\cdot b(k+a)$$

证 设存在$x_0\in\overline{\Omega}$，使得

$$U(x_0)=\max_{x_0\in\overline{\Omega}}U(x)$$

由于

$$0\leqslant-\Delta U(x_0)=u\left(a-u-\frac{uv}{mv^2+u^2}\right)$$

从而有

$$u(x_0)<a,\ a>\frac{u(x_0)v(x_0)}{mv^2(x_0)+u^2(x_0)}>\frac{u(x_0)v(x_0)}{u^2(x_0)}$$

进而有$v(x_0)<au(x_0)<a^2$，因此有

$$U(x)\leqslant U(x_0)=(1+\alpha v(x_0))u(x_0)<(1+\alpha au(x_0))u(x_0)\leqslant a(1+\alpha a^2)$$

同理可得

$$v(x_1)<b(k+u(x_1))\leqslant b(k+a)$$

$$V(x)\leqslant V(x_1)=(1+\beta u(x_1))v(x_1)\leqslant(1+\beta M(a))\cdot b(k+a)$$

从而定理得证．

2 分歧正解的存在性

由于分歧正解的存在性与特征值问题密切相关，因此在讨论分歧正解的存在性之前给出两个与分歧正解存在性相关的特征值引理．

引理3[7] 设$b>\lambda_1$，则存在唯一的$a=a_*(b)\in(\lambda_1,+\infty)$，满足$\lambda_1\left(\dfrac{-b}{1+\beta\theta_a}\right)=0$，且$a=a_*(b)$关于$b$严格单调递增．

引理4[7] 设$b>\lambda_1$，则存在唯一的$a=a^*(b)\in(\lambda_1,+\infty)$，满足$\lambda_1\left(\dfrac{-a}{1+\alpha k\theta_b}\right)=0$，且$a=a^*(b)$关于$b$严格单调递增．

设$C_0^1(\overline{\Omega})=\{U\in C^1(\overline{\Omega}):U\mid\partial\Omega=0\}$．定义$C_0^1(\overline{\Omega})$中的范数为通常的Banach空间$C^1(\overline{\Omega})$中的范数．令$X=C_0^1(\overline{\Omega})\times C_0^1(\overline{\Omega})$．则$X$是Banach空间．固定$b>\lambda_1$，以$a$为分歧参数，讨论系统(5)发自半平凡解

曲线$\{(a; U_*, v_*)=(a; \theta_a, 0), a>\lambda_1\}$和$\{(a; U^*, v^*)=(a; 0, k\theta_b), b>\lambda_1\}$上的分歧正解.

令

$$f(u, v)=au-u^2-\frac{u^2 v}{mv^2+u^2} \qquad g(u, v)=bv-\frac{v^2}{k+u}$$

其中(u, v)是(U, V)的函数，将(3)式在$(U, V)=(\theta_a, 0)$处 Taylor 展开得

$$\begin{bmatrix}\Delta U\\ \Delta V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f(\theta_a, 0)\\ g(\theta_a, 0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_u & f_v\\ g_u & g_v\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_U & u_V\\ v_U & v_V\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}U-\theta_a\\ V\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Q^1(a; U-\theta_a, V)\\ Q^2(a; U-\theta_a, V)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

其中(6)式中偏导数均为$(\theta_a, 0)$处的导数值，$Q^i(a; U-\theta_a, V)$满足$Q^i(a; U-\theta_a, V)(0, 0)=0$，$i=1, 2$，且有

$$\begin{bmatrix}u_U & u_V\\ v_U & v_V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\alpha v & \alpha u\\ \beta v & 1+\beta u\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{1+\alpha v+\beta u}\begin{bmatrix}1+\beta u & -\alpha u\\ -\beta v & 1+\alpha v\end{bmatrix}$$

定理 1　设$a>\lambda_1$，$b>\lambda_1$，则$(a_*; \theta_a, 0)\in\mathbb{R}^+\times X$为系统(5)的分歧点，且在$(a_*; \theta_{a_*}, 0)$的邻域内存在正解，即

$$\Gamma_*=\{(a(s); \theta_{a_*}+s(\phi_*+\phi_1(s)), s(\psi_*+\psi_1(s))): 0<s<\sigma\}$$

其中，$\phi\in C_0{}^1(\overline{\Omega})$，$\sigma>0$充分小，$(a(s); \phi_1(s), \psi_1(s))$是$C^1$连续函数，且满足$a(0)=a_*$，$\phi_1(0)=0$，$\psi_1(0)=0$，$\int_\Omega\psi_1\psi_*=0$. 且

$$\phi_*=L_a^{-1}\left\{-\frac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\psi_*\right\}$$

证　在(6)式中，令$\overline{U}=U-\theta_a$，则有

$$G(a; \overline{U}, V)=\begin{bmatrix}\Delta\overline{U}+(a-2\theta_a)\overline{U}-\dfrac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}V+Q^1(a; \overline{U}, V)\\ \Delta V+\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}+Q^2(a; \overline{U}, V)\end{bmatrix}=0 \tag{7}$$

显然$G(a; 0, 0)=0$. 记$G(a; \overline{U}, V)$关于$(\overline{U}, V)$在$(a_*; 0, 0)$处的 Fréchet 导数为$L(a_*; 0, 0)$. 经计算$L(a_*; 0, 0)(\phi, \psi)=0$等价于

$$\begin{cases}-\Delta\phi-(a-2\theta_a)\phi=-\dfrac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\psi & x\in\Omega\\ -\Delta\psi-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\psi=0 & x\in\Omega\\ \phi=\psi=0 & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{8}$$

如果$\psi=0$，则由算子L_{a_*}可逆知$\phi=0$，则ϕ不恒为 0. 又$\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)=0$，故有

$$\psi=\psi_*, \phi=\phi_*=L_{a_*}^{-1}\left\{-\frac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\psi_*\right\}$$

因此算子$L(a_*; 0, 0)$的核空间$N(L(a_*; 0, 0))=\mathrm{span}\{(\phi_*, \psi_*)^{\mathrm{T}}\}$. 令$L^*(a_*; 0, 0)$为$L(a_*; 0, 0)$的自伴算子，经计算$L^*(a_*; 0, 0)(\phi, \psi)=0$等价于

$$\begin{cases}-\Delta\phi-(a_*-2\theta_{a_*})\phi=0 & x\in\Omega\\ -\Delta\psi-\dfrac{b}{1+\beta\theta_{a_*}}\psi=-\dfrac{\alpha\theta_{a_*}(a-2\theta_{a_*})+1}{1+\beta\theta_{a_*}}\phi & x\in\Omega\\ \phi=\psi=0 & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{9}$$

显然 $\phi\equiv 0$. 由 $\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)=0$ 得 $\psi=\psi_*$. 所以得 $N(L(a_*;0,0))=\mathrm{span}\{0,\psi_*\}$. 由 Fredholm 选择定理知

$$R(L(a_*;0,0))=\{(\phi,\psi)\in X:\int_\Omega\psi\psi_*=0\}$$

因此得

$$\dim N(L(a_*;0,0))=1 \qquad \mathrm{codim}R(L(a_*;0,0))=1$$

令 $L_1(a_*;0,0)=D^2_{a(\overline{U},V)}G(a_*;0,0)$. 接着用反证法说明 $L_1(a_*;0,0)(\phi_*,\psi_*)\notin R(L(a_*;0,0))$. 假设存在 $(w_0,x_0)\in X$, 使得 $L_1(a_*;0,0)(\phi_*,\psi_*)=L(a_*;0,0)(w_0,x_0)$. 经过计算

$$L_1(a_*;0,0)(\phi_*,\psi_*)=\begin{bmatrix}1-2\dfrac{\partial\theta_a}{\partial a}\phi_*-\left[\dfrac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\right]_{\theta_a}\dfrac{\partial\theta_a}{\partial a}\psi_*\\ \dfrac{b\beta}{(1+\beta\theta_a)^2}\dfrac{\partial\theta_a}{\partial a}\psi_*\end{bmatrix}_{a=a_*} \tag{10}$$

那么有

$$-\Delta x_0-\frac{b}{1+\beta\theta_{a_*}}x_0=\left[\frac{b\beta}{(1+\beta\theta_a)^2}\frac{\partial\theta_a}{\partial a}\right]_{a=a_*}\psi_*$$

两边同时乘 ψ_*, 然后在 Ω 上积分, 结合 Green 公式得

$$\int_\Omega(-\Delta\psi_*-\frac{b}{1+\beta\theta_a}\psi_*)x_0\mathrm{d}x=\int_\Omega\left[\frac{b\beta}{(1+\beta\theta_a)^2}\frac{\partial\theta_a}{\partial a}\right]_{a=a_*}\psi_*^2\mathrm{d}x$$

由于

$$-\Delta\psi_*-\frac{b}{1+\beta\theta_a}=0$$

所以有

$$\int_\Omega\left[\frac{b\beta}{(1+\beta\theta_a)^2}\frac{\partial\theta_a}{\partial a}\right]_{a=a_*}\psi_*^2\mathrm{d}x=0 \tag{11}$$

由于 θ_a 关于 a 严格单调递增, 则(11)式左边大于 0. 从而矛盾, 即 $L_1(a_*;0,0)(\phi_*,\psi_*)\notin R(L(a_*;0,0))$.

至此, 由 Grandall-Rabinowitz 简单特征值局部分歧定理[12] 知, 存在充分小的 $\sigma>0$ 和 C^1 连续曲线 $(a(s);\phi_1(s),\psi_1(s)):(-\sigma,\sigma)\longrightarrow\mathbb{R}\times X$, 使得 $a(0)=a_*$, $\phi_1(0)=\psi_1(0)=0$, $\phi_1(s),\psi_1(s)\in\mathbb{Z}$, 其中 $X=\mathbb{Z}\oplus N(L(a_*;0,0))$, $(a(s);\overline{U}(x),v(x))=(a(s);s(\phi_*+\phi_1(s)),s(\psi_*+\psi_1(s)))$, 满足 $G(a(s);\overline{U},V)=0$. 因此 $(a(s);\overline{U}(s),V(s))$, $(|s|<\sigma)$ 是方程(5)的分歧解. 其中 $\overline{U}(s)=\theta_{a_*}+s(\phi_*+\phi_1(s))$, $V(s)=s(\psi_*+\psi_1(s))$.

同理可得发自半平凡解分支 $(a_*;0,k\theta_b)$ 的局部分歧正解.

定理 2 设 $a,b>\lambda_1$, 则 $(a_*;0,k\theta_b)\in\mathbb{R}^+\times X$ 为系统(5)的分歧点, 且在 $(a_*;0,k\theta_b)$ 的邻域内存在正解, 即

$$\Gamma^*=\{(a(s);s(\phi^*+\phi_2(s)),\theta_b+s(\psi^*+\psi_2(s))):0<s<\sigma\}$$

其中: $\psi^*\in C_0^{\ 1}(\overline{\Omega})$, $\sigma>0$ 充分小, $(a(s);\phi_2(s),\psi_2(s))$ 是 C^1 连续函数, 满足 $a(0)=a^*$, $\phi_2(0)=0$, $\psi_2(0)=0$, $\int_\Omega\phi_2\phi^*=0$, 且

$$\psi^*=L_b^{-1}\left\{\frac{\theta_b^{\ 2}-\beta k\theta_b(b-2\theta_b)}{1+\alpha k\theta_b}\phi^*\right\}$$

3　局部分歧解的延拓

本节主要参照文献[11－12]中的方法，将局部分支延拓为整体分支. 这里取 $P_1 = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}): u(x) > 0, x \in \Omega, \dfrac{\partial u}{\partial n} < 0, x \in \partial\Omega\}$；$P = \{(a, U, V) \in \mathbb{R}^+ \times X: U, V \in P_1\}$.

定理 3　若 $a, b > \lambda_1$，则由定理 1 给出的分歧正解 Γ^* 在正锥 P 内可延拓为全局分歧，并且存在常数 a_∞ 充分大，使得当 $a > a_\infty$ 时，全局分歧曲线随参数 a 延伸到无穷.

证　(7) 式等价于

$$\begin{cases} \overline{U} = (-\Delta)^{-1}\left[(a-2\theta_a)\overline{U} - \dfrac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\right]V + (-\Delta)^{-1}Q^1(a; \overline{U}, V) & x \in \Omega \\ V = (-\Delta)^{-1}\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}V + (-\Delta)^{-1}Q^2(a; \overline{U}, V) & x \in \Omega \\ \overline{U} = V = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{12}$$

定义算子 $K: \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ 为

$$K(a; \overline{U}, V) = \begin{bmatrix} (-\Delta)^{-1}\left[(a-2\theta_a)\overline{U} - \dfrac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\right]V + (-\Delta)^{-1}Q^1(a; \overline{U}, V) \\ (-\Delta)^{-1}\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}V + (-\Delta)^{-1}Q^2(a; \overline{U}, V) \end{bmatrix} = 0 \tag{13}$$

$K(a; \overline{U}, V)$ 为 X 的紧可微算子.

令 $K'(a) = D_{(\overline{U}, V)}K(a; 0, 0)$. 设 $\mu \geqslant 1$ 是 $K(a)$ 的一个特征值，相应的特征值函数设为 (ξ, η) 且不恒为 0，经计算 (ξ, η) 满足

$$\begin{cases} -\mu\Delta\xi - (a-2\theta_a)\xi = -\dfrac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\eta & x \in \Omega \\ -\mu\Delta\eta - \dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\eta = 0 & x \in \Omega \\ \xi = \eta = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

若 $\eta \equiv 0$，由算子 $(-\mu\Delta - a + 2\theta_a)$ 可逆知 $\xi \equiv 0$，矛盾，则 $\eta \neq 0$. 令

$$h_a(x) = -\frac{b}{1+\beta\theta_a}$$

则一定存在某个 $i\,(i = 1, 2, \cdots)$，使得 $\lambda_i(\mu, h_a) = 0$. 对任意 i，$\lambda_i(\mu, h_a)$ 关于 $\mu \geqslant 1$ 和 $a \geqslant \lambda_1$ 均严格单调递增，即 $\lambda_1(\mu, h_a) < \lambda_2(\mu, h_a) \leqslant \lambda_3(\mu, h_a) \leqslant \cdots \to \infty$. 特别地，$\lambda_1(\mu, h_a) = 0$. 另外，若存在某个 $i\,(i = 1, 2, \cdots)$，使得 $\lambda_i(\mu, h_a) = 0$，则 $\mu \geqslant 1$ 一定为 $K'(a)$ 的特征值. 换言之，当且仅当有 i 存在使 $\lambda_i(\mu, h_a) = 0$ 时，$\mu \geqslant 1$ 是 $K'(a)$ 的一个特征值.

令 $a > a_*$，$\forall \mu \geqslant 1$，$i \geqslant 0$ 有 $\lambda_i(\mu, h_{a_*}) \geqslant \lambda_2(\mu, h_{a_*}) > \lambda_1(1, h_{a_*})$. 因此，$K'(a)$ 没有大于或等于 1 的特征值. 此时有 $i(K(a; \cdot), 0) = 1$.

设存在充分小的 γ 使得 $a_* - \gamma < a < a_*$ 且 $\lambda_2(\mu, a_* - \gamma) \geqslant \lambda_1(\mu, h_{a_*})$，则对于 $\forall \mu \geqslant 1$，$i \geqslant 2$ 有 $\lambda_i(\mu, h_a) \geqslant \lambda_2(\mu, h_a) > \lambda_2(\mu, h_{a_*-\gamma}) \geqslant \lambda_1(\mu, h_{a_*}) > \lambda_1(1, h_{a_*}) = 0$. 因 $\lambda_1(1, h_a) < \lambda_1(1, h_{a_*}) = 0$，$\lim\limits_{\mu\to\infty}\lambda_1(\mu, h_{a_*}) = +\infty$ 且 $\lambda_1(\mu, h_{a_*})$ 关于 μ 单调递增，则存在唯一的 $\mu_1 > 1$，使 $\lambda_1(\mu, h_{a_*}) = 0$，从而有

$$N(\mu_1 I - K'(a)) = \operatorname{span}\{\overline{\xi}, \overline{\eta}\} \qquad \dim N(\mu_1 I - K') = 1$$

其中 $\overline{\eta} > 0$ 为下列方程特征值问题的主特征函数

$$-\mu\Delta\bar{\eta}-\frac{b}{1+\beta\theta_a}\bar{\eta}=0,\ x\in\Omega;\ \bar{\eta}=0,\ x\in\partial\Omega \tag{15}$$

其中

$$\bar{\xi}=(\mu\Delta+(a-2\theta_a))^{-1}\times\left\{\frac{\alpha\theta_a(a-2\theta_a)+1}{1+\beta\theta_a}\bar{\eta}\right\}$$

下面证 μ_1 的代数重数为 1. 只需证

$$R(\mu_1 I-K'(a))\cap N(\mu_1 I-K'(a))=0$$

若不然，为了不失一般性，设 $(\bar{\xi},\bar{\eta})\in R(\mu_1 I-K'(a))$，则存在 $(\xi,\eta)\in X$，使得

$$(\mu_1 I-K'(a))(\xi,\eta)=(\bar{\xi},\bar{\eta})$$

即

$$\mu\Delta\bar{\eta}+\frac{b}{1+\beta\theta_a}\bar{\eta}=\Delta\bar{\eta},\ x\in\Omega;\ \eta=0,\ x\in\partial\Omega \tag{16}$$

在(16)式的两端同乘以 $\bar{\eta}$，利用 Green 公式在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega\bar{\eta}\Delta\bar{\eta}\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\mu_1\Delta\eta+\frac{b}{1+\beta\theta_a}\eta\right)\bar{\eta}\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(\mu_1\Delta\bar{\eta}+\frac{b}{1+\beta\theta_a}\bar{\eta}\right)\eta\mathrm{d}x=0 \tag{17}$$

另外，结合(16)式可得

$$\int_\Omega\bar{\eta}\Delta\bar{\eta}\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{1}{\mu}\mathrm{d}x=0$$

与 $h_a<0$ 矛盾. 故 μ_1 的代数重数为 1. 因此当 $a_*-\gamma<a<a_*$ 时 $i(K(a;\cdot),0)=-1$.

由全局分歧定理知，在 $\mathbb{R}^+\times P$ 内存在从 $(a_*;\theta_a,0)$ 出发的连通分支 C_0 满足 $G(a;\xi,\eta)=0$ 且在 $(a_*;\theta_a,0)$ 附近. $G(a;\bar{U},V)=0$ 的所有零点都在定理 1 给出的那条分支曲线上. 记

$$C_1=C_0-\{(a(s);s(\phi_*+\phi_1(s)),s(\psi_*+\psi_1(s))):-\sigma<s<0\}$$

$$C=\{(a;U,V):U=\theta_a+\bar{U},V=V,(a;\bar{U},V)\in C_1\}$$

则 C 为系统(5)由 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 的解曲线，在 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 的小邻域内有 $C\in P$，而且分支 $C-\{(a_*;\theta_{a_*},0)\}$ 满足下列条件之一：

1) C 连接了分歧点 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 和 $(\tilde{a};\theta_{\tilde{a}},0)$，其中 $I-K'(\tilde{a})$ 不可逆且 $a_*\neq\tilde{a}$；

2) C 在 $\mathbb{R}^+\times P$ 内由 $(a_*;\theta_{a_*},0)$ 延伸到 ∞.

下面证明 $C-\{(a_*;\theta_{a_*},0)\}\subseteq P$. 假设 $C-\{(a_*;\theta_{a_*},0)\}\nsubseteq P$，则存在点 $\{(\tilde{a},\tilde{U},\tilde{V})\}\in C-\{(a_*;\theta_{a_*},0)\}\cap\partial P$ 和序列 $\{a_n,U_n,V_n\}\subseteq C\cap P$，$U_n>0$，$V_n>0$，使得 $n\to\infty$ 时，$(a_n,U_n,V_n)\to(\tilde{a},\tilde{U},\tilde{V})$. 由于 (u_n,v_n) 和 (U_n,V_n) 之间存在一一对应的关系知 $(u_n,v_n)\to(\theta_a,0)$. 因此 $\tilde{U}\in\partial P_1$ 或 $\tilde{V}\in\partial P_1$.

假设 $\tilde{U}\in\partial P_1$，那么 $\tilde{U}\geqslant 0$，$x\in\bar{\Omega}$. 则要么存在 $x_0\in\Omega$，使得 $\tilde{U}(x_0)=0$；要么存在 $x_0\in\partial\Omega$，使得 $\frac{\partial\tilde{U}}{\partial n}\big|_{x_0}=0$. 显然由最大值原理知 $\tilde{U}\equiv 0$. 同理，假设 $\tilde{V}\in\partial P_1$，则 $\tilde{V}\equiv 0$. 因此 $(\tilde{U},\tilde{V})$ 有下面 3 种可能：

1) $(\tilde{U},\tilde{V})\equiv(0,0)$；

2) $(\tilde{U},\tilde{V})\equiv(\theta_a,0)$；

3) $(\tilde{U},\tilde{V})\equiv(0,k\theta_b)$.

首先利用反证法证明 1) 不成立. 假设存在序列 $\alpha_n\to\infty$，$a_n\to\tilde{a}$，(U_n,V_n) 在 $[L^\infty(\Omega)]^2$ 中收敛到

$(0, k\theta_b)$，由于(u_n, v_n)和(U_n, V_n)之间存在一一对应的关系知$(u_n, v_n) \to (0, k\theta_b)$. 令 $\widetilde{U}_n = \dfrac{U_n}{\| U_n \|_\infty}$，则 $\widetilde{U}_n$ 满足下面方程

$$-\Delta\widetilde{U}_n = \frac{\widetilde{U}_n}{1+\alpha v_n}\left(a - u_n - \frac{u_n v_n}{m v_n{}^2 + u_n{}^2}\right),\ x \in \Omega;\ \widetilde{U}_n = 0,\ x \in \partial\Omega$$

由 L^P 估计和 Sobolev 嵌入定理知 $\widetilde{U}_n \to u_n$（在 C^1 范数意义下），且满足

$$-\Delta\widetilde{U} = 0,\ x \in \Omega\ ,\ \widetilde{U} = 0,\ x \in \partial\Omega$$

所以 $\widetilde{U} = 0$ 与 $\| U_n \|_\infty = 1$ 矛盾.

接着证明 2) 不成立，假设$(\widetilde{U}, \widetilde{V}) \equiv (\theta_a, 0)$，则当 $n \to \infty$ 时$(a_n; U_n, V_n) \to (\tilde{a}; \theta_a, 0)$. 令 $\widetilde{V}_n = \dfrac{V_n}{\| V_n \|_\infty}$，则 $\widetilde{V}_n$ 满足下面方程

$$-\Delta\widetilde{V}_n = \frac{\widetilde{V}_n}{1+\beta u_n}\left(b - \frac{v_n}{k + u_n}\right),\ x \in \Omega$$

$$\widetilde{V}_n = 0,\ x \in \partial\Omega$$

由极大值原理知 $\widetilde{V} > 0$，因此 $\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right) = 0$ 与 $\tilde{a} \neq a_*$ 矛盾.

通过以上讨论知 3) 成立，即 $C - \{(a_*; \theta_{a_*}, 0)\} \subseteq P$. 因为 $\| U_n \|_\infty$，$\| V_n \|_\infty$ 有界. 则全局分歧曲线只能沿参数 a 延伸到 ∞.

注 1　注意到 $u(x) = \dfrac{U}{1+\alpha v} < U$，$v(x) = \dfrac{V}{1+\beta u} < V$，由引理 2 知 u，v 有界.

注 2　注意到$(u, v) \geqslant (0, 0)$和$(U, V) \geqslant (0, 0)$之间存在一一对应的关系，由定理 1 和定理 2 知模型(5)存在分歧正解.

4　平凡解和半平凡解的稳定性

本节参考文献[14]的方法主要分析了系统(5)的平凡解和半平凡解的稳定性. 显然系统(5)的平凡解是$(0, 0)$，半平凡解是$(\theta_a, 0)(a > \lambda_1)$，$(0, k\theta_b)(b > \lambda_1)$.

定理 4　1) 若 $a < \lambda_1$ 且 $b < \lambda_1$，则平凡解$(0, 0)$是渐近稳定的；相反地，若 $a > \lambda_1$ 或者 $b > \lambda_1$，则平凡解$(0, 0)$是不稳定的.

2) 假设 $a > \lambda_1$. 若 $\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right) > 0$，则$(\theta_a, 0)$是渐近稳定的；若 $\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right) < 0$，则$(\theta_a, 0)$是不稳定的.

3) 假设 $b > \lambda_1$. 若 $\lambda_1\left(-\dfrac{a}{1+\alpha k\theta_b}\right) > 0$，则$(0, k\theta_b)$是渐近稳定的；若 $\lambda_1\left(-\dfrac{a}{1+\alpha k\theta_b}\right) < 0$，则$(0, k\theta_b)$是不稳定的.

证　因为 3 种情况的证明过程相似，所以在此只证定理 4 中的情况(2). 由线性化原理知，$(\theta_a, 0)$的稳定性由下面特征值问题决定

$$\begin{cases} -\Delta u - (a - 2\theta_a)u + [1 + \alpha\theta_a(a - \theta_a)]v = \lambda u & x \in \Omega \\ -\Delta v - \dfrac{b}{1+\beta\theta_a}v = \lambda v & x \in \Omega \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

由于(18)中的方程不是完全对称的，需要考虑下面两个特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u-(a-2\theta_a)u=\lambda u & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{19}$$

和

$$\begin{cases} -\Delta v-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}v=\lambda v & x\in\Omega \\ v=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{20}$$

由文献[14]知(18)式的特征值是(19)式和(20)式的组合. 分别记(19)式和(20)式的特征值为λ_*和λ^*，则有

$$\lambda_*=\lambda_1(2\theta_a-a)>\lambda_1(\theta_a-a)=0$$

为了研究λ^*，因$V=(1+\beta u)v$，则由主特征值的变分原理得

$$\lambda_*=\inf_{V\in H_0^1(\Omega),\ V\not\equiv 0}\frac{\int_\Omega|\nabla V|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\dfrac{-b}{1+\beta\theta_a}V^2\mathrm{d}x}{\int_\Omega V^2\mathrm{d}x}$$

则有$\lambda_*>\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)$，此时$\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)>0$；$\lambda_*<\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)$，此时$\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)<0$.

若$\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)>0$，则系统(5)所有的特征值都是正的，因此$(\theta_a,0)$是渐近稳定的；另一方面，若$\lambda_1\left(-\dfrac{b}{1+\beta\theta_a}\right)<0$，则系统(5)有一个负的特征值，这说明$(\theta_a,0)$是不稳定的.

参考文献：

[1] 杨文彬，李艳玲. 一类比率依赖的Holling-Leslie捕食-食饵模型的全局分歧[J]. 计算机工程与应用，2012，48(17)：58-62.

[2] SHI H B，LI Y. Global Asymptotic Stability of a Diffusive Predator-Prey Model with Ratio-Dependent Functional Response [J]. Applied Mathematics and Computation，2015，250：71-77.

[3] AZIZ-ALAOUI M A，DAHER OKIYE M. Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes [J]. Applied Mathematics Letters，2003，16(7)：1069-1075.

[4] TRIPATHI J P，MEGHWANI S S，THAKUR M，et al. A Modified Leslie-Gower Predator-Prey Interaction Model and Parameter Identifiability [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2018，54：331-346.

[5] FLORES J D，GONZÁLEZ-OLIVARES E. A Modified Leslie-Gower Predator-Prey Model with Ratio-Dependent Functional Response and Alternative Food for the Predator [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2017，40(7)：2313-2328.

[6] PENG R，WANG M X，YANG G Y. Stationary Patterns of the Holling-Tanner Prey-Predator Model with Diffusion and Cross-Diffusion [J]. Applied Mathematics and Computation，2008，196(2)：570-577.

[7] 郭改慧，李兵方，岳宗敏. 带交叉扩散的Ivlev捕食-食饵模型的分歧正解[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013(1)：74-78.

[8] KUTO K，YAMADA Y. Coexistence Problem for a Prey-Predator Model with Density-Dependent Diffusion [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2009，71(12)：e2223-e2232. DOI：10.1016/j.na.2009.05.014.

[9] LI S B，LIU S Y，WU J H，et al. Positive Solutions for Lotka-Volterra Competition System with Large Cross-Diffusion in a Spatially Heterogeneous Environment [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2017，36：1-19.

[10] STEPHEN CANTRELL R，CAO X R，LAM K Y，et al. A PDE Model of Intraguild Predation with Cross-Diffusion

[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-B, 2017, 22(10): 3653-3661.

[11] 黄继才. 具有 Holling Type-IV 功能反应函数的捕食与被捕食系统的定性分析 [D]. 武汉：华中师范大学，2002.

[12] WU J H, WEI G S. Coexistence States for Cooperative Model wth Diffusion [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2002, 43(10): 1277-1290.

[13] 叶其孝，李正元. 反应扩散方程引论 [M]. 北京：科学出版社，1990：40-56.

[14] JUN Z, KIM C G. Positive Solutions for a Lotka-Volterra Prey-Predator Model with Cross-Diffusion of Fractional Type [J]. Results in Mathematics, 2014, 65(3-4): 293-320.

Research of Global Bifurcation of a Predator-Prey Model with Cross-Diffusion

SONG Qian-qian,　LI Yan-ling

College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

Abstract: In this paper, the existence of positive solution of the steady-state system for the predator-prey model with cross-diffusion is studied under the homogeneous Dirichlet boundary condition. First, by means of maximum principle, a priori estimate is established. Next, by the Crandall-Rabinowitz local bifurcation theory, the existence of local bifurcation solution is obtained. Then, resorting to the global bifurcation theory, the local bifurcation solution is extended to the global bifurcation solution, and the conditions under which the predator and the prey can co-exist are given. Finally, a condition for the stability of bifurcation solution is obtained by spectral analysis.

Key words: predator-prey; Leslie-Gower; cross-diffusion; global bifurcation; spectral analysis

责任编辑　张　构