第 43 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2021 年 2 月
Vol. 43 No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb. 2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.02.011

测度中立型泛函微分方程的稳定性

李宝麟，　席　娅

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：借助广义常微分方程与测度中立型泛函微分方程的等价关系，运用 Lyapunov 泛函方法以及广义常微分方程的变差稳定性和变差渐近稳定性定理，建立了测度中立型泛函微分方程的一致稳定性和一致渐近稳定性定理. 然后通过重新定义 Lyapunov 泛函，建立了测度中立型泛函微分方程新的一致稳定性和一致渐近稳定性定理.

关 键 词：测度中立型泛函微分方程；广义常微分方程；一致稳定性；一致渐近稳定性；Lyapunov 泛函

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2021)02-0079-11

我们考虑测度中立型泛函微分方程

$$\mathrm{D}[N(x_t, t)] = f(x_t, t)\mathrm{D}g \tag{1}$$

的稳定性，其中 $\mathrm{D}[N(x_t, t)]$ 和 $\mathrm{D}g(t)$ 是 $N(x_t, t)$ 和 $g(t)$ 的分布导数，$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta \in [-r, 0]$，$t \in [t_0, +\infty)$，且 N 是一个线性的非自治算子. 测度微分方程已经被很多学者研究[1-4]. 文献[5]建立了测度泛函微分方程的 Lyapunov 定理. 文献[6]建立了测度微分方程和时间尺度上动力方程的 Lyapunov 稳定性. 文献[7-9]利用非单调 Lyapunov 泛函研究了滞后型方程的稳定性. 文献[10]在不利用 Lyapunov 泛函方法的情况下研究了多变时滞 Volterra 型动力系统的稳定性. 文献[11]利用 Lyapunov 泛函研究了一类潜伏期和传染病期均传染的 SEIQR 流行病模型的稳定性. 文献[12]通过 Lyapunov 泛函建立了非自治泛函微分方程的渐近稳定性定理. 文献[13]运用广义常微分方程的变差稳定性和 Lyapunov 泛函建立了变差脉冲泛函微分方程的稳定性定理.

设$[a, b] \subset \mathbb{R}$ 是一个紧区间，函数 $f:[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为$[a, b]$上的正则函数是指函数 f 的左右极限 $f(t^+) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} f(t+\varepsilon)(t \in [a, b))$，$f(t^-) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^-} f(t+\varepsilon)(t \in (a, b])$ 分别存在. 用 $G([a, b], \mathbb{R}^n)$ 表示所有正则函数 $f:[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 所成的空间，用 $G^-([a, b], \mathbb{R}^n)$ 表示空间 $G([a, b], \mathbb{R}^n)$ 中所有有界左连续函数的集合，定义范数 $\| f \|_\infty = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \| f(t) \|$，则 $G^-([a, b], \mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间.

设 $\mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{R}: z \geqslant 0\}$，若 $b: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是单调递增函数，且 $b(0) = 0$，则称函数 b 是 Hahn class 函数.

设 $r > 0$，给定一个函数 $y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$，设 $y_t \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$，定义 $y_t(\theta) = y(t+\theta)$，$\theta \in [-r, 0]$，$t \in \mathbb{R}$. 则对于 $t_0 \geqslant 0$ 及函数 $y \in G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$，有 $y_t \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$，$t \in [t_0, +\infty)$.

方程(1)的积分形式为

$$N(t)x_t = N(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)\mathrm{d}g(s) \tag{2}$$

其中右边的积分是关于不减函数 $g:[t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 的 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 积分，N 是线性非自

收稿日期：2020-06-17

基金项目：国家自然科学基金项目(11761063).

作者简介：李宝麟，博士，教授，主要从事微分方程与应用的研究.

治算子，被定义为

$$N(t)\varphi=\varphi(0)-\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_{\theta}[\mu(t,\theta)]\varphi(\theta) \tag{3}$$

其中函数 $\mu:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ 是可测的正规化函数，并且 μ 在 $\theta\in(-r,0)$ 上是左连续函数，在 $\theta\in[-r,0]$ 上是有界变差的，且 μ 在 $[s,0]$ 上的全变差 $\mathrm{var}_{[s,0]}\mu\rightarrow 0(s\rightarrow 0)$，$\varphi\in G^{-}([-r,0],\mathbb{R}^{n})$，$t\in\mathbb{R}$. 由(3)式，(2)式可改写为

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)+\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_{\theta}[\mu(t,\theta)]x(t+\theta)-\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_{\theta}[\mu(t_0,\theta)]x(t_0+\theta) \tag{4}$$

(4)式右边的积分可以是 Riemann-Stieltjes 积分、Lebesgue-Stieltjes 积分或 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 积分[14].

设 $O\subset G^{-}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^{n})$ 是开集，O 具有延拓性质是指对每个 $y\in O$，$\tilde{t}\in[t_0,+\infty)$，都有 $\tilde{y}\in O$，其中函数 $\tilde{y}$ 定义为：$\tilde{y}(t)=y(t)$，$t_0-r\leqslant t\leqslant\tilde{t}$；$\tilde{y}(t)=y(\tilde{t})$，$\tilde{t}<t<+\infty$. 特别地，$G^{-}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^{n})$ 中的任意开球都具有延拓性质.

假设函数 $f:P\times[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$，$P=\{y_t:y\in O,t\in[t_0,+\infty)\}\subset G^{-}([-r,0],\mathbb{R}^{n})$，$g:[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是不减函数，且满足以下条件：

(H_1) 对每个 $y\in O$，$t\in[t_0,+\infty)$，Kurzweil-Henstock-Stieltjes 积分 $\int_{t_0}^{t}f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在；

(H_2) 存在关于函数 g 的局部 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数 $M:[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_{+}$，使得对每个 $x\in P$，$u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$，有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)\right|\leqslant\int_{u_1}^{u_2}M(s)\mathrm{d}g(s)$$

(H_3) 存在关于函数 g 的局部 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数 $L:[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_{+}$，使得对每个 $x,y\in P$，$u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$，有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}[f(x_s,s)-f(y_s,s)]\mathrm{d}g(s)\right|\leqslant\int_{u_1}^{u_2}L(s)\|x_s-y_s\|_{\infty}\mathrm{d}g(s)$$

假设正规化函数 $\mu:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足以下条件：

(H_4) $\mu(t,\cdot)$ 在 $(-r,0)$ 上是左连续的，在 $[-r,0]$ 上是有界变差的，并且 $\mu(t,\cdot)$ 的全变差 $\mathrm{var}_{[s,0]}\mu(t,\cdot)\rightarrow 0(s\rightarrow 0)$；

(H_5) 存在一个局部 Kurzweil-Henstock 可积函数 $C:[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}_{+}$，使得对每个 $u_1,u_2\in[t_0,+\infty)$，$z\in O$，有

$$\left|\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_{\theta}[\mu(u_2,\theta)]z(u_2+\theta)-\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_{\theta}[\mu(u_1,\theta)]z(u_1+\theta)\right|\leqslant\int_{u_1}^{u_2}C(s)\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_{\theta}[u(s,\theta)]\|z(s+\theta)\|\mathrm{d}s$$

1 预备知识

定义 1[15] 函数 $Q:[a,b]\times[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$ 在区间 $[a,b]$ 上 Kurzweil 可积是指：存在 $I\in\mathbb{R}^{n}$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta:[a,b]\longrightarrow(0,+\infty)$，且对 $[a,b]$ 上的任何 $\delta(\tau)$-精细分划 $D=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i])\}_{i=1}^{n}$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}[Q(\tau_i,\alpha_i)-Q(\tau_i,\alpha_{i-1})]-I\right\|<\varepsilon$$

其中 $\tau_i\in[\alpha_{i-1},\alpha_i]\subset[\tau_i-\delta(\tau_i),\tau_i+\delta(\tau_i)]$. 称 $I\in\mathbb{R}^{n}$ 为 Q 在 $[a,b]$ 上的 Kurzweil 积分，记作 $I=\int_{a}^{b}\mathrm{D}Q(\tau,t)$. 特别地，当 $Q(\tau,t)=f(\tau)g(t)$ 时，

$$\int_{a}^{b}\mathrm{D}Q(\tau,t)=\int_{a}^{b}f(s)\mathrm{d}g(s)$$

设 $E:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$，$\Omega=O\times[t_0,+\infty)$.

定义 2[15]　函数 $x:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 为广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DE(x,t) \tag{5}$$

在区间$[\alpha,\beta]\subset[t_0,+\infty)$上的解是指：对每个 $\gamma,v\in[\alpha,\beta]$，$(x(t),t)\in\Omega$，$t\in[\alpha,\beta]$，有

$$x(v)-x(\gamma)=\int_{\gamma}^{v}DE(x(\tau),t)$$

设集合 $O=B_c=\{x\in G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n):\|x\|\leqslant c,c>0\}$ 具有延拓性质，且

$$P=\{y_t:y\in B_c,t\in[t_0,+\infty)\}\subset G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)$$

引入概念$[\cdot,\cdot,\cdot]$，其中对于 $a\leqslant c$，有：$[a,b,c]=b$，$b\in[a,c]$；$[a,b,c]=a$，$b\leqslant a$；$[a,b,c]=c$，$b\geqslant c$. 对于每个 $y\in B_c$，$t\in[t_0,+\infty)$，$\vartheta\in[t_0-r,+\infty)$，定义函数

$$H(y,t)(\vartheta)=\int_{t_0}^{[t_0,\vartheta,t]}f(y_s,s)\mathrm{d}g(s)$$

$$J(y,t)(\vartheta)=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_\theta[\mu([t_0,\vartheta,t],\theta)]y([t_0,\vartheta,t]+\theta)-\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_\theta[\mu(t_0,\theta)]y(t_0+\theta)$$

设函数 $F:B_c\times[t_0,+\infty)\longrightarrow G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$F(y,t)(\vartheta)=H(y,t)(\vartheta)+J(y,t)(\vartheta) \tag{6}$$

其中 $y\in B_c$，$t\in[t_0,+\infty)$，$\vartheta\in[t_0-r,+\infty)$. 假设函数 $f:P\times[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 满足条件(H_1)，(H_2)，(H_3)，正规化函数 $\mu:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件(H_4)，(H_5)，则由文献[15]的定义 3.8，对于 $s_1,s_2\in[t_0,+\infty)$，$x,y\in B_c$，有

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)\|\leqslant|h(s_2)-h(s_1)|$$

及

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)-F(y,s_2)+F(y,s_1)\|\leqslant\|x-y\|_\infty|h(s_2)-h(s_1)|$$

其中不减函数 $h:[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$h(t)=\int_{t_0}^{t}[L(s)+M(s)]\mathrm{d}g(s)+\int_{t_0}^{t}C(s)\mathrm{var}_{\theta\in[-r,0]}\mu(s,\theta)\mathrm{d}s(\|\tilde{z}\|_\infty+c) \tag{7}$$

其中 $\tilde{z}\in G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$. 显然函数 $F\in\mathfrak{J}(\Omega,h)$，其中 F 由(6)式给出，$\Omega=B_c\times[t_0,+\infty)$.

2　主要结果

设 $\overline{E}_\rho=\{y\in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n):\|y\|\leqslant\rho\}$ 及 $\overline{B}_\rho=\{x\in G^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n):\|x\|\leqslant\rho\}$，$0<\rho<c$.

假设测度中立型泛函微分方程(1)中的函数 $f:P\times[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 使得 $f(0,t)=0$，$t\in[t_0,+\infty)$，则 $y\equiv0$ 是测度中立型泛函微分方程(1)在$[t_0-r,+\infty)$上的解.

定义 3　设 $y\equiv0$ 是测度中立型泛函微分方程(4)的平凡解，

(i) 若对任意的 $t_0\geqslant0$，$\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得对 $\varphi\in P$ 及测度中立型泛函微分方程(4)在$[t_0-r,v]$上的解 $\overline{y}:[t_0-r,v]\longrightarrow\mathbb{R}^n$，有 $\overline{y}_{t_0}=\varphi$ 且 $\|\varphi\|<\delta$，则 $\|\overline{y}_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$，$t\in[t_0,v]$，则 y 是稳定的；

(ii) 若 (i) 中的数 δ 关于 t_0 是独立的，则 y 是一致稳定的；

(iii) 若存在 $\delta_0>0$，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $T=T(\varepsilon)\geqslant0$，使得对 $\varphi\in P$ 及测度中立型泛函微分方程(4)在$[t_0-r,v]$上的解 $\overline{y}:[t_0-r,v]\longrightarrow\mathbb{R}^n$，有 $\overline{y}_{t_0}=\varphi$ 且 $\|\varphi\|<\delta_0$，则 $\|\overline{y}_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$，$t\in[t_0,v]\cap[t_0+T,+\infty)$，则 y 是一致渐近稳定的.

给定 $t\geqslant t_0$ 和函数 $\psi\in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)$，方程(4)的初值条件为 $y_t=\psi$. 由文献[14]的定理 5.2，存在唯一解 $y:[t-r,v]\longrightarrow\mathbb{R}^n$，$[t-r,v]\subset[t-r,+\infty)$. 则由文献[14]的定理 4.4，可以找到广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=\mathrm{D}F(x,t) \tag{8}$$

关于初值条件 $x(t)=\tilde{x}$ 的解 $x:[t,v]\longrightarrow G^{-}([t,v],\mathbb{R}^n)$，其中 $F:B_c\times[t_0,+\infty)\longrightarrow G^{-}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 由(6)式给出，且

$$\tilde{x}(\vartheta)=\begin{cases}\psi(\vartheta-t) & t-r\leqslant\vartheta\leqslant t\\ \psi(0) & \vartheta\geqslant t\end{cases} \tag{9}$$

则 $x(t)(t+\theta)=y(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，即 $(x(t))_t=y_t$. 因此对每个 $\eta\geqslant 0$，$y_{t+\eta}=y_{t+\eta}(t,\psi)$，则泛函 $U:[t_0,+\infty)\times G^{-}([-r,0],\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R}$ 的右导数定义为

$$\mathrm{D}^{+}U(t,\psi)=\limsup_{\eta\to 0^{+}}\frac{U(t+\eta,y_{t+\eta}(t,\psi))-U(t,y_t(t,\psi))}{\eta}\qquad t\geqslant t_0$$

由(9)式，存在广义常微分方程(8)的唯一解 $x:[t,\bar{v}]\longrightarrow G^{-}([t,\bar{v}],\mathbb{R}^n)$，使得 $x(t)=\tilde{x}$，$[t,\bar{v}]\subset[t_0,+\infty)$. 由文献[14]的定理4.5，存在测度中立型泛函微分方程(4)的解 $y:[t-r,\bar{v}]\longrightarrow\mathbb{R}^n$，满足 $y_t=\psi$，在这种情况下，用 $x_\psi(t)$ 替换 $x(t)$，有 $y_t(t,\psi)=(x_\psi(t))_t=\psi$. 则 $(t,x_\psi(t))\longrightarrow(t,y_t(t,\psi))$ 是一一对应映射，并且可以定义泛函 $V:[t_0,+\infty)\times G^{-}([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$V(t,x_\psi(t))=U(t,y_t(t,\psi)) \tag{10}$$

则有

$$\mathrm{D}^{+}U(t,\psi)=\limsup_{\eta\to 0^{+}}\frac{V(t+\eta,x_\psi(t+\eta))-V(t,x_\psi(t))}{\eta} \tag{11}$$

注1 给定 $t\geqslant t_0$，由

$$\|y_t(t,\psi)\|=\|y_t\|=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|y(t+\theta)|=\sup_{t-r\leqslant\vartheta\leqslant t}|y(\vartheta)|=$$
$$\sup_{t-r\leqslant\vartheta\leqslant t}|x_\psi(t)(\vartheta)|=\sup_{t-r\leqslant\vartheta<+\infty}|x_\psi(t)(\vartheta)|=\|x_\psi(t)\|$$

则有 $\|y_t(t,\psi)\|=\|x_\psi(t)\|$.

引理1 考虑测度中立型泛函微分方程(4)，其中 $g:[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是不减函数，$f:P\times[t_0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 满足条件(H_1),(H_2),(H_3)，正规化函数 $\mu:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件(H_4),(H_5). 假设 $U:[t_0,+\infty)\times\bar{E}_\rho\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足以下条件：

(ⅰ) $U(t,0)=0$，$t\in[t_0,+\infty)$；

(ⅱ) 存在常数 $K>0$，使得 $|U(t,\psi)-U(t,\bar{\psi})|\leqslant K\|\psi-\bar{\psi}\|$，$t\in[t_0,+\infty)$，$\psi,\bar{\psi}\in\bar{E}_\rho$.

则函数 $V:[t_0,+\infty)\times\bar{B}_\rho\longrightarrow\mathbb{R}$ 由(10)式给定，满足条件：

(ⅲ) $V(t,0)=0$，$t\in[t_0,+\infty)$；

(ⅳ) 对于常数 $K>0$，有 $|V(t,z)-V(t,\bar{z})|\leqslant K\|z-\bar{z}\|$，$t\in[t_0,+\infty)$，$z,\bar{z}\in\bar{B}_\rho$.

证 给定 $t\geqslant t_0$，$\psi,\bar{\psi}\in\bar{E}_\rho$. 设 $y,\bar{y},\hat{y}:[t-r,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是测度中立型泛函微分方程(4)的解，使得 $y_t=\psi$，$\bar{y}_t=\bar{\psi}$，$\hat{y}_t=0$. 设 $x,\bar{x},\hat{x}$ 是广义常微分方程(8)在 $[t,+\infty)$ 上关于 $y,\bar{y},\hat{y}$ 的解，则

$$(x(t))_t=y_t=\psi\qquad(\bar{x}(t))_t=\bar{y}_t=\bar{\psi}\qquad(\hat{x}(t))_t=\hat{y}_t=0$$

由注1，$x_\psi(t),x_{\bar{\psi}}(t)\in\bar{B}_\rho$. 设 $V:[t_0,+\infty)\times\bar{B}_\rho\longrightarrow\mathbb{R}$ 由(10)式给出. 由于对所有 $\vartheta\in[t_0-r,+\infty)$，有 $\hat{x}(t)(\vartheta)=0$，即 $\hat{x}(t)\equiv 0$，由条件(ⅰ)，有 $0=U(t,0)=U(t,\hat{y}_t(t,0))=V(t,\hat{x}(t))=V(t,0)$. 由条件(ⅱ)，有

$$|V(t,x_\psi(t))-V(t,\bar{x}_{\bar{\psi}}(t))|=|U(t,y_t(t,\psi))-U(t,\bar{y}_t(t,\bar{\psi}))|=|U(t,\psi)-U(t,\bar{\psi})|$$

则由注1，有

$$|V(t,x_\psi(t))-V(t,\bar{x}_{\bar{\psi}}(t))|\leqslant K\|\psi-\bar{\psi}\|=K\|x_\psi(t)-\bar{x}_{\bar{\psi}}(t)\| \tag{12}$$

显然，对于 $t\geqslant t_0$，$z,\bar{z}\in\bar{B}_\rho$，存在广义常微分方程(8)的解 $x,\bar{x}$，并且 $\psi,\bar{\psi}\in G^{-}([-r,0],\mathbb{R}^n)$，使得

$$z = x_\psi(t) \qquad (x_\psi(t))_t = y_t(t, \psi) \qquad \bar{z} = x_{\bar{\psi}}(t) \qquad (\bar{x}_{\bar{\psi}}(t))_t = \bar{y}_t(t, \bar{\psi})$$

由注 1，有

$$\| \psi \| = \| y_t(t, \psi) \| = \| x_\psi(t) \| = \| z \| \leqslant \rho$$

$$\| \bar{\psi} \| = \| \bar{y}_t(t, \bar{\psi}) \| = \| \bar{x}_{\bar{\psi}}(t) \| = \| \bar{z} \| \leqslant \rho$$

则由(12) 式，有 $|V(t, z) - V(t, \bar{z})| \leqslant K \| z - \bar{z} \|$.

定理 1　设 $g: [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是不减函数，$f: P \times [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件(H_1),(H_2),(H_3)，正规化函数 $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件(H_4),(H_5). 假设函数 $U: [t_0, +\infty) \times \bar{E}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上是左连续的，且满足以下条件：

(i) $U(t, 0) = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$；

(ii) 存在常数 $K > 0$ 使得 $|U(t, \psi) - U(t, \bar{\psi})| \leqslant K \| \psi - \bar{\psi} \|$, $t \in [t_0, +\infty)$, $\psi, \bar{\psi} \in \bar{E}_\rho$；

(iii) 存在 Hahn class 函数 $b: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$，使得对所有 $t \geqslant t_0$ 及 $\psi \in \bar{E}_\rho$，有 $U(t, \psi) \geqslant b(\| \psi \|)$；

(iv) 对每个 $t \geqslant t_0$，$\psi \in \bar{E}_\rho$，不等式 $\mathrm{D}^+ U(t, \psi) \leqslant 0$ 成立.

则测度中立型泛函微分方程(4) 的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致稳定的.

证　由于函数 f 满足条件(H_1),(H_2),(H_3)，正规化函数 μ 满足条件(H_4),(H_5)，则方程(8) 中的函数 $F \in \mathfrak{F}(\Omega, h)$，其中 F 由(6) 式给定，$\Omega = B_c \times [t_0, +\infty)$，且不减函数 $h: [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 由(7) 式给出.

设 $V: [t_0, +\infty) \times \bar{B}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ 由(10) 式给定，由引理 1，有 $V(t, 0) = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$，及 $|V(t, z) - V(t, \bar{z})| \leqslant K \| z - \bar{z} \|$, $t \in [t_0, +\infty)$, $z, \bar{z} \in \bar{B}_\rho$. 由注 1 及条件 (iii)，对于给定的 $t \geqslant t_0$，有

$$b(\| x_\psi(t) \|) = b(\| y_t \|) \leqslant U(t, y_t(t, \psi)) = V(t, x_\psi(t))$$

测度中立型泛函微分方程(4) 的解 $y: [t - r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 满足 $y_t = \psi$，则由引理 1，有 $V(t, z) \geqslant b(\| z \|)$, $z \in \bar{B}_\rho$.

由条件 (iv) 及文献[16] 的定理 1，则广义常微分方程(8) 的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差稳定的. 则由文献[16] 的定义 1，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得若 $\bar{x}: [\gamma, v] \longrightarrow B_c$, $t_0 \leqslant \gamma < v < +\infty$ 在 $[\gamma, v]$ 上是有界变差函数，并且 $\| \bar{x}(\gamma) \| < \delta$ 及 $\mathrm{var}_\gamma^v \left(\bar{x}(s) - \int_\gamma^s \mathrm{D}F(\bar{x}(\tau), t) \right) < \delta$，则

$$\| \bar{x}(t) \| < \varepsilon \qquad t \in [\gamma, v] \tag{13}$$

设 $\varphi \in P$，$\bar{y}: [t_0 - r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是测度中立型泛函微分方程(4) 的关于初值条件 $\bar{y}_{t_0} = \varphi$ 的解，假设

$$\| \varphi \| < \delta \tag{14}$$

下面证明

$$\| \bar{y}_t(t_0, \varphi) \| < \varepsilon \qquad t \in [t_0, +\infty) \tag{15}$$

令 $\bar{y}_t = \bar{y}_t(t_0, \varphi)$，并且定义

$$\bar{x}(t)(\vartheta) = \begin{cases} \bar{y}(\vartheta) & t_0 - r \leqslant \vartheta \leqslant t \\ \bar{y}(t) & \vartheta > t \end{cases} \tag{16}$$

由文献[14] 的定理 4.4，$\bar{x}(t)$ 是广义常微分方程(8) 在 $[t_0, +\infty)$ 上的解，满足初值条件 $\bar{x}(t_0) = \tilde{x}$，其中

$$\tilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \varphi(\vartheta - t_0) & t_0 - r \leqslant \vartheta \leqslant t_0 \\ \varphi(0) & \vartheta > t_0 \end{cases} \tag{17}$$

并且 $\bar{x}(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上是有界变差的.

由(14),(17) 式，有

$$\| \bar{x}(t_0) \| = \sup_{t_0 - r \leqslant \vartheta < +\infty} |\tilde{x}(\vartheta)| = \| \varphi \| < \delta$$

$$\mathrm{var}_{t_0}^v \left(\bar{x}(s) - \int_{t_0}^s \mathrm{D}F(\bar{x}(\tau), t) \right) = 0 < \delta$$

由(13)式,对所有 $t \in [t_0, v]$,有 $\|\overline{x}(t)\| < \varepsilon$,其中 $v \in (t_0, +\infty)$. 特别地,有 $\|\overline{x}(v)\| < \varepsilon$. 则由(16)式,对任意的 $t \in [t_0, v]$,有

$$\|\overline{y}_t(t_0, \varphi)\| = \|\overline{y}_t\| = \sup_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} |\overline{y}(t+\theta)| = \sup_{t_0 - r \leqslant \vartheta \leqslant v} |\overline{y}(\vartheta)| =$$

$$\sup_{t_0 - r \leqslant \vartheta \leqslant v} |\overline{x}(v)(\vartheta)| = \sup_{t_0 - r \leqslant \vartheta < +\infty} |\overline{x}(v)(\vartheta)| = \|\overline{x}(v)\| < \varepsilon \tag{18}$$

则(15)式成立,即测度中立型泛函微分方程(4)的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致稳定的.

定理2 设 $g: [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是不减函数,$f: P \times [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件(H_1),(H_2),(H_3),正规化函数 $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件(H_4),(H_5). 假设函数 $U: [t_0, +\infty) \times \overline{E}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足定理1中的条件(i)-(iii),并且假设存在连续函数 $\Lambda: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 满足 $\Lambda(0) = 0$ 及 $\Lambda(x) > 0$,$x \neq 0$,使得对每个 $\psi \in \overline{E}_\rho$,有

$$\mathrm{D}^+ U(t, \psi) \leqslant -\Lambda(\|\psi\|) \qquad t \geqslant t_0 \tag{19}$$

则测度中立型泛函微分方程(4)的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致渐近稳定的.

证 假设 $V: [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ 由(10)式给出,则文献[16]中定理1的所有条件成立. 设函数 $\Phi: \overline{B}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$ 被定义为 $\Phi(z) = \Lambda(\|z\|)$,$z \in \overline{B}_\rho$,则 Φ 是连续的,且 $\Phi(0) = 0$ 及 $\Phi(z) > 0$,$z \neq 0$.

假设 $x: [t, +\infty) \longrightarrow \overline{B}_\rho$ 是广义常微分方程(8)的解,使得 $(x(t))_t = \psi$,其中 $t \in [t_0, +\infty)$,$\psi \in \overline{E}_\rho$,并且假设 $y: [t-r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是测度中立型泛函微分方程(4)的解,使得 $y_t = \psi$. 由(19)式,有

$$\limsup_{\eta \to 0^+} \frac{V(t+\eta, x_\psi(t+\eta)) - V(t, x_\psi(t))}{\eta} =$$

$$\mathrm{D}^+ U(t, y_t(t, \psi)) = \mathrm{D}^+ U(t, \psi) \leqslant -\Lambda(\|\psi\|) = -\Lambda(\|y_t\|)$$

又由于 $\|y_t\| = \|x_\psi(t)\|$,则由注1,有

$$\limsup_{\eta \to 0^+} \frac{V(t+\eta, x_\psi(t+\eta)) - V(t, x_\psi(t))}{\eta} \leqslant -\Lambda(\|y_t\|) = -\Lambda(\|x_\psi(t)\|) = -\Phi(x_\psi(t))$$

并且文献[16]中定理2的条件成立,则广义常微分方程(8)的平凡解 $x \equiv 0$ 是变差渐近稳定的. 由文献[16]的定义1、定义2、定义3,存在 $\delta_0 > 0$,并且对每个 $\varepsilon > 0$,存在 $T = T(\varepsilon) \geqslant 0$ 及 $\zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$,使得若 $\overline{x}: [\gamma, v] \longrightarrow B_c$,其中 $t_0 \leqslant \gamma < v < +\infty$ 在 $[\gamma, v]$ 上是有界变差函数并且 $\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta_0$,及

$$\mathrm{var}_\gamma^v\left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^v \mathrm{D}F(\overline{x}(\tau), t)\right) < \zeta$$

则

$$\|\overline{x}(t)\| < \varepsilon \qquad t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, +\infty) \qquad \gamma \geqslant t_0 \tag{20}$$

给定 $\varepsilon > 0$,设 $\delta_0 > 0$ 及 $T = T(\varepsilon)$,设 $\varphi \in P$,并且 $\overline{y}: [t_0 - r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是测度中立型泛函微分方程(4)的解,使得 $\overline{y}_{t_0} = \varphi$. 假设

$$\|\varphi\| < \delta_0 \tag{21}$$

下面证明

$$\|\overline{y}_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon \qquad t \in [t_0 + T, +\infty) \tag{22}$$

由(21)式,有

$$\|\overline{x}(t_0)\| = \sup_{t_0 - r \leqslant \vartheta < +\infty} |\widetilde{x}(\vartheta)| = \|\varphi\| < \delta_0$$

$$\mathrm{var}_\gamma^v\left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^v \mathrm{D}F(\overline{x}(\tau), t)\right) = 0 < \zeta$$

由(20)式,定理1证明中的(18)式成立,即(22)式成立. 则测度中立型泛函微分方程(4)的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致渐近稳定的.

下面考虑Lyapunov泛函 $U: [t_0 - r, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,并且建立测度中立型泛函微分方程(4)的平凡解的新稳定性. 利用测度中立型泛函微分方程(4)的解定义 U 的导数为

$$D^+ U(t, y(t)) = \limsup_{\eta \to 0^+} \frac{U(t+\eta, y(t+\eta, t, \psi)) - U(t, y(t, t, \psi))}{\eta}$$

其中 $y(s, t, \psi)$ 是测度中立型泛函微分方程(4) 的解，满足 $y_t = \psi$，$\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. 给出一个初值函数 $\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ 且 $t \geqslant t_0$，由文献[14] 的定理 5.2，存在测度中立型泛函微分方程(4) 的唯一解满足 $y_t = \psi$，$y(t) = \psi(0)$，则 $D^+ U(t, y(t))$ 可以改写为 $D^+ U(t, \psi(0))$.

定理 3　设 $g: [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 是不减函数，$f: P \times [t_0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 满足条件(H_1),(H_2),(H_3)，正规化函数 $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足条件(H_4),(H_5). 假设函数 $U: [t_0 - r, +\infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 在$(t_0 - r, +\infty)$ 上是左连续的，极限

$$U(t^-, y(t^-)) = \lim_{s \to t^-} U(s, y(s)) \qquad t \in [t_0 - r, +\infty)$$

$$U(t^+, y(t^+)) = \lim_{s \to t^+} U(s, y(s)) \qquad t \in [t_0 - r, +\infty)$$

存在，且满足 $U(t^-, y(t^-)) = U(t, y(t))$，其中 $y \in G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$. 假设 U 满足以下条件：

(i) $U(t, 0) = 0$，$t \in [t_0 - r, +\infty)$；

(ii) 对每个 $a > 0$，存在常数 $K_a > 0$，使得

$$|U(t, x) - U(t, y)| \leqslant K_a \| x - y \| \qquad t \in [t_0 - r, +\infty), x, y \in B_a$$

其中 $B_a = \{z \in \mathbb{R}^n: \| z \| < a\}$；

(iii) 存在 Hahn class 函数 $b: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$，使得对任意的 $y \in G^-([t_0 - r, +\infty), \mathbb{R}^n)$，$t \in [t_0, +\infty)$，有 $U(t, y(t)) \geqslant b(\| y_t \|)$；

(iv) 存在函数 $\Lambda: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$，使得对 $t \in [t_0, +\infty)$，$\theta \in [-r, 0]$，$\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$，若 $U(t+\theta, \psi(\theta)) \leqslant U(t, \psi(0))$，有 $D^+ U(t, \psi(0)) \leqslant -\Lambda(|\psi(0)|)$.

则测度中立型泛函微分方程(4) 的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致稳定的.

证　对于 $s \geqslant t_0$ 及 $\xi \in \overline{E}_\rho$，定义

$$\overline{U}(s, \xi) = \sup_{\theta \in [-r, 0]} U(s+\theta, \xi(\theta)) \tag{23}$$

显然对所有 $s \geqslant t_0$，有 $\overline{U}(s, 0) = 0$.

给定 $t \geqslant t_0$，$\psi \in \overline{E}_\rho$，考虑测度中立型泛函微分方程(4) 的解 $y: [t - r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$，使得 $y_t = \psi$. 由文献[15] 的引理 3.10，广义常微分方程(8) 的解 x 是左连续的，并且由文献[14] 的定理 4.5 可知 y 也是左连续的，则函数 $\overline{U}(s, y(s))(s \in [t_0 - r, +\infty))$ 是左连续的. 由(23) 式，有

$$\overline{U}(t, \psi) = \overline{U}(t, y_t) = \sup_{\theta \in [-r, 0]} U(t+\theta, y(t+\theta)) \tag{24}$$

下面证明 $D^+ \overline{U}(t, \psi) = D^+ \overline{U}(t, y_t) \leqslant 0$. 设 $S(t) = \{U(t+\theta, y(t+\theta)): \theta \in [-r, 0]\}$.

考虑以下两种情况：

情形 1　假设 $\overline{U}(t, y_t)$ 属于 $S(t)$，则存在 $\theta_0 \in [-r, 0]$，使得

$$U(t+\theta_0, y(t+\theta_0)) = \overline{U}(t, y_t)$$

若 $\theta_0 = 0$，则 $\overline{U}(t, y_t) = U(t, y(t))$，由条件 (iv) 表明 $D^+ \overline{U}(t, y_t) \leqslant 0$. 若 $\theta_0 < 0$，由(24) 式及 θ_0 的取值，对所有 $\theta_0 < \theta \leqslant 0$，有

$$U(t+\theta, y(t+\theta)) < U(t+\theta_0, y(t+\theta_0))$$

则对所有足够小的 $q > 0$ 且 $q < |\theta_0|$，有

$$\overline{U}(t+q, y_{t+q}) = \sup_{\theta \in [-r, 0]} U(t+q+\theta, y(t+q+\theta)) = U(t+\theta_0, y(t+\theta_0)) = \overline{U}(t, y_t)$$

并且 $D^+ \overline{U}(t, y_t) = 0$.

情形 2　假设 $\overline{U}(t, y_t)$ 不属于 $S(t)$，则有 $\overline{U}(t, y_t) > U(t+\theta, y(t+\theta))$，$\theta \in [-r, 0]$，并且在 $[-r, 0]$ 上存在收敛数列 $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$，$\overline{\theta} = \lim_{n \to +\infty} \theta_n$，使得

$$\overline{U}(t, y_t)=\lim_{n\to+\infty}U(t+\theta_n, y(t+\theta_n))$$

假设存在可数多个 θ_{n_k} 使得 $\theta_{n_k}<\bar{\theta}$，则

$$\overline{U}(t, y_t)=\lim_{k\to+\infty}U(t+\theta_{n_k}, y(t+\theta_{n_k}))=U(t+\bar{\theta}, y(t+\bar{\theta}))$$

则 $\overline{U}(t, y_t)\in S(t)$，这与 $\overline{U}(t, y_t)$ 不属于 $S(t)$ 矛盾，也表明了 $\bar{\theta}<0$. 则对所有 n，假设 $\bar{\theta}<\theta_n<0$，有

$$\overline{U}(t, y_t)=U((t+\bar{\theta})^+, y((t+\bar{\theta})^+))$$

则对所有足够小的 $q>0$ 且 $q<|\bar{\theta}|$，有

$$\overline{U}(t+q, y_{t+q})=\sup_{\theta\in[-r,0]}U(t+q+\theta, y(t+q+\theta))=U((t+\bar{\theta})^+, y((t+\bar{\theta})^+))=\overline{U}(t, y_t)$$

因此 $\mathrm{D}^+\overline{U}(t, y_t)=0$.

下面证明 $\overline{U}$ 满足定理 1 中的条件 (ii). 对于 $t\geqslant t_0$，$\hat{\psi},\bar{\psi}\in\overline{E}_\rho$，设 $\hat{y},\bar{y}$ 是测度中立型泛函微分方程(4)的解，使得 $\hat{y}_t=\hat{\psi}$，$\bar{y}_t=\bar{\psi}$，则

$$\overline{U}(t, \hat{\psi})=\overline{U}(t, \hat{y}_t)=U(t+\theta_{\hat{\psi}}, \hat{y}(t+\theta_{\hat{\psi}}))$$

或

$$\overline{U}(t, \hat{\psi})=\overline{U}(t, \hat{y}_t)=U((t+\bar{\theta}_{\hat{\psi}})^+, \hat{y}((t+\bar{\theta}_{\hat{\psi}})^+))$$

及

$$\overline{U}(t, \bar{\psi})=\overline{U}(t, \bar{y}_t)=U(t+\theta_{\bar{\psi}}, \bar{y}(t+\theta_{\bar{\psi}}))$$

或

$$\overline{U}(t, \bar{\psi})=\overline{U}(t, \bar{y}_t)=U((t+\bar{\theta}_{\bar{\psi}})^+, \bar{y}((t+\bar{\theta}_{\bar{\psi}})^+))$$

其中函数 $\hat{\psi},\bar{\psi}\in\overline{E}_\rho$，$\theta_{\hat{\psi}},\theta_{\bar{\psi}}$ 及 $\bar{\theta}_{\hat{\psi}},\bar{\theta}_{\bar{\psi}}$ 分别对应于 $\theta_0,\bar{\theta}$.

考虑 $\overline{B}_\rho=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|<\rho\}$ 及 $B_c=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|<c\}$，$\rho<c$. 由于 $U((t+\bar{\theta}_{\hat{\psi}})^+, \hat{y}((t+\bar{\theta}_{\hat{\psi}})^+))$，$U((t+\bar{\theta}_{\bar{\psi}})^+, \bar{y}((t+\bar{\theta}_{\bar{\psi}})^+))$ 存在，条件 (ii) 表明对所有 $\theta\in[-r, 0]$，$\overline{B}_\rho\subset B_c$，$\hat{y}(t+\theta)$，$\bar{y}(t+\theta)\in\overline{B}_\rho$，有

$$\begin{aligned}|\overline{U}(t, \hat{\psi})-\overline{U}(t, \bar{\psi})|=&|\overline{U}(t, \hat{y}_t)-\overline{U}(t, \bar{y}_t)|=\\&|\sup_{\theta\in[-r,0]}U(t+\theta, \hat{y}(t+\theta))-\sup_{\theta\in[-r,0]}U(t+\theta, \bar{y}(t+\theta))|\leqslant\\&\sup_{\theta\in[-r,0]}|U(t+\theta, \hat{y}(t+\theta))-U(t+\theta, \bar{y}(t+\theta))|\leqslant\\&K_a\sup_{\theta\in[-r,0]}\|\hat{y}(t+\theta)-\bar{y}(t+\theta)\|=K_a\|\hat{y}_t-\bar{y}_t\|=K_a\|\hat{\psi}-\bar{\psi}\|\end{aligned}$$

另外，有

$$\overline{U}(t, \psi)=\overline{U}(t, y_t)\geqslant U(t, y(t))\geqslant b(\|y_t\|)=b(\|\psi\|)$$

则 $\overline{U}$ 满足定理 1 中的所有条件，即测度中立型泛函微分方程(4) 的平凡解 $y\equiv0$ 是一致稳定的.

定理 4 设 $g: [t_0, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 是不减函数，$f: P\times[t_0, +\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 满足条件(H_1)，(H_2)，(H_3)，正规化函数 $\mu: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件(H_4)，(H_5). 假设函数 $U: [t_0-r, +\infty)\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 在 $(t_0-r, +\infty)$ 上是左连续的，极限

$$U(t^-, y(t^-))=\lim_{s\to t^-}U(s, y(s))\qquad t\in[t_0-r, +\infty)$$

$$U(t^+, y(t^+))=\lim_{s\to t^+}U(s, y(s))\qquad t\in[t_0-r, +\infty)$$

存在，且满足 $U(t^-, y(t^-))=U(t, y(t))$，其中 $y\in G^-([t_0-r, +\infty), \mathbb{R}^n)$. 假设 U 满足定理 3 中的条件 (i),(ii),(iii)，并且存在 Hahn class 函数 $d: \mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$，使得对测度中立型泛函微分方程(4) 的每个解 y，有

$$\sup_{\theta\in[-r,0]}U(s+\theta, y(s+\theta))\leqslant d(\|y(s)\|)\tag{25}$$

其中 $s \geqslant t_0$，且对每个 $\bar{t} \geqslant 0$，有 $d(\bar{t}) \geqslant b(\bar{t})$，其中 b 由定理 3 中的条件 (iii) 给出．另外，假设存在函数 $\Lambda: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 满足 $\Lambda(0)=0$ 及 $\Lambda(x)>0$，$x \neq 0$，并且存在连续不减函数 $p(s)>s$，$s>0$，使得对 $\theta \in [-r, 0]$，$t \in [t_0, +\infty)$，$\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$，若 $U(t+\theta, \psi(\theta)) < p(U(t, \psi(0)))$，有

$$\mathrm{D}^+ U(t, \psi(0)) \leqslant -\Lambda(|\psi(0)|) \tag{26}$$

则测度中立型泛函微分方程(4) 的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致渐近稳定的．

证　对于 $s \geqslant t_0$，$\xi \in \overline{E}_\rho$，定义

$$\overline{U}(s, \xi) = \sup_{\theta \in [-r, 0]} U(s+\theta, \xi(\theta)) \tag{27}$$

则由定理 3 的证明，方程(4) 的平凡解 $y \equiv 0$ 是一致稳定的．

设 $t_0 \geqslant 0$，$\varphi \in P$，假设 $\bar{y}: [t_0-r, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是测度中立型泛函微分方程(4) 的解，满足 $\bar{y}_{t_0}=\varphi$，记解 $\bar{y}(t)=\bar{y}(t, t_0, \varphi)$．对于 $t \geqslant t_0$，设 $\bar{y}_t=\bar{y}_t(t_0, \varphi)$，并且设 $\varepsilon>0$．由于方程(4) 的解 $y \equiv 0$ 是一致稳定的，即存在 $\delta>0$，使得若 $\|\varphi\|<\delta$，则 $\|\bar{y}_t(t_0, \varphi)\|<\varepsilon$．则对每个 $t \in [t_0, +\infty)$，有

$$U(t, \bar{y}(t)) \leqslant \sup_{\theta \in [-r, 0]} U(t+\theta, \bar{y}(t+\theta)) \leqslant d(\|\bar{y}(t)\|) \leqslant d(\|\bar{y}_t\|) < d(\varepsilon) \tag{28}$$

其中 d 是增函数．

假设 $0<\eta \leqslant \varepsilon$ 是任意的，需证明存在数 $T=T(\varepsilon, \eta)>0$，使得 $\|\varphi\|<\delta$，则对所有 $t \in [t_0+T, +\infty)$，有 $\|\bar{y}_t\| \leqslant \eta$．事实上，只需证明对所有 $t \in [t_0+T, +\infty)$，有 $U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta)$，其中 b 由定理 3 的条件 (iii) 给定．

首先，找出数 T．由函数 $p(s)$ 的性质，存在数 $\alpha>0$，使得对 $b(\eta) \leqslant s \leqslant d(\varepsilon)$，有 $p(s)-s \geqslant \alpha$（注意 $b(\eta) \leqslant b(\varepsilon) \leqslant d(\varepsilon)$）．设 γ 是正整数，使得 $b(\eta)+\gamma\alpha>d(\varepsilon)$，由于 $b(\eta) \leqslant d(\varepsilon)$，有 $d^-(b(\eta)) \leqslant \varepsilon$，设

$$\beta = \inf_{d^-(b(\eta)) \leqslant s \leqslant \varepsilon} \Lambda(s) > 0$$

并且定义 $T=\dfrac{\gamma d(\varepsilon)}{\beta}$．下面证明对所有 $t \in \left[t_0+\dfrac{d(\varepsilon)}{\eta}, +\infty\right)$，有 $U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta)$．需证明对所有 $t \in \left[t_0+\dfrac{d(\varepsilon)}{\eta}, +\infty\right)$，有

$$U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta)+(\gamma-1)\alpha$$

假设

$$b(\eta)+(\gamma-1)\alpha < U(t, \bar{y}(t)) \qquad t \in \left[t_0+\frac{d(\varepsilon)}{\eta}, +\infty\right)$$

由 γ 的选择及(28) 式，有

$$b(\eta) \leqslant b(\eta)+(\gamma-1)\alpha < U(t, \bar{y}(t)) < d(\varepsilon) \tag{29}$$

并且有

$$p(U(t, \bar{y}(t))) \geqslant U(t, \bar{y}(t))+\alpha > b(\eta)+\gamma\alpha > d(\varepsilon) > U(t+\theta, \bar{y}(t+\theta))$$

其中 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\dfrac{d(\varepsilon)}{\beta}$，$\theta \in [-r, 0]$．由(28),(29) 式，有

$$d^-(b(\eta)) < d^-(d(\|\bar{y}(t)\|)) < d^-(d(\varepsilon))$$

即

$$d^-(b(\eta)) < \|\bar{y}(t)\| < \varepsilon$$

则由(26) 式，有

$$\mathrm{D}^+ U(t, \bar{y}(t)) \leqslant -\Lambda(\|\bar{y}(t)\|) \leqslant -\beta \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\frac{d(\varepsilon)}{\eta}$$

则

$$U(t_1, \bar{y}(t_1)) \leqslant U(t_0, \bar{y}(t_0)) - \beta(t_1 - t_0) < d(\varepsilon) - \beta(t_1 - t_0)$$

并且$U(t_1, \bar{y}(t_1)) < 0$,其中$t_1 = t_0 + \dfrac{d(\varepsilon)}{\eta}$,这与$U$是正数矛盾.则

$$U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta) + (\ell - 1)\alpha \qquad t = t_0 + \frac{d(\varepsilon)}{\eta}$$

注意,当$U(t, \bar{y}(t)) = b(\eta) + (\ell - 1)\alpha$时,由(26)式及$b(\eta) \leqslant U(t, \bar{y}(t)) = b(\eta) + (\ell - 1)\alpha < d(\varepsilon)$,有$\mathrm{D}^+ U(t, \bar{y}(t)) \leqslant 0$,则对于$\theta \in [-r, 0]$,有

$$p(U(t, \bar{y}(t))) \geqslant U(t, \bar{y}(t)) + \alpha = b(\eta) + \ell\alpha > d(\varepsilon) > U(t+\theta, \bar{y}(t+\theta))$$

假设存在$\bar{t} > t_0 + \dfrac{d(\varepsilon)}{\eta}$,使得

$$U(\bar{t}, y(\bar{t})) > b(\eta) + (\ell - 1)\alpha$$

则$\mathrm{D}^+ U(t, \bar{y}(t)) > 0$,与$\mathrm{D}^+ U(t, \bar{y}(t)) \leqslant 0$矛盾.则对任意的$t > t_0 + \dfrac{d(\varepsilon)}{\eta}$,有

$$U(t, \bar{y}(t)) = b(\eta) + (\ell - 1)\alpha$$

设$\bar{t}_n = \dfrac{nd(\varepsilon)}{\eta}(n = 1, 2, \cdots, \ell)$,$\bar{t}_0 = 0$,并且假设对一些正整数$N \geqslant 1$及$t$满足$\bar{t}_{n-1} \leqslant t - t_0 \leqslant \bar{t}_n$,有

$$b(\eta) + (\ell - N)\alpha < U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta) + (\ell - N + 1)\alpha$$

运用前面的证明方法,有

$$\mathrm{D}^+ U(t, \bar{y}(t)) \leqslant -\beta \qquad \bar{t}_{n-1} \leqslant t - t_0 \leqslant \bar{t}_n$$

及

$$U(t, \bar{y}(t)) \leqslant U(t_0 + \bar{t}_{n-1}, \bar{y}(t_0 + \bar{t}_{n-1})) - \beta(t - t_0 - \bar{t}_{n-1}) < d(\varepsilon) - \beta(t - t_0 - \bar{t}_{n-1})$$

则当$t = t_0 + \bar{t}_{n-1}$时有$U(t, \bar{y}(t)) < 0$.类似地,也能证明当$t \geqslant t_0 + \bar{t}_{n-1}$时有$U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta) + (\ell - N)\alpha$.当$N = \ell$时,对所有$t \geqslant t_0 + \dfrac{\ell d(\varepsilon)}{\beta}$,有$U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta)$.最后,由于$b(\| \bar{y}(t) \|) \leqslant U(t, \bar{y}(t)) \leqslant b(\eta)$,并且$b$是增函数,则对所有$t \geqslant t_0 + \dfrac{\ell d(\varepsilon)}{\beta}$,有$\| \bar{y}_t \| \leqslant \eta$.则测度中立型泛函微分方程(4)的平凡解$y \equiv 0$是一致渐近稳定的.

参考文献:

[1] SCHMAEDEKE W W. Optimal Control Theory for Nonlinear Vector Differential Equations Containing Measures [J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Math, 1965, 3(2): 231-280.

[2] MOHANA RAO M R, HARI RAO V S. Stability of Impulsively Perturbed Systems [J]. Bull Austral Math Soc, 1977, 16(1): 99-110.

[3] PANDIT S G. Differential Systems with Impulsive Perturbations [J]. J Pacific Math, 1980, 86(2): 553-560.

[4] 徐远通. 泛函微分方程与测度微分方程 [M]. 广州: 中山大学出版社, 1988.

[5] FEDERSON M, MESQUITA J G, TOON E. Lyapunov Theorems for Measure Functional Differential Equations via Kurzweil Equations [J]. Math Nachr, 2015, 288(13): 1487-1511.

[6] FEDERSON M, GRAU R, MESQUITA J G, et al. Lyapunov Stability for Measure Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales [J]. Journal of Differential Equations, 2019, 267(7): 4192-4223.

[7] GAISHUN I V, KNYAZHISHCHE L B. Nonmonotone Lyapunov Functionals. Conditions for the Stability of Equations with Delay [J]. Differ Uravn, 1994, 30(8): 1291-1298.

[8] KNYAZHISHCHE L B. Nonmonotone Lyapunov Functional in Uniform Asymptotic Stability Analysis of Delay Equations [J]. Differ Uravn, 2002, 38(7): 882-889.

[9] KNYAZHISHCHE L B, SHCHEGLOV V A. Conditions for the Uniform Asymptotic Stability of Equations with Delay [J]. Differ Uravn, 2001, 37(5): 628-637.

[10] 王春生，李永明. 多变时滞 Volterra 型动力系统的稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(7)：62-69.
[11] 梁桂珍，郝林莉. 一类潜伏期和染病期均传染的 SEIQR 流行病模型的稳定性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(3)：1-9.
[12] HATVANI L. On the Asymptotic Stability for Nonautonomous Functional Differential Equations by Lyapunov Functionals [J]. Trans Amer Math Soc，2002，354(9)：3555-3571.
[13] AFONSO S M，BONOTTO E M，FEDERSON M，et al. Stability of Functional Differential Equations with Variable Impulsive Perturbations via Generalized Ordinary Differential Equations [J]. Bull Sci Math，2013，137(2)：189-214.
[14] FEDERSON M，FRASSON M，MESQUITA J G，et al. Measure Neutral Functional Differential Equations as Generalized ODEs [J]. J Dyn Diff Equat，2019，31(1)：207-236.
[15] SCHWABIK S. Generalized Ordinary Differential Equations [M]. Singapore：World Scientific，1992：1-111.
[16] SCHWABIK S. Variational Stability for Generalized Ordinary Differential Equations [J]. Casopis Pro Pestovani Matematilky，1984，109(4)：389-420.

Stability of Measure Neutral Functional Differential Equations

LI Bao-lin，　XI　Ya

School of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：With the help of the equivalent relation of generalized ordinary differential equations and measure neutral functional differential equations，and using the Lyapunov functional method and the theorems of variational stability and variationally asymptotically stability of generalized ordinary differential equations，the theorems of uniform stability and uniformly asymptotically stability of measure neutral functional differential equations are established. Then，by redefining the Lyapunov functional，the new theorems of uniform stability and uniformly asymptotically stability of measure neutral functional differential equations are established.

Key words：measure neutral functional differential equation；generalized ordinary differential equations；uniform stability；uniformly asymptotic stability；Lyapunov functional

责任编辑　廖　坤