DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.02.013

非自治随机时滞广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程的拉回随机吸引子

李　勇，　张强恒，　李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了带有乘法扰动的非自治随机时滞广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程解的长时间行为. 通过对解的一致估计证明了该方程在 L^2-值连续函数空间上存在拉回随机吸收集和解的预紧性，并且利用拉回随机吸收集和解的预紧性与拉回吸引子的关系证明了拉回吸引子的存在性.

关　键　词：时滞广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程；拉回吸引子；乘法噪音

中图分类号：O193　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2021)02-0095-08

文献[1] 研究了广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程的整体吸引子及其性质，文献[2] 对随机广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程的随机吸引子进行了研究. 本文主要研究在一维有界区域 $\mathscr{O}=[-L, L]$ 上的时滞广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}u+\alpha u_{xx}\mathrm{d}t+\beta u_{xxx}\mathrm{d}t+\gamma u_{xxxx}\mathrm{d}t+f(u)_x\mathrm{d}t+\varphi(u)_{xx}\mathrm{d}t= \\ g(u)\mathrm{d}t+F(x, u(t-\rho))\mathrm{d}t+h(t, x)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}u^2\mathrm{d}t+u\mathrm{d}W \\ u(t, x-L)=u(t, x+L) \qquad L>0 \\ u_\tau(s, x)=u(\tau+s, x)=\phi(s, x) \qquad s\in[-\rho, 0] \end{cases} \tag{1}$$

其中$(t, x)\in(\tau, \infty)\times\mathbb{R}$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，常数 $\rho>0$ 是系统的时滞时间，g 是非线性项，F 是带有时滞的非线性项，h 是时间依赖的外力项，且 $h\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathscr{O}))$. W 是完备概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的双边实值 Wiener 过程，$\Omega=\{\omega\in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}): \omega(0)=0\}$，$\mathscr{F}$是由 Ω 的紧开拓扑组成的 Borel-σ 代数，P 是$(\Omega, \mathscr{F})$上的 Wiener 测度. 通常对 f，φ，g 和 F 做如下假设：

(E_1)　$g(0)=0$，$g'(l)\leqslant b$；

(E_2)　$|f(l)|\leqslant A_1|l|^p$，$|f'(l)|\leqslant A_2|l|^{p-1}$；

(E_3)　$\varphi'(l)\leqslant m$，$|\varphi'(l)|\leqslant B_1|l|^q$，$|\varphi''(l)|\leqslant B_2|l|^{q-1}$；

(E_4)　$|F(x, l_1)-F(x, l_2)|\leqslant C_F|l_1-l_2|$，$|F(x, l)|^2\leqslant L_F^2|l|^2+|\xi(x)|^2$.

其中 A_1，A_2，B_1，B_2，m，C_F 和 L_F 是正实数，b 是负实数，而且 $2\leqslant p<7$，$1<q<4$，$\xi\in L^2(\mathscr{O})$.

拉回随机吸引子最初是由文献[3] 提出来的，文献[4-5] 对非自治随机动力系统的拉回随机吸引子问题进行了讨论，文献[6-7] 对时滞微分方程的拉回随机吸引子的问题进行了一系列的讨论. 本文主要研究在

收稿日期：2019-09-29

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).

作者简介：李　勇，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.

通信作者：李扬荣，博士生导师，教授.

状态空间 $X_\rho = C([-\rho, 0], L^2(\mathscr{O}))$ 上的拉回随机吸引子的存在性.

1 连续非自治随机动力系统

在空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上定义一簇遍历的保测变换$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$:

$$\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t) \qquad \forall\, \omega\in\Omega,\ t\in\mathbb{R}$$

令 $z(\theta_t\omega)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{r}\omega(t+r)\mathrm{d}r+\omega(t)$ 是 $\mathrm{d}z+z\mathrm{d}t=\mathrm{d}\omega(t)$ 的稳态解. 由文献[8]得, 存在一个可测的$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-不变子集 $\widetilde{\Omega}\subseteq\Omega$, 对任意 $\omega\in\widetilde{\Omega}$ 都满足

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|z(\theta_t\omega)|}{t}=0 \qquad \lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t z(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=0 \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t|z(\theta_s\omega)|\mathrm{d}s=E(|z(\omega)|)<\infty \tag{3}$$

令 $v(t)=\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}u(t)$, 由于$\frac{1}{2}u^2\mathrm{d}t+u\mathrm{d}W=u\circ\mathrm{d}W$, 其中$\circ$表示 Stratonovvitch 积, 则方程(1)转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\alpha v_{xx}+\beta v_{xxx}+\gamma v_{xxxx}+\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}(f(u)_x+\varphi(u)_{xx})= \\ z(\theta_t\omega)v+\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}(g(u)+F(x, u(t-\rho))+h(t, x)) \\ v(t, x-L)=v(t, x+L) \qquad L>0 \\ v_\tau(s, x)=\mathrm{e}^{-z(\theta_{\tau+s}\omega)}\phi(s, x)=\psi(s, x) \qquad s\in[-\rho, 0]\end{cases} \tag{4}$$

用标准 Galerkin 方法[9], 由假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4)可以证明: 对于任意$\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, $\psi\in X_\rho$, 方程(4)有唯一的解 $v(\cdot, \tau, \omega, \psi)\in C([\tau-\rho, \infty], L^2(\mathscr{O}))\cap L^2_{\mathrm{loc}}(\tau, \infty; H^1_0(\mathscr{O}))\cap L^2_{\mathrm{loc}}(\tau, \infty; H^2_{\mathrm{per}}(\mathscr{O}))$, $v(\cdot, \tau, \omega, \psi)$是连续的, $v(\cdot, \tau, \cdot, \psi)$: $(\omega, \mathscr{F})\longrightarrow(X_\rho, \mathscr{B}(X_\rho))$是可测的. 定义映射

$$\Psi(t, \tau, \omega, \psi)(\cdot)=v_{t+\tau}(\cdot, \tau, \theta_{-\tau}\omega, \psi)$$

其中 Ψ: $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\omega\times X_\rho\longrightarrow X_\rho$, 容易证明 Ψ 是定义在X_ρ上的连续非自治随机动力系统. 设$\mathscr{D}$是X_ρ上的一些非空双参量集合所形成的集簇, 并且对任意 $c>0$, $D=\{D(\tau, \omega): (\tau, \omega)\in\mathbb{R}\times\Omega\}\in\mathscr{D}$ 满足

$$\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{ct}\|D(\tau+t, \theta_t\omega)\|_{X_\rho}=0$$

其中 $\|D\|_{X_\rho}=\sup\limits_{\psi\in D}\|\psi\|_{X_\rho}$. 通常对 $b, m, \alpha, \gamma, \lambda$ 做如下假设:

$$2b<-(2\max_{-3\rho-1\leqslant r\leqslant 0}|z(\theta_r\omega)|+\alpha+m+1) \qquad \gamma>\max\left\{\alpha+m, \frac{1}{\lambda}\right\} \tag{5}$$

$$\tilde{\delta}=\frac{\lambda}{2}-2E(|z(\omega)|)-L_F\mathrm{e}^{\frac{\lambda\rho}{4}}(E(\mathrm{e}^{2z(\omega)})+E(\mathrm{e}^{-2z(\omega)}))>0 \tag{6}$$

其中λ为庞加莱不等式常数. 定义映射

$$\delta(\omega)=\frac{\lambda}{2}-2|z(\omega)|-L_F\mathrm{e}^{\frac{\lambda\rho}{4}}(\mathrm{e}^{2z(\omega)}+\mathrm{e}^{-2z(\omega)}) \tag{7}$$

由遍历定理(参照文献[10]的定理 2.1)和(3)式, 存在可测的$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-不变子集$\Omega'\subseteq\Omega$, 对任意$\omega\in\widetilde{\Omega}\cap\Omega'$有

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_c^t\delta(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=E(\delta(\omega))=\tilde{\delta} \tag{8}$$

在后文的研究中Ω代表$\widetilde{\Omega}\cap\Omega'$. 假设对任意的$\tau\in\mathbb{R}$, h 满足

$$\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\delta r}\|h(r, \cdot)\|\mathrm{d}r<+\infty \tag{9}$$

2 解的一致估计

引理 1 假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4),(5)式和(6)式成立, 则对任意的$\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$和$D\in\mathscr{D}$, 存在

$T=T(\tau,\omega,D)\geqslant 4\rho+1$，使得对任意 $t\geqslant T$，$\sigma\in[\tau-3\rho-1,\tau]$，$\psi\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，$v$ 满足

$$\|v_\sigma(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\leqslant R(\tau,\omega)$$

其中 $R(\tau,\omega)$ 定义为

$$R(\tau,\omega)=C\int_{-\infty}^{0}e^{\int_0^r\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}(1+e^{-2z(\theta_r\omega)}\|h(r+\tau)\|^2)dr \tag{10}$$

C 为依赖于 τ,ω 和 D 的正实数.

证　用方程(4)与 v 做内积，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d\|v\|^2}{dt}-\alpha\|v_x\|^2+\gamma\|v_{xx}\|^2+e^{-z(\theta_t\omega)}\left(\int_{\mathscr{O}}f(u)_x v dx+\int_{\mathscr{O}}\varphi(u)_{xx}v dx\right)=\\&e^{-z(\theta_t\omega)}\left(\int_{\mathscr{O}}g(u)v dx+\int_{\mathscr{O}}F(x,u(t-\rho))v dx+\int_{\mathscr{O}}h(t,x)v dx\right)+z(\theta_t\omega)\|v\|^2\end{aligned} \tag{11}$$

由(E_1),(E_2),(E_3),(E_4)，对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\|v_x\|^2\leqslant\|v\|\,\|v_{xx}\|\leqslant\frac{1}{2}(\|v\|^2+\|v_{xx}\|^2)$$

$$e^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}f(u)_x v dx=-e^{-2z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}f(u)u_x dx=0 \tag{12}$$

$$e^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}g(u)v dx=e^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}(g(u)-g(0))v dx\leqslant b\|v\|^2 \tag{13}$$

$$e^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}\varphi(u)_{xx}v dx=-\int_{\mathscr{O}}\varphi'(u)\,|v_x|^2 dx\geqslant -m\|v_x\|^2 \tag{14}$$

$$e^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}h(t,x)v dx\leqslant e^{-z(\theta_t\omega)}\|h(t)\|\,\|v\|\leqslant\frac{\lambda}{4}\|v\|^2+\frac{e^{-2z(\theta_t\omega)}}{\lambda}\|h(t)\|^2 \tag{15}$$

$$e^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}F(x,u(t-\rho))v dx\leqslant\varepsilon e^{-2z(\theta_t\omega)}\|v\|^2+\varepsilon^{-1}\frac{L_F^2}{4}e^{2z(\theta_{t-\rho}\omega)}\|v(t-\rho)\|^2+\frac{\varepsilon^{-1}}{4}\|\xi\|^2 \tag{16}$$

由(5)式和(11)－(16)式可得

$$\begin{aligned}\frac{d\|v\|^2}{dt}\leqslant&-[\gamma-(\alpha+m)]\|v_{xx}\|^2+\left(-\frac{\lambda}{2}+2z(\theta_t\omega)+2b+\alpha+m\right)\|v\|^2+\\&2\varepsilon e^{-2z(\theta_t\omega)}\|v\|^2+\varepsilon^{-1}\frac{L_F^2}{2}e^{2z(\theta_{t-\rho}\omega)}\|v(t-\rho)\|^2+c_1(\varepsilon^{-1}+e^{-2z(\theta_t\omega)}\|h(t)\|^2)\end{aligned} \tag{17}$$

由(5)式，在(17)式左右乘 $e^{\int_\tau^t\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}$，得

$$\begin{aligned}\frac{d\left(e^{\int_\tau^t\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}\|v\|^2\right)}{dt}\leqslant&\left(-\frac{\lambda}{2}+2z(\theta_t\omega)+\delta(\theta_t\omega)\right)e^{\int_\tau^t\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}\|v\|^2+\\&2\varepsilon e^{\int_\tau^t\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta-2z(\theta_t\omega)}\|v\|^2+\varepsilon^{-1}\frac{L_F^2}{2}e^{\int_\tau^t\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta+2z(\theta_{t-\rho}\omega)}\|v(t-\rho)\|^2+\\&c_1e^{\int_\tau^t\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}(\varepsilon^{-1}+e^{-2z(\theta_t\omega)}\|h(t)\|^2)\end{aligned} \tag{18}$$

令 $\sigma\geqslant\tau+\rho$，$s\in[-\rho,0]$，由(7)式知 $\delta(\omega)\leqslant\frac{\lambda}{2}$，可得到

$$\int_\tau^{\sigma+s}e^{\int_\tau^r\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta+2z(\theta_{r-\rho}\omega)}\|v(r-\rho)\|^2dr\leqslant e^{\frac{\lambda\rho}{2}}\int_{\tau-\rho}^{\sigma+s}e^{\int_\tau^r\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta+2z(\theta_r\omega)}\|v(r)\|^2dr \tag{19}$$

令 $\varepsilon=\frac{L_F}{2}e^{\frac{\lambda\rho}{4}}$，对(18)式在$[\tau,\sigma+s]$上求积分，其中 $\sigma\geqslant\tau+\rho$，$s\in[-\rho,0]$，由(7),(19)式可以得到

$$\begin{aligned}\|v(\sigma+s)\|^2\leqslant&\|\psi\|_{X_\rho}^2e^{-\int_\tau^{\sigma+s}\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}+c_2\|\psi\|_{X_\rho}^2\int_{\tau-\rho}^{\tau}e^{\int_{\sigma+s}^r\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta+2z(\theta_r\omega)}dr+\\&c_2\int_\tau^{\sigma+s}e^{\int_{\sigma+s}^r\delta(\theta_\zeta\omega)d\zeta}(1+e^{-2z(\theta_r\omega)}\|h(r)\|^2)dr\end{aligned}$$

用 $\tau-t$ 和 $\theta_{-\tau}\omega$ 分别代替 τ 和 ω，则 $\sigma\geqslant\tau-t+\rho$，令 $\sigma\in[\tau-3\rho-1,\tau]$，则 $t\geqslant 4\rho+1$，可以得到

$$\|v(\sigma+s,\tau-t,\theta_{-t}\omega,\psi)\|^2\leqslant \mathrm{e}^{\int_{s-3\rho-1}^{0}\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta}\Big\{\|\psi\|_{X_\rho}^2\Big[c_2\int_{-t-\rho}^{-t}\mathrm{e}^{\int_0^r\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta+2z(\theta_r\omega)}\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{\int_0^{-t}\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta}\Big]+$$

$$c_2\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\int_0^r\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta}\big(1+\mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)}\|h(r+\tau)\|^2\big)\mathrm{d}r\Big\}\tag{20}$$

由 $\delta(\omega)\leqslant\dfrac{\lambda}{2}$ 可知，对任意 $s\in[\rho,0]$ 有

$$\mathrm{e}^{\int_{s-3\rho-1}^{0}\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta}\leqslant\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(4\rho+1)}\tag{21}$$

由(2)式和(8)式，对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\omega\in\Omega$，存在 $T(\varepsilon,\omega)\geqslant 4\rho+1$，使得对任意 $|t|\geqslant T(\varepsilon,\omega)$ 都有

$$\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}\leqslant\mathrm{e}^{\varepsilon|t|}\qquad \mathrm{e}^{2z(\theta_t\omega)}\leqslant\mathrm{e}^{\varepsilon|t|}\qquad \left|\int_0^t(\delta(\theta_\zeta\omega)-\tilde{\delta})\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\varepsilon|t|\tag{22}$$

令 $\varepsilon=\dfrac{\tilde{\delta}}{4}$，$\psi\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$ 和 $D\in\mathscr{D}$，由(9)式和(22)式可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\Big[\mathrm{e}^{\int_0^{-t}\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta}+c_2\int_{-t-\rho}^{-t}\mathrm{e}^{\int_0^r\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta+2z(\theta_r\omega)}\mathrm{d}r\Big]\|\psi\|_{X_\rho}^2\leqslant$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\Big[\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\tilde{\delta}t}+c_2\frac{2}{\tilde{\delta}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tilde{\delta}t}\Big]\|D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)\|_{X_\rho}^2=0\tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\int_0^r\delta(\theta_\zeta\omega)\mathrm{d}\zeta}\big(1+\mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)}\|h(r+\tau)\|^2\big)\mathrm{d}r<+\infty\tag{24}$$

则由(20)—(24)式可得，存在 $T\geqslant 4\rho+1$，当 $t\geqslant T$ 时引理 1 成立.

引理 2[1] V 是周期为 $2L$ 的光滑周期函数，成立以下不等式：

$$\|v_x\|\leqslant\|v\|^{\frac{2}{3}}\|v_{xxx}\|^{\frac{1}{3}}\qquad \|v_x\|_{L^\infty}\leqslant\sqrt{2L}\|v_{xx}\|$$

$$\|v\|_{L^\infty}\leqslant\frac{\|v\|}{\sqrt{L}}+\sqrt{2}\|v\|^{\frac{1}{2}}\|v_x\|^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\|v\|}{\sqrt{L}}+\sqrt{2}\|v\|^{\frac{5}{6}}\|v_{xxx}\|^{\frac{1}{6}}$$

引理 3 假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4),(5)式和(6)式成立，则对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 和 $D\in\mathscr{D}$，存在 $T=T(\tau,\omega,D)\geqslant 4\rho+1$，使得对任意 $t\geqslant T$，$\sigma_1\in[\tau-\rho-1,\tau]$，$\psi\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，$v$ 满足

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}v_{\sigma_1}(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\right\|^2+\frac{\gamma}{6}\int_{\tau-\rho}^{\tau}\left\|\frac{\partial^3}{\partial x^3}v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\right\|^2\mathrm{d}r\leqslant R_1(\tau,\omega)$$

其中 $R_1(\tau,\omega)$ 为依赖于 τ,ω 和 D 的正实数.

证 用方程(4)与 $-v_{xx}$ 做内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|v_x\|^2}{\mathrm{d}t}=z(\theta_t\omega)\|v_x\|^2+\alpha\|v_{xx}\|^2-\gamma\|v_{xxx}\|^2+\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\Big(\int_{\mathscr{O}}f(u)_x v_{xx}\mathrm{d}x+\int_{\mathscr{O}}\varphi(u)_{xx}v_{xx}\mathrm{d}x-$$

$$\int_{\mathscr{O}}g(u)v_{xx}\mathrm{d}x-\int_{\mathscr{O}}F(x,u(t-\rho))v_{xx}\mathrm{d}x-\int_{\mathscr{O}}h(t,x)v_{xx}\mathrm{d}x\Big)\tag{25}$$

由假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4)以及引理 2 和 Young 不等式，得

$$\alpha\|v_{xx}\|^2\leqslant\frac{\gamma}{12}\|v_{xxx}\|^2+\frac{\alpha^3}{3}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^{-2}\|v\|^2\qquad -\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}g(u)v_{xx}\mathrm{d}x\leqslant b\|v_x\|^2\tag{26}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}f(u)_x v_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\gamma}{6}\|v_{xxx}\|^2+\frac{3}{2\gamma}\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}\|f(u)\|^2\tag{27}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}\varphi(u)_{xx}v_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\gamma}{6}\|v_{xxx}\|^2+\frac{3}{2\gamma}\|\varphi'(u)v_x\|^2\tag{28}$$

$$\frac{3}{2\gamma}\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}\|f(u)\|^2\leqslant\frac{3A_1^2}{2\gamma}\mathrm{e}^{(2p-2)z(\theta_t\omega)}\|v\|_{L^\infty}^{2p-2}\|v\|^2\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|v_{xxx}\|^2+c_3\big(\mathrm{e}^{(2p-2)z(\theta_t\omega)}\|v\|^{2p}+\mathrm{e}^{\frac{12p-12}{7-p}z(\theta_t\omega)}\|v\|^{\frac{10p+2}{7-p}}\big)\tag{29}$$

$$\frac{3}{2\gamma}\|\varphi'(u)v_x\|^2\leqslant\frac{3B_1^2}{2\gamma}\mathrm{e}^{2qz(\theta_t\omega)}\|v\|_{L^\infty}^{2q}\|v_x\|^2\leqslant$$

$$\frac{\gamma}{6}\|v_{xxx}\|^2+c_4\left(\mathrm{e}^{3qz(\theta_t\omega)}\|v\|^{3q+2}+\mathrm{e}^{\frac{12q}{4-q}z(\theta_t\omega)}\|v\|^{\frac{10q+8}{4-q}}\right)\tag{30}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}h(t,x)v_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\gamma}{12}\|v_{xxx}\|^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^{-2}\|v\|^2+\frac{\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}}{4}\|h(t)\|^2\tag{31}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathscr{O}}F(x,u(t-\rho))v_{xx}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\gamma}{12}\|v_{xxx}\|^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\gamma}{8}\right)^{-2}\|v\|^2+\frac{\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}}{4}\|\eta\|^2+$$

$$\frac{L_F^2}{4}\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)+2z(\theta_{t-\rho}\omega)}\|v(t-\rho)\|^2\tag{32}$$

则由(25)－(32)式可以得出

$$\frac{\mathrm{d}\|v_x\|^2}{\mathrm{d}t}+\frac{\gamma}{6}\|v_{xxx}\|^2\leqslant(2b+2z(\theta_t\omega))\|v_x\|^2+c_5\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)+2z(\theta_{t-\rho}\omega)}\|v(t-\rho)\|^2+$$

$$c_5\left(\mathrm{e}^{(2p-2)z(\theta_t\omega)}\|v\|^{2p}+\mathrm{e}^{\frac{12p-12}{7-p}z(\theta_t\omega)}\|v\|^{\frac{10p+2}{7-p}}+\mathrm{e}^{3qz(\theta_t\omega)}\|v\|^{3q+2}+\right.$$

$$\left.\mathrm{e}^{\frac{12q}{4-q}z(\theta_t\omega)}\|v\|^{\frac{10q+8}{4-q}}+\|v\|^2\right)+c_5\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}(\|h(t)\|^2+1)\tag{33}$$

由引理 1 可得

$$\int_{\tau-3\rho-1}^{\tau}\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-\tau}\omega)+2z(\theta_{r-\tau-\rho}\omega)}\|v(r-\rho,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\sup_{\tau-3\rho-1\leqslant r\leqslant\tau}\|v_r(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|_{X_\rho}^2\int_{-3\rho-1}^{0}\mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)+2z(\theta_{r-\rho}\omega)}\mathrm{d}r\leqslant$$

$$R(\tau,\omega)\int_{-3\rho-1}^{0}\mathrm{e}^{-2z(\theta_r\omega)+2z(\theta_{r-\rho}\omega)}\mathrm{d}r\tag{34}$$

$$\int_{\tau-3\rho-1}^{\tau}\mathrm{e}^{(2p-2)z(\theta_{r-\tau}\omega)}\|v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^{2p}\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\sup_{\tau-3\rho-1\leqslant r\leqslant\tau}\|v_r(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|_{X_\rho}^{2p}\int_{-3\rho-1}^{0}\mathrm{e}^{(2p-2)z(\theta_r\omega)}\mathrm{d}r\leqslant$$

$$[R(\tau,\omega)]^p\int_{-3\rho-1}^{0}\mathrm{e}^{(2p-2)z(\theta_r\omega)}\mathrm{d}r\tag{35}$$

令 $\tau\in\mathbb{R}$，$t\geqslant4\rho+1$，$\omega\in\Omega$，$\kappa\in(\tau+s-2\rho-1,\tau+s-\rho-1)$，$s\in[-\rho,0]$，$\sigma_1\in[\tau-\rho-1,\tau]$，对(33)式在$[\kappa,\sigma_1+s]$上求积分，用 $\tau-t$ 和 $\theta_{-\tau}\omega$ 分别代替 τ 和 ω，则由(34)，(35)式可以得出

$$\|\nabla v_{\sigma_1}(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\leqslant$$

$$(2b+2\sup_{-3\rho-1\leqslant r\leqslant0}z(\theta_t\omega)+1)\int_{\tau-3\rho-1}^{\tau}\|v_x(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r+Q_1(\tau,\omega)\tag{36}$$

与(36)式的证明类似，对(33)式在$[\tau-\rho,\tau]$上积分，由(34)，(35)和(36)式可得

$$\frac{\gamma}{6}\int_{\tau-\rho}^{\tau}\|v_{xxx}(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r\leqslant$$

$$(2b+2\sup_{-3\rho-1\leqslant r\leqslant0}z(\theta_t\omega)+1)\int_{\tau-3\rho-1}^{\tau}\|v_x(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r+Q_2(\tau,\omega)\tag{37}$$

其中 $Q_1(\tau,\omega)$，$Q_2(\tau,\omega)$ 为依赖于 τ，ω 和 D 的正实数．由(5)，(36)和(37)式得引理 3 成立．

引理 4　假设(E_1)，(E_2)，(E_3)，(E_4)，(5)和(6)式成立，则对任意 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 和 $D\in\mathscr{D}$，存在 $T=T(\tau,\omega,D)\geqslant4\rho+1$，使得对任意 $t\geqslant T$，$\psi\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，$v$ 满足

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_\tau(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\right\|^2+\frac{5\gamma}{6}\int_{\tau-\rho}^{\tau}\left\|\frac{\partial^4}{\partial x^4}v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\right\|^2\mathrm{d}r\leqslant R_2(\tau,\omega)$$

其中 $R_2(\tau,\omega)$ 是依赖于 τ，ω 和 D 的正实数．

证　用方程(4)与 v_{xxxx} 做内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|v_{xx}\|^2}{\mathrm{d}t}=z(\theta_t\omega)\|v_{xx}\|^2+\alpha\|v_{xxx}\|^2-\gamma\|v_{xxxx}\|^2-\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\Big(\int_{\mathcal{O}}f(u)_x v_{xxxx}\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{O}}\varphi(u)_{xx}v_{xxxx}\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{O}}g(u)v_{xxxx}\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{O}}F(x,u(t-\rho))v_{xxxx}\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{O}}h(t,x)v_{xxxx}\mathrm{d}x\Big) \tag{38}$$

由假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4)以及引理 2，可得

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathcal{O}}f(u)_x v_{xxxx}\mathrm{d}x\right|\leqslant A_2\mathrm{e}^{(p-1)z(\theta_t\omega)}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_x\|_{L^\infty}\|v_{xxxx}\|\leqslant \sqrt{2L}A_2\mathrm{e}^{(p-1)z(\theta_t\omega)}\|v\|_{L^\infty}^{p-1}\|v_x\|^{\frac{2}{3}}\|v_{xxxx}\|^{\frac{4}{3}}\leqslant \frac{\gamma}{12}\|v_{xxxx}\|^2+c_6\mathrm{e}^{(3p-3)z(\theta_t\omega)}(\|v\|^{6p-6}+\|v_x\|^4+\|v\|^{3p-3}+\|v_x\|^{3p+1}) \tag{39}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathcal{O}}\varphi(u)_{xx}v_{xxxx}\mathrm{d}x\right|=\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathcal{O}}(\varphi''(u)u_x{}^2+\varphi'(u)u_{xx})v_{xxxx}\mathrm{d}x\right|\leqslant c_7\mathrm{e}^{qz(\theta_t\omega)}(\|v\|_{L^\infty}^{q-1}\|v_x\|\|v_x\|_{L^\infty}\|v_{xxxx}\|+\|v\|_{L^\infty}^{q}\|v_x\|^{\frac{2}{3}}\|v_{xxxx}\|^{\frac{4}{3}})\leqslant \frac{\gamma}{6}\|v_{xxxx}\|^2+c_7\mathrm{e}^{3qz(\theta_t\omega)}(\|v\|^{6q-6}+\|v\|^{3q-3}+\|v\|^{6q}+\|v\|^{3q}+\|v_x\|^{10}+\|v_x\|^{3q+7}+\|v_x\|^4+\|v_x\|^{3q+4}) \tag{40}$$

$$\alpha\|v_{xxx}\|^2\leqslant\frac{\gamma}{6}\|v_{xxxx}\|^2+\frac{\alpha^3}{3}\left(\frac{\gamma}{4}\right)^{-2}\|v_x\|^2\qquad \mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathcal{O}}g(u)v_{xxxx}\mathrm{d}x\leqslant b\|v_{xx}\|^2 \tag{41}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathcal{O}}h(t,x)v_{xxxx}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{\gamma}{12}\|v_{xxxx}\|^2+\frac{3\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}}{\gamma}\|h(t)\|^2 \tag{42}$$

$$\left|\mathrm{e}^{-z(\theta_t\omega)}\int_{\mathcal{O}}F(x,u(t-\rho))v_{xxxx}\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{\gamma}{12}\|v_{xxx}\|^2+\frac{3\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}}{\gamma}\|\eta\|^2+\frac{3L_F^2}{\gamma}\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)+2z(\theta_{t-\rho}\omega)}\|v(t-\rho)\|^2 \tag{43}$$

由(38)-(43)式可以得出

$$\frac{\mathrm{d}\|v_{xx}\|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant(2b+z(\theta_t\omega))\|v_{xx}\|^2-\frac{5\gamma}{6}\|v_{xxxx}\|^2+c_8\mathrm{e}^{(3p-3)z(\theta_t\omega)}(\|v\|^{6p-6}+\|v_x\|^4+\|v\|^{3p-3}+\|v_x\|^{3p+1})+c_8\mathrm{e}^{3qz(\theta_t\omega)}(\|v\|^{6q-6}+\|v\|^{3q-3}+\|v\|^{6q}+\|v\|^{3q}+\|v_x\|^{10}+\|v_x\|^{3q+7}+\|v_x\|^4+\|v_x\|^{3q+4})+c_8\|v_x\|^2+c_8\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)+2z(\theta(t-\rho)\omega)}\|v(t-\rho)\|^2+c_8\mathrm{e}^{-2z(\theta_t\omega)}(\|h(t)\|^2+1) \tag{44}$$

由引理 2 可得

$$\int_{\tau-\rho-1}^{\tau}\mathrm{e}^{3qz(\theta_{r-\tau}\omega)}\|\nabla v(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^{3q}\mathrm{d}r\leqslant \sup_{\tau-\rho-1\leqslant r\leqslant\tau}\|\nabla v_r(\cdot,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^{3q}\int_{-\rho-1}^{0}\mathrm{e}^{3qz(\theta_r\omega)}\mathrm{d}r\leqslant [R_1(\tau,\omega)]^{\frac{3q}{2}}\int_{-\rho-1}^{0}\mathrm{e}^{3qz(\theta_r\omega)}\mathrm{d}r \tag{45}$$

令 $\tau\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 4\rho+1$, $\omega\in\Omega$, $\kappa_1\in(\tau+s-1,\tau+s)$, $s\in[-\rho,0]$, $\kappa_1\leqslant\kappa_2$, 对(44)式在$[\kappa_1,\kappa_2+s]$上

求积分，用 $\tau-t$ 和 $\theta_{-\tau}\omega$ 分别代替 τ 和 ω，再用 τ 代替 κ_2，由(34),(35),(45)式可得

$$\|v_{xx}(\tau+s,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\leqslant$$
$$(2b+2\sup_{-\rho-1\leqslant r\leqslant 0}z(\theta_t\omega)+1)\int_{\tau-\rho-1}^{\tau}\|v_{xx}(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r+Q_1'(\tau,\omega)\tag{46}$$

与(46)式的证明类似，对(44)式在$[\tau-\rho,\tau]$上积分，由(34),(35),(45),(46)式可得

$$\frac{5\gamma}{6}\int_{\tau-\rho}^{\tau}\|v_{xxxx}(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r\leqslant$$
$$(2b+2\sup_{-\rho-1\leqslant r\leqslant 0}z(\theta_t\omega)+1)\int_{\tau-\rho-1}^{\tau}\|v_{xx}(r,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\psi)\|^2\mathrm{d}r+Q_2'(\tau,\omega)\tag{47}$$

其中 $Q_1'(\tau,\omega)$,$Q_2'(\tau,\omega)$ 为依赖于 τ,ω 和 D 的正实数. 由(5),(46),(47)式得引理 4 成立.

3　拉回吸引子

引理 5　假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4),(5)式和(6)式成立，则非自治随机动力系统 Ψ 有一个闭的可测的 $\mathscr{D}$-拉回吸收集 $K=\{K(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{D}$，$K(\tau,\omega)$ 定义为

$$K(\tau,\omega)=\{\xi\in X_\rho:\tau\in\mathbb{R},\|\xi\|_{X_\rho}^2\leqslant R(\tau,\omega)\}$$

其中 $R(\tau,\omega)$ 由(10)式定义.

证　由引理 1，对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 和 $D\in\mathscr{D}$，存在 $T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得对任意 $t\geqslant T$ 有

$$\Psi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,D(\tau-t,\theta_{-t}\omega))\subseteq K(\tau,\omega)$$

由(10)式可知 K 拉回吸引 $\mathscr{D}$ 的所有元素. 由(9)式和(22)式可证得 $K(\tau,\omega)\in\mathscr{D}$，并且对任意 $\tau\in\mathbb{R}$，$R(\tau,\cdot):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 是$(\mathscr{F},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-可测的. 可以得出 K 是闭的可测的 $\mathscr{D}$-拉回吸收集.

引理 6　假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4),(5)式和(6)式成立，则非自治随机动力系统 Ψ 在 X_ρ 上是 $\mathscr{D}$-拉回预紧的.

证　要证明 Ψ 在 X_ρ 上是 $\mathscr{D}$-拉回预紧的，需要证明对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$ 和 $D\in\mathscr{D}$，如果 $t_n\to\infty$ 和 $\psi_n\in D(\tau-t_n,\theta_{-t_n}\omega)$，则序列$\{\Psi(t_n,\tau-t_n,\theta_{-t_n}\omega,\psi_n)(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X_ρ 上有收敛子列.

为了证明在 X_ρ 上 $v_\tau(\cdot,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)$ 是预紧的，首先证明 $v_\tau(\cdot,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)$ 在 X_ρ 上等度连续，由假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4)以及引理 1、引理 3、引理 4 和(4)式可知，存在 $N_1=N_1(\tau,\omega)>0$，使得对任意 $n>N_1$ 有

$$\int_{\tau-\rho}^{\tau}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}v(r,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)\right\|^2\mathrm{d}r\leqslant c$$

其中 $c=c(\tau,\omega)>0$. 因此对任意 $n>N_1$，s_1,$s_2\in[-\rho,0]$，且 $s_1>s_2$，有

$$\|v_\tau(s_2,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)-v_\tau(s_1,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)\|=$$
$$\left\|\int_{\tau+s_2}^{\tau+s_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}v(r,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)\mathrm{d}r\right\|\leqslant$$
$$|s_2-s_1|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\tau+s_2}^{\tau+s_1}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}v(r,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)\right\|^2\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c_1|s_2-s_1|^{\frac{1}{2}}$$

由此得出 $v_\tau(\cdot,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)$ 在 X_ρ 上等度连续. 然后证明对固定的 $s\in[-\rho,0]$，有$\{v(\tau+s,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n):n\in\mathbb{N}_+\}$ 在 $L^2(\mathscr{O})$ 上预紧. 由引理 3 可知，对任意的 $s\in[-\rho,0]$，$v(\tau+s,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)$ 在 $H_0^1(\mathscr{O})$ 上有界. 由 $H_0^1(\mathscr{O})$ 连续嵌入 $L^2(\mathscr{O})$，则 $v(\tau+s,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)$ 在 $L^2(\mathscr{O})$ 上预紧. 则由文献[6]的引理 5.2 可知 $v_\tau(\cdot,\tau-t_n,\theta_{-\tau}\omega,\psi_n)$ 在 X_ρ 上是预紧的.

定理 1　假设(E_1),(E_2),(E_3),(E_4),(5)式和(6)式成立，则连续非自治随机动力系统 Ψ 在 X_ρ 上存在 $\mathscr{D}$-拉回随机吸引子.

证　由于引理 5 和引理 6 的结论满足文献[3]中 $\mathscr{D}$-拉回随机吸引子的存在性条件，所以连续非自治随机动力系统 Ψ 在 X_ρ 上存在 $\mathscr{D}$-拉回随机吸引子.

参考文献：

[1] 郭柏灵. 广义 Kuramoto-Sivashinsky 型方程周期初值问题的整体吸引子 [J]. 自然科学进展，1993，3(1)：63-76.

[2] 程银银，李扬荣. 带可乘白噪音的广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程的随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(10)：26-30.

[3] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations，2012，253(5)：1544-1583.

[4] 杨 爽，王仁海，李扬荣，等. 非自治随机 Sine-Gordon 方程组的拉回动力行为 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：70-77.

[5] 赵文强，李扬荣. 带加法白噪声的随机 Boussinesq 方程组的解的渐近行为 [J]. 数学学报，2013，56(1)：1-14.

[6] WANG X H，LU K N，WANG B X. Random Attractors for Delay Parabolic Equations with Additive Noise and Deterministic Nonautonomous Forcing [J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems，2015，14(2)：1018-1047.

[7] LI D S，SHI L. Upper Semicontinuity of Attractors of Stochastic Delay Reaction-Diffusion Equations in the Delay [J]. Journal of Mathematical Physics，2018，59(4)：1-36.

[8] ARNOLD L. Random Dynamical Systems [M]. Berlin：Springer-Verlag，1998.

[9] CARABALLO T. Nonlinear Partial Functional Differential Equations：Existence and Stability [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，262(1)：87-111.

[10] CARABALLO T，GARRIDO-ATIENZA M J，SCHMALFUSS B，et al. Asymptotic Behaviour of a Stochastic Semilinear Dissipative Functional Equation Without Uniqueness of Solutions [J]. Discrete Continuous Dynamical System-Series B，2010，14(2)：439-455.

Pullback Random Attractors for the Non-autonomous Stochastic Delay Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation

LI Yong， ZHANG Qiang-heng， LI Yang-rong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we study the long-time behavior for the solution of the non-autonomous stochastic delay generalized Kuramoto-Sivashinsky equation with multiplication noise. The existence of apullback random absorbing set and solution pre-compatibility in the space of L^2-valued continuous function is proved by uniform estimation of the solution. The existence of thepullback attractor is proved by using the relationship of the pullback random absorbing set and solution pre-compatibility with the pullback attractor.

Key words：delay generalized Kuramoto-Sivashinsky equation；pullback attractor；multiplication noise

责任编辑 廖 坤