DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.01.014

带加性噪声的随机波动方程的惯性流形逼近

李　琴[1,2]，　陈光淦[1]

1. 四川师范大学 数学科学学院/可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室，成都 610068；
2. 四川省江油中学，四川 江油 621700

摘要：研究带加性噪声的波动方程惯性流形的 Wong-Zakai 型逼近. 在分析了波动方程特征的基础上，考虑了基于不变流形下解的收敛，证明带光滑噪声的波动系统的惯性流形逼近原系统的惯性流形.

关　键　词：随机波动方程；惯性流形；Wong-Zakai 型逼近

中图分类号：O175.24；O193　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2021)01－0116－09

波动方程是最重要的数学物理方程之一，它是关于时间的二阶偏微分方程，描述了振动在介质中的传播，在光波、声波和水波等自然现象中被广泛研究. 惯性流形和稳定流形等不变流形刻画了系统动力学特征和有效行为. 文献[1]证明了随机波动方程不变流形的存在性；文献[2]研究了随机波动方程的惯性流形的存在性.

本文考虑带加性白噪声的随机波动方程

$$\nu u_{tt}+u_t=\Delta u+f(u)+\sigma\dot{W}(t),\ t>0,\ x\in D$$
$$u(0,x)=u_0(x),\ u_t(0,x)=u_1(x),\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 \tag{1}$$

其中：$\nu>0$，$D=[0,\pi]$，$W(t)$ 是双边的 $L^2(D)$ 值的 Q- 维纳过程，其协方差算子 Q 满足 $\mathrm{tr}Q<\infty$. 假设非线性项 f 在 $L^2(D)$ 上是全局 Lipschitz 连续的，并且 Lipschitz 常数是 L_f.

由于维纳过程 $W(t)$ 处处连续，处处不可导，文献[3-4]从数值模拟与计算角度研究了随机微分方程的逼近；文献[5]用光滑的 $\Phi^\varepsilon(t)$ 去近似不光滑的 $W(t)$，得到随机微分方程的刻画；文献[6]通过一类平稳过程研究了 Wong-Zakai 型的近似.

考虑近似随机系统

$$\nu X_{tt}^\varepsilon+X_t^\varepsilon=\Delta X^\varepsilon+f(X^\varepsilon)+\sigma\dot{\Phi}^\varepsilon(t),\ 0<\varepsilon\ll 1$$
$$X^\varepsilon(0,x)=X_0^\varepsilon(x),\ X_t^\varepsilon(0,x)=X_1^\varepsilon(x),\ X^\varepsilon(t,0)=X^\varepsilon(t,\pi)=0 \tag{2}$$

方程(2)是色噪声 $\dot{\Phi}^\varepsilon(t)$ 驱动的[5]. $\Phi^\varepsilon(t)$ 处处连续，处处光滑. 本文证明方程(2)的惯性流形收敛到(1)的惯性流形.

1　预备知识

令 $L^2(D)$ 为 $(0,\pi)$ 上的平方可积函数的集合，其范数为 $\|\cdot\|_{L^2(D)}$，内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$；$H_0^1(D)$ 表示通常

收稿日期：2018－12－23
基金项目：国家自然科学基金项目(11571245)；四川省科技厅应用基础项目(2018JY0486).
作者简介：李　琴，硕士，主要从事偏微分方程的研究.
通信作者：陈光淦，博士，教授.

的 Sobolev 空间 $W_0^{1,2}(D)$[7]，其范数为 $\|\cdot\|_{H_0^1}$；设 $E:=H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$，其范数为 $\|\cdot\|_E$. 考虑$(0,\pi)$上是齐次 Dirichlet 边界条件的算子 Δ，那么算子 Δ 在 $L^2(D)$ 上生成一个强连续半群 $\mathrm{e}^{\Delta t}(t\geqslant 0)$. Δ 的特征值为 $\lambda_k=-k^2(k=1,2,\cdots)$，相应地特征向量 $\mathbf{e}_k$ 在 $L^2(D)$ 上是标准正交基. 非线性项 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续的，即

$$\|f(u_1)-f(u_2)\|_{L^2(D)}\leqslant L_f\|u_1-u_2\|_{H_0^1}$$

其中 L_f 为 Lipschitz 常数.

令

$$\boldsymbol{A}:=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\nu}I & \frac{1}{\nu}I\\ \frac{1}{4\nu}I+\Delta & -\frac{1}{2\nu}I\end{pmatrix}$$

其中 I 为恒等算子.

方程(1) 等价于下面的方程组

$$(u,v)_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(u,v)^{\mathrm{T}}+(0,f(u))^{\mathrm{T}}+(0,\sigma\dot{W}(t))^{\mathrm{T}}\tag{3}$$

其中$(u,v)^{\mathrm{T}}\in E$.

方程(2) 等价于下面的方程组

$$(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(X^\varepsilon,Y^\varepsilon)^{\mathrm{T}}+(0,f(X^\varepsilon))^{\mathrm{T}}+(0,\sigma\dot{\Phi}^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}}\tag{4}$$

算子 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_k^{\pm}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\nu k^2}}{2\nu}$，$k=1,2,\cdots$，相应的特征向量是

$$\mathbf{e}_k^{\pm}:=(\mathbf{e}_k,\pm\frac{\sqrt{1-4\nu k^2}}{2}\mathbf{e}_k)^{\mathrm{T}},\ k=1,2,\cdots$$

设

$$E_1:=\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k^{+}:k=1,2,\cdots,N\},\ E_{-1}:=\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k^{-}:k=1,2,\cdots,N\}$$

$$E_{11}:=E_1\oplus E_{-1},\ E_{22}:=\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k^{\pm}:k=N+1,\cdots\},\ E_2:=E_{-1}\oplus E_{22}$$

由 $\mathbf{e}_k$ 的正交性，容易验证 $E_1\perp E_{22}$，$E_{-1}\perp E_{22}$. 再由文献[8]可知，在 E_{11} 和 E_{22} 上定义新内积

$$\langle(u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle_{E_{11}}=\langle\nu\Delta u_1,u_2\rangle+\frac{1}{4}\langle u_1,u_2\rangle+\langle v_1,v_2\rangle$$

$$\langle(u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle_{E_{22}}=\langle\Delta u_1,u_2\rangle+(\frac{1}{4\nu}-2(N+1)^2)\langle u_1,u_2\rangle+\langle v_1,v_2\rangle$$

有 $E_1\perp E_{-1}$，那么 $E_1\perp E_2$. 显然，$E_1\oplus E_2=E$. 那么算子 $\boldsymbol{A}$ 满足下面条件(指数二分性)：

$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}P_1x\|_E\leqslant K\ \mathrm{e}^{\alpha t}\|x\|_E,\ t\leqslant 0$$
$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}P_2x\|_E\leqslant K\ \mathrm{e}^{\beta t}\|x\|_E,\ t\geqslant 0\tag{5}$$

其中 $\beta<\alpha<0$，$K>0$，$I=P_1+P_2$. 记 $E_1=P_1E$ 和 $E_2=P_2E$.

定义 1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个完备概率空间，$\theta=\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 Ω 上的变换族，定义映射

$$\theta:(\mathbb{R}\times\Omega,\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{F})\longrightarrow(\Omega,\mathscr{F})$$

如果映射 θ_t 满足如下条件

(ⅰ)$\theta_0=id_\Omega$，

(ⅱ) 对 $t,\tau\in\mathbb{R}$，有 $\theta_t\circ\theta_\tau:=\theta_t\theta_\tau=\theta_{t+\tau}$，

(ⅲ) 映射$(t,\omega)\longrightarrow\theta_t\omega$ 是 $\mathscr{B}(\mathbb{R}\times\mathscr{F},\mathscr{F})$-可测，且对任意 $t\in\mathbb{R}$，有 $\theta_tP=P$，

则称$(\Omega,\mathscr{F},P,\theta)$为驱动动力系统.

定义 2　设(H,d_H)是一个完备度量空间，如果映射

$$\phi:(\mathbb{R}\times\Omega\times H,\ \mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(H))\longrightarrow(H,\ \mathscr{B}(H))$$

满足下面性质

$$\phi(0,\ \omega,\ x)=x$$

$$\phi(t+\tau,\ \omega,\ x)=\phi(t,\ \theta_t\omega,\ \phi(t,\ \omega,\ x)),\ \tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega,\ x\in H$$

则称 θ 和 ϕ 构成的二元组 $(\theta,\ \phi)$ 为一个随机动力系统.

定义 3　对于随机动力系统 $\phi(t,\ \omega,\ x)$，如果对任意的 $t\geqslant 0$，$\omega\in\Omega$，有

$$\phi(t,\ \omega,\ M(\omega))\subset M(\theta_t\omega)$$

那么随机集 $M(\omega)$ 称为正不变集.

定义 4　如果不变集 $M(\omega)$ 能被一个 Lipschitz 映射 $h(\cdot,\ \omega):E_1\longrightarrow E_2$ 表示，其中 $E=E_1\oplus E_2$，并满足 $M(\omega)=\{(\xi,\ h(\xi,\ \omega))\mid\xi\in E_1\}$，那么 $M(\omega)$ 是一个 Lipschitz 不变流形. 进一步，如果 E_1 是一个有限维并且 $M(\omega)$ 对轨道 φ 是指数吸引的，那么称 $M(\omega)$ 是一个随机惯性流形.

考虑一个 Langevin 方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}z^{\varepsilon}=-\dfrac{1}{\varepsilon}z^{\varepsilon}\mathrm{d}t+\dfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}W(t)\\ z^{\varepsilon}(0)=\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{s}{\varepsilon}}\mathrm{d}W(s)\end{cases}\tag{6}$$

取定 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$. 因此，当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon\to 0$. 由文献[4]，方程(6)存在解

$$z^{\varepsilon}(\theta_t\omega)=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^{\frac{s}{\varepsilon}}\theta_t\omega(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{\varepsilon}\omega(t)-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{e}^{\frac{s}{\varepsilon}}\omega(t+s)\mathrm{d}s$$

它具有轨道不变性和测度不变性[9]. 定义

$$\Phi^{\varepsilon}(t):=\int_0^t z^{\varepsilon}(\theta_s\omega)\mathrm{d}s$$

引理 1[4]　设 $W(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个布朗运动，那么对每一个固定的 $T>0$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\Phi^{\varepsilon}(t)$ 在 $[0,\ T]$ 上几乎处处一致收敛到 $W(t)$.

由文献[10]知，$(u^*(\omega),\ v^*(\omega))^{\mathrm{T}}$ 和 $(X^*(\omega),\ Y^*(\omega))^{\mathrm{T}}$ 分别是下面线性方程组的唯一稳态解

$$(u,\ v)_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(u,\ v)^{\mathrm{T}}+(0,\ \sigma\dot{W}(t))^{\mathrm{T}}\tag{7}$$

$$(X,\ Y)_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(X,\ Y)^{\mathrm{T}}+(0,\ \sigma\dot{\Phi}^{\varepsilon}(t))^{\mathrm{T}}\tag{8}$$

实际上

$$(u^*(\omega),\ v^*(\omega))^{\mathrm{T}}=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}P_2\mathrm{d}(0,\ \sigma W(s))^{\mathrm{T}}+\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}P_1\mathrm{d}(0,\ \sigma W(s))^{\mathrm{T}}\tag{9}$$

$$(X^*(\omega),\ Y^*(\omega))^{\mathrm{T}}=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}P_2\mathrm{d}(0,\ \sigma\Phi^{\varepsilon}(s))^{\mathrm{T}}+\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s}P_1\mathrm{d}(0,\ \sigma\Phi^{\varepsilon}(s))^{\mathrm{T}}\tag{10}$$

存在且分别生成下面的稳态解

$$(u^*(\theta_t\omega),\ v^*(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}}=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-s)}P_2\mathrm{d}(0,\ \sigma W(s))^{\mathrm{T}}+\int_{\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-s)}P_1\mathrm{d}(0,\ \sigma W(s))^{\mathrm{T}}\tag{11}$$

$$(X^*(\theta_t\omega),\ Y^*(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}}=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-s)}P_2\mathrm{d}(0,\ \sigma\Phi^{\varepsilon}(s))^{\mathrm{T}}+\int_{\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-s)}P_1\mathrm{d}(0,\ \sigma\Phi^{\varepsilon}(s))^{\mathrm{T}}\tag{12}$$

定义如下非线性函数

$$g_1(\omega,\ \overline{u})=f(\overline{u}+u^*(\theta_t\omega)),\ g_2(\omega,\ \overline{X}^{\varepsilon})=f(\overline{X}^{\varepsilon}+X^*(\theta_t\omega))$$

那么 $g_i(i=1,2)$ 与 f 有相同的 Lipschitz 常数.

考虑下面的方程组

$$(\overline{u},\ \overline{v})_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(\overline{u},\ \overline{v})^{\mathrm{T}}+(0,\ g_1(\theta_t\omega,\ \overline{u}))^{\mathrm{T}}\tag{13}$$

$$(\overline{X}^{\varepsilon}, \overline{Y}^{\varepsilon})_t^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}(\overline{X}^{\varepsilon}, \overline{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}} + (0, g_2(\theta_t\omega, \overline{X}))^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

引入变换

$$T(\omega, (u, v)^{\mathrm{T}}) = (u, v)^{\mathrm{T}} - (u^*(\omega), v^*(\omega))^{\mathrm{T}}$$

$$T^{-1}(\omega, (u, v)^{\mathrm{T}}) = (u, v)^{\mathrm{T}} + (u^*(\omega), v^*(\omega))^{\mathrm{T}}$$

$$T^{\varepsilon}(\omega, (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}) = (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}} - (X^*(\omega), Y^*(\omega))^{\mathrm{T}}$$

$$T^{-1,\varepsilon}(\omega, (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}) = (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}} + (X^*(\omega), Y^*(\omega))^{\mathrm{T}}$$

引理 2[10]　假设$(\overline{u}, \overline{v})^{\mathrm{T}}$和$(\overline{X}^{\varepsilon}, \overline{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$分别为方程组(13)和(14)生成的随机动力系统，那么

$$T^{-1}(\theta_t\omega, (\overline{u}, \overline{v})^{\mathrm{T}}) := (u, v)^{\mathrm{T}}$$

和

$$T^{-1,\varepsilon}(\theta_t\omega, (\overline{X}^{\varepsilon}, \overline{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}) := (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$$

是随机动力系统，对任意$(u, v)^{\mathrm{T}} \in E$和$(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}} \in E$，过程

$$(t, \omega) \longrightarrow (u(t, \omega, (u, v)^{\mathrm{T}}), v(t, \omega, (u, v)^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}$$

和

$$(t, \omega) \longrightarrow (X^{\varepsilon}(t, \omega, (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}), Y^{\varepsilon}(t, \omega, (X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}))^{\mathrm{T}}$$

分别是(3)式和(4)式的解.

2　惯性流形的 Wong-Zakai 型逼近

首先考虑惯性流形的存在性. 用$\phi(t, \omega, (\overline{u}_0, \overline{v}_0)^{\mathrm{T}})$和$\phi^{\varepsilon}(t, \omega, (\overline{X}_0^{\varepsilon}, \overline{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}})$分别表示(13)和(14)式的解，它们的初值分别表示为

$$\phi(0, \omega, (\overline{u}_0, \overline{v}_0)^{\mathrm{T}}) = (P_1(\overline{u}_0, \overline{v}_0)^{\mathrm{T}}, P_2(\overline{u}_0, \overline{v}_0)^{\mathrm{T}})$$

和

$$\phi^{\varepsilon}(0, \omega, (\overline{X}_0^{\varepsilon}, \overline{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}) = (P_1(\overline{X}_0^{\varepsilon}, \overline{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}, P_2(\overline{X}_0^{\varepsilon}, \overline{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}})$$

定义 Banach 空间

$$C_\eta^- := \{\phi \in C((-\infty, 0], E) : \sup_{t\leqslant 0} \mathrm{e}^{-\eta t} \|\phi(t)\|_E < \infty\}$$

其范数为

$$\|\phi(\cdot)\|_{C_\eta^-} = \sup_{t\leqslant 0} \mathrm{e}^{-\eta|t|} \|\phi(t)\|_E$$

引理 3[2]　如果L_f满足

$$KL_f\left(\frac{1}{\alpha-\eta} + \frac{1}{\eta-\beta}\right) < 1 \tag{15}$$

那么方程组(13)有不变的 Lipschitz 流形

$$M_E(\omega) = \{(\xi, h(\xi, \omega)) \mid \xi \in E_1\}$$

其中$h(\cdot, \omega): E_1 \longrightarrow E_2$为 Lipschitz 连续映射并且

$$h(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s} P_2(0, g_1(\theta_s\omega, \phi(s, \omega, \xi)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s$$

进一步，如果

$$KL_f\left(\frac{1}{\alpha-\eta} + \frac{1}{\eta-\beta}\right) + K^2 L_h L_f \frac{1}{\alpha-\eta} < 0 \tag{16}$$

那么$M_E(\omega)$是方程组(13)的随机惯性流形，其中L_h为$h(\xi, \omega)$的 Lipschitz 常数.

用文献[2]中类似的方法可得到方程组(14)的惯性流形如下.

引理 4[2]　如果L_f满足(15)式，那么方程组(14)有不变的 Lipschitz 流形

$$M_E^{\varepsilon}(\omega) = \{(\xi, h^{\varepsilon}(\xi, \omega)) \mid \xi \in E_1\}$$

其中 $h^{\varepsilon}(\cdot,\omega): E_1 \longrightarrow E_2$ 为 Lipschitz 连续映射并且

$$h^{\varepsilon}(\xi,\omega)=\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}s} P_2(0, g_2(\theta_s\omega, \phi(s,\omega,\xi)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s$$

进一步，如果(16)式成立，那么 $M_E{}^{\varepsilon}(\omega)$ 是方程组(14)的随机惯性流形.

注 1 流形 $\widetilde{M}_E(\omega)=T^{-1}(\omega, M(\omega))$ 和 $\widetilde{M}_E{}^{\varepsilon}(\omega)=T^{-1,\varepsilon}(\omega, M_E{}^{\varepsilon}(\omega))$ 是方程组(3)和(4)的 Lipschitz 惯性流形. 下面证明惯性流形的 Wong-Zakai 型逼近. 假设 $(u, v)^{\mathrm{T}}$ 和 $(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$ 分别是方程组(3)和(4)的解，对 $(u, v)^{\mathrm{T}}$ 作如下变换

$$(\bar{u}(t,\xi), \bar{v}(t,\xi))^{\mathrm{T}}=(u(t,\xi+u^{*}(\omega))-u^{*}(\theta_t\omega), v(t,\xi+v^{*}(\omega))-v^{*}(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

其中 $(u^{*}(\theta_t\omega), v^{*}(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}}$ 是方程组(7)的稳态解. 可以得到 $(\bar{u}, \bar{v})^{\mathrm{T}}$ 满足方程组

$$\begin{cases}(\bar{u}, \bar{v})_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(\bar{u}, \bar{v})^{\mathrm{T}}+(0, f(\bar{u}+u^{*}(\theta_t\omega)))^{\mathrm{T}} \\ (\bar{u}(0), \bar{v}(0))^{\mathrm{T}}=(\bar{u}_0, \bar{v}_0)^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{18}$$

惯性流形上的解 $(\bar{u}, \bar{v})^{\mathrm{T}}$ 如下

$$(\bar{u}, \bar{v})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} P_1(\bar{u}_0, \bar{v}_0)^{\mathrm{T}}+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)} P_1(0, f(\bar{u}+u^{*}(\theta_s\omega)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s+ \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)} P_2(0, f(\bar{u}+u^{*}(\theta_s\omega)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s \tag{19}$$

对应的随机惯性流形的 Lispchitz 映射为

$$h((\bar{u}_0, \bar{v}_0)^{\mathrm{T}}, \omega)=\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)} P_2(0, f(\bar{u}+u^{*}(\theta_s\omega)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s \tag{20}$$

相应地，对 $(X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$ 作如下变换

$$(\bar{X}^{\varepsilon}(t,\xi), \bar{Y}^{\varepsilon}(t,\xi))^{\mathrm{T}}=(X^{\varepsilon}(t,\xi+X^{*}(\omega))-X^{*}(\theta_t\omega), Y^{\varepsilon}(t,\xi+Y^{*}(\omega))-Y^{*}(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

其中 $(X^{*}(\theta_t\omega), Y^{*}(\theta_t\omega))^{\mathrm{T}}$ 是方程组(8)的稳态解. 可以得到 $(\bar{X}^{\varepsilon}, \bar{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$ 满足方程组

$$\begin{cases}(\bar{X}^{\varepsilon}, \bar{Y}^{\varepsilon})_t^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(\bar{X}^{\varepsilon}, \bar{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}+(0, f(\bar{X}^{\varepsilon}+X^{*}(\theta_t\omega)))^{\mathrm{T}} \\ (\bar{X}^{\varepsilon}(0), \bar{Y}^{\varepsilon}(0))^{\mathrm{T}}=(\bar{X}_0^{\varepsilon}, \bar{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{22}$$

惯性流形上的解 $(\bar{X}^{\varepsilon}, \bar{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}$ 如下

$$(\bar{X}^{\varepsilon}, \bar{Y}^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} P_1(\bar{X}_0^{\varepsilon}, \bar{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)} P_1(0, f(\bar{X}^{\varepsilon}+X^{*}(\theta_s\omega)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s+ \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)} P_2(0, f(\bar{X}^{\varepsilon}+X^{*}(\theta_s\omega)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s \tag{23}$$

对应的随机惯性流形的 Lispchitz 映射为

$$h^{\varepsilon}((\bar{X}_0^{\varepsilon}, \bar{Y}_0^{\varepsilon})^{\mathrm{T}}, \omega)=\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)} P_2(0, f(\bar{X}^{\varepsilon}+X^{*}(\theta_s\omega)))^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s \tag{24}$$

引理 5 假设 $\eta<\alpha<0$，$(X^{*}(\theta_{.}\omega), Y^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}$，$(u^{*}(\theta_{.}\omega), v^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}$ 分别为方程组(8)和(7)的稳态解，那么当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，有

$$\|(X^{*}(\theta_{.}\omega), Y^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}-(u^{*}(\theta_{.}\omega), v^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_\eta^-} \rightarrow 0$$

证 由方程组(11)和(12)有

$$\|(X^{*}(\theta_{.}\omega), Y^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}-(u^{*}(\theta_{.}\omega), v^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_\eta^-}=$$

$$\sup_{t \leqslant 0} \mathrm{e}^{-\eta s}\left\|\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-s)} P_2 \sigma \mathrm{d}(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{\mathrm{T}}+\right.$$

$$\left.\int_{\infty}^{s} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}(t-s)} P_1 \sigma \mathrm{d}(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{\mathrm{T}}\right\|_E \leqslant$$

$$\sup_{t\leqslant 0} e^{-\eta s} \left\| \int_{\infty}^{s} e^{-A(t-s)} P_1 \sigma d(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T} \right\|_E +$$
$$\sup_{t\leqslant 0} e^{-\eta s} \left\| \int_{-\infty}^{s} e^{-A(t-s)} P_2 \sigma d(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T} \right\|_E \tag{25}$$

记不等式(25)的最后一个不等号后的两个加式分别为 I_1，I_2. 对 I_1，由分部积分得

$$\int_{\infty}^{t} e^{-A(t-s)} P_1 \sigma d(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T} =$$
$$P_1\sigma(0, W(s)-\Phi^{\varepsilon}(s))^{T} + \int_{\infty}^{s} e^{-A(t-s)} P_1 A\sigma(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T} dr$$
$$I_1 \leqslant \sup_{t\leqslant 0} e^{-\eta s} \mid P_1\sigma \mid \|(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T}\|_E +$$
$$\sup_{t\leqslant 0} e^{-\eta s} \int_{s}^{\infty} e^{-A(t-s)} \mid P_1 C\sigma \mid \|(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T}\|_E dr \leqslant$$
$$\sup_{t\leqslant 0} e^{-\eta s} \mid P_1\sigma \mid \|(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T}\|_E +$$
$$\sup_{t\leqslant 0} e^{-\eta s} \int_{s}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)} \mid P_1 A\sigma \mid \|(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T}\|_E dr \tag{26}$$

记不等式(26)的最后一个不等号后的两个加式分别为 I_{11}，I_{12}，易知，当 $\varepsilon\to 0$ 时有 $I_{11}\to 0$. 对 I_{12}，通过引理 1，对 $\tilde{\varepsilon}>0$，$\delta>0$，存在 T 使得 $e^{-\delta s}\|W(s)-\Phi^{\varepsilon}(s)\|\leqslant\tilde{\varepsilon}$，

$$e^{-\eta s}\int_{s}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)} \mid P_1 C\sigma \mid \|(0, W(r)-\Phi^{\varepsilon}(r))^{T}\|_E dr \leqslant$$
$$e^{-\eta s}\int_{s}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)} (0, e^{\delta r}\tilde{\varepsilon})^{T} \mid P_1 C\sigma \mid dr =$$
$$\tilde{\varepsilon} e^{(\alpha-\eta)s}\int_{s}^{\infty} (0, e^{-(\alpha-\delta)r})^{T} \mid P_1 C\sigma \mid dr \leqslant$$
$$\mid P_1 C\sigma \mid \frac{e^{(\alpha-\eta)s}}{\alpha-\delta}$$

因此，$I_{12}<\dfrac{\tilde{\varepsilon}\mid P_1 A\sigma\mid}{\alpha-\delta}$. 从而表明，当 $\varepsilon\to 0$，$I_{12}\to 0$. 相似地，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$I_2\to 0$. 所以，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|(X^*(\theta_{\cdot}\omega), Y^*(\theta_{\cdot}\omega))^{T}-(u^*(\theta_{\cdot}\omega), v^*(\theta_{\cdot}\omega))^{T}\|_{C_\eta^-}\to 0$.

定理 1　假设指数二分性条件(5)与条件(15)和(16)成立，并且 $\alpha<\eta<0$，那么对几乎所有的样本 ω，当 $\omega\to 0$ 时，在 C_η^- 中方程组(3)的解逼近方程组(4)的解.

证　由(19)和(23)式，有

$$\|(\overline{X}^{\varepsilon}(t), \overline{Y}^{\varepsilon}(t))^{T}-(\overline{u}(t), \overline{v}(t))^{T}\|_E \leqslant$$
$$e^{At}P_1(X^*(\omega)-u^*(\omega), Y^*(\omega)-v^*(\omega))^{T}+$$
$$\int_0^t e^{A(t-s)}P_1L_f\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}+X^*(\theta_s\omega))^{T}-(0, \overline{u}+u^*(\theta_s\omega))^{T}\|_E ds+$$
$$\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}P_2L_f\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}+X^*(\theta_s\omega))^{T}-(0, \overline{u}+u^*(\theta_s\omega))^{T}\|_E ds\leqslant$$
$$e^{At}P_1(X^*(\omega)-u^*(\omega), Y^*(\omega)-v^*(\omega))^{T}+\int_0^t e^{A(t-s)}P_1L_f\|(0, X^*(\theta_s\omega)-u^*(\theta_s\omega))^{T}\|_E ds+$$
$$\int_0^t e^{A(t-s)}P_1L_f\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}-\overline{u}(s))^{T}\|_E ds+$$
$$\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}P_2L_f\|(0, X^*(\theta_s\omega)-u^*(\theta_s\omega))^{T}\|_E ds+$$
$$\int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}P_2L_f\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}-\overline{u}(s))^{T}\|_E ds \tag{27}$$

在(27)式不符项中同乘 $\mathrm{e}^{-\eta t}$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\eta t}\,\|(\overline{X}^{\varepsilon}(t),\ \overline{Y}^{\varepsilon}(t))^{\mathrm{T}}-(\overline{u}(t),\ \overline{v}(t))^{\mathrm{T}}\|_{E}\leqslant\\&\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}P_{1}(X^{*}(\omega)-u^{*}(\omega),\ Y^{*}(\omega)-v^{*}(\omega))^{\mathrm{T}}+\\&\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}P_{1}L_{f}\mathrm{e}^{\eta s}\,\|(0,\ X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s+\\&\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}P_{1}L_{f}\mathrm{e}^{\eta s}\,\|(0,\ \overline{X}^{\varepsilon}(\cdot)-\overline{u}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s+\\&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}P_{2}L_{f}\mathrm{e}^{\eta s}\,\|(0,\ X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s+\\&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}P_{2}L_{f}\mathrm{e}^{\eta s}\,\|(0,\ \overline{X}^{\varepsilon}(\cdot)-\overline{u}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}&\|(\overline{X}^{\varepsilon}(\cdot),\ \overline{Y}^{\varepsilon}(\cdot))^{\mathrm{T}}-(\overline{u}(\cdot),\ \overline{v}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\leqslant\\&\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}P_{1}(X^{*}(\omega)-u^{*}(\omega),\ Y^{*}(\omega)-v^{*}(\omega))^{\mathrm{T}}+\\&\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}KL_{f}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,\|(0,\ X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s+\\&\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}KL_{f}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,\|(0,\ \overline{X}^{\varepsilon}(\cdot)-\overline{u}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s+\\&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\beta(t-s)}KL_{f}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}+\|(0,\ X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s+\\&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\beta(t-s)}KL_{f}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,\|(0,\ \overline{X}^{\varepsilon}(\cdot)-\overline{u}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\mathrm{d}s\leqslant\\&\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}P_{1}(X^{*}(\omega)-u^{*}(\omega),\ Y^{*}(\omega)-v^{*}(\omega))^{\mathrm{T}}+\\&KL_{f}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\eta-\beta}\right)\|(0,\ X^{*}(\theta_{.}(\omega))-u^{*}(\theta_{.}(\omega)))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}+\\&KL_{f}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\eta-\beta}\right)\|(0,\ \overline{X}^{\varepsilon}(\cdot)-\overline{u}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\end{aligned}$$

而

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}P_{1}(X^{*}(\omega)-u^{*}(\omega),\ Y^{*}(\omega)-v^{*}(\omega))^{\mathrm{T}}\leqslant K\,\|(X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega),\ Y^{*}(\theta_{.}\omega)-v^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}$$

所以

$$\begin{aligned}&\|(X^{*}(\cdot)-u^{*}(\cdot),\ Y^{*}(\cdot)-v^{*}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}-\\&KL_{f}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\eta-\beta}\right)\|(0,\ X^{*}(\cdot)-u^{*}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\leqslant\\&K\,\|(X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega),\ Y^{*}(\theta_{.}\omega)-v^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}+\\&KL_{f}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\eta-\beta}\right)\|(0,\ X^{*}(\theta_{.}\omega)-u^{*}(\theta_{.}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\end{aligned}$$

由引理 4，可得

$$\begin{aligned}&\|(X^{*}(\cdot)-u^{*}(\cdot),\ Y^{*}(\cdot)-v^{*}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}-\\&KL_{f}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\eta-\beta}\right)\|(0,\ X^{*}(\cdot)-u^{*}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\to 0\end{aligned}$$

因此

$$\|(X^{*}(\cdot)-u^{*}(\cdot),\ Y^{*}(\cdot)-v^{*}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}\to 0$$

由变换(21)和(17)，可以得到当 $\omega\to 0$ 时

$$\|(X^{\varepsilon}(\cdot), Y^{\varepsilon}(\cdot))^{\mathrm{T}}-(u(\cdot), v(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}} \rightarrow 0$$

定理 2　假设指数二分性条件(5)与条件(15)和(16)成立，并且 $\alpha<\eta<0$，那么对几乎所有的样本 ω，当 $\omega \rightarrow 0$ 时，方程组(3)的惯性流形被方程组(4)的惯性流形逼近.

证　首先当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时由惯性流形映射(24)和(20)式，有

$$\begin{aligned}
&\|h^{\varepsilon}(\xi, \omega)-h(\xi, \omega)\|_{E}= \\
&\left\|\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}s} P_{2}\left[(0, f(\overline{X}^{\varepsilon}+X^{*}(\theta_{s}\omega)))^{\mathrm{T}}-(0, f(\overline{u}+u^{*}(\theta_{s}\omega)))^{\mathrm{T}}\right] \mathrm{d}s\right\|_{E} \leqslant \\
&-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\beta s} L_{f}\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}(s)-\overline{u}(s))^{\mathrm{T}}+(0, X^{*}(\theta_{s}\omega)-u^{*}(\theta_{s}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{E} \mathrm{d}s \leqslant \\
&-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\beta s} L_{f}(\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}(s)-\overline{u}(s))^{\mathrm{T}}\|_{e}+\|(0, X^{*}(\theta_{s}\omega)-u^{*}(\theta_{s}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{E}) \mathrm{d}s \leqslant \\
&-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\eta-\beta) s} L_{f}(\|(0, \overline{X}^{\varepsilon}(\cdot)-\overline{u}(\cdot))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}+\|(0, X^{*}(\theta_{\cdot}\omega)-u^{*}(\theta_{\cdot}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}}) \mathrm{d}s \leqslant \\
&\frac{K L_{f}(1+K)}{(\beta-\eta)(1-K L)}\|(0, X^{*}(\theta_{\cdot}\omega)-u^{*}(\theta_{\cdot}\omega))^{\mathrm{T}}\|_{C_{\eta}^{-}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

即 $h^{\varepsilon}(\xi, \omega) \rightarrow h(\xi, \omega)$，所以 $\widetilde{M}(\omega)$ 可被 $\widetilde{M}^{\varepsilon}(\omega)$ 逼近. 再由注 1，最终可得方程组(4)的惯性流形逼近方程组(3)的惯性流形.

参考文献：

[1] LU K N，SCHMALFUβ B. Invariant Manifolds for Stochastic Wave Equations [J]. Journal of Differential Equations，2007，236(2)：460-492.

[2] LIU Z X. Stochastic Inertial Manifolds for Damped Wave Equations [J]. Stochastics and Dynamics，2010， 10(2)：211-230.

[3] EUGENEW，MOSHEZ K. On the Relation between Ordinary and Stochastic Differential Equations [J]. International Journal of Engineering Science，1965，3(2)：213-229.

[4] WONG E，ZAKAI M S. On the Convergence of Ordinary Integrals to Stochastic Integrals [J]. The Annals of Mathematical Statistics，1965，36(5)：1560-1564.

[5] ACQUISTAPACE P，TERRENI B. An Approach to Ito Linear Equations in Hilbert Spaces by Approximation of White Noise with ColouredNoise [J]. Stochastic Analysis and Applications，1984，2(2)：131-186.

[6] SHEN J，LU K N. Wong-Zakai Approximations and Center Manifolds of Stochastic Differential Equations [J]. Journal of Differential Equations，2017，263(8)：4929-4977.

[7] ADAMS R. Sobolev Spaces [M]. New York：Academic Press，1975.

[8] LV Y，WANG W，ROBERTS A J. Approximation of the Random Inertial Manifold of Singularly Perturbed Stochastic Wave Equations [J]. Stochastics and Dynamics，2014，14(2)：1350018.

[9] JIANG T，LIU X M，DUAN J Q. Approximation for Random Stable Manifolds under Multiplicative Correlated Noises [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B，2016，21(9)：3163-3174.

[10] JIANG T，LIU X M，DUAN J Q. A Wong-Zakai Approximation for Random Invariant Manifolds [J]. Journal of Mathematical Physics，2017，58(12)：122701.

[11] DUAN J Q，LU K N，SCHMALFUSS B. Smooth Stable and Unstable Manifolds for Stochastic Partial Differential Equations [J]. Journal of Dynamics & Differential Equations，2004，16(4)：949-972.

[12] BARBU V，PRATO G D. The Stochastic Nonlinear Damped Wave Equation [J]. Applied Mathematics & Optimization，2002，46(2-3)：125-141.

[13] HAIRER M，PARDOUX É. A Wong-Zakai Theorem for Stochastic PDEs [EB/OL]. Journal of the Mathematical Society of Japan，2015，67(4)：1551-1604.

[14] TESSITORE G, ZABCZYK J. Wong-Zakai Approximations of Stochastic Evolution Equations [J]. Journal of Evolution Equations, 2006, 6(4): 621-655.

[15] ARNOLD L. Random Dynamical Systems [M]. Berlin: Springer, 1998.

[16] PETTERSSON R. Wong-Zakai Approximations for Reflecting Stochastic Differential Equations [J]. Stochastic Analysisand Applications, 1999, 17(4): 609-617.

[17] LV Y, WANG W. Limiting Dynamics for Stochastic Wave Equations [J]. Journal of Differential Equations, 2008, 244(1): 1-23.

[18] DUAN J Q, LU K N, SCHMALFUSS B. Invariant Manifolds for Stochastic Partial Differential Equations [J]. The Annals of Probability, 2003, 31(4): 2109-2135.

Approximationfor Inertial Manifold of a Stochastic Wave Equation with Additive Noise

LI Qin[1,2], CHEN Guang-gan[1]

1. School of Mathematical Science/V. C. & V. R. Key Lab, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China;
2. Sichuan Jiangyou Middle School, Jiangyou Sichuan 621700, China

Abstract: This paper is concerned with a Wong-Zakai type of approximation for the inertial manifold of a stochastic wave equation with additive noise. On the basis of an analysis of the characteristics of this stochastic wave equation, theconvergence of the solutions on the invariant manifolds is considered. It is proved that the inertial manifold of wave equations with smooth noise approximates that of the original system.

Key words: stochastic wave equation; inertial manifold; Wong-Zakai type approximation

责任编辑 张 枸