DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.02.014

分段双加权伪概周期函数的复合定理

宋　娜，　夏正德

中北大学 理学院，太原 030051

摘要： 研究了分段双加权伪概周期函数的复合定理．首先将复合函数分解为分段概周期函数与剩余部分的和，利用平移不变性证明了除去分段概周期函数部分剩余的应该是双加权函数，进一步证明了两个分段双加权伪概周期函数复合之后依然是分段双加权伪概周期函数．然后介绍了双加权伪概周期序列，并研究了双加权伪概周期序列与分段双加权伪概周期函数的关系，进一步证明了双加权伪概周期函数与双加权伪概周期序列的复合函数依然为双加权伪概周期序列．

关　键　词： 分段双加权伪概周期函数；双加权伪概周期序列；复合定理

中图分类号：O29　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2021)02－0103－07

文献[1]推广了伪概周期函数，介绍了加权伪概周期函数及其相关性质．许多的工作都是围绕着微分方程的加权伪概周期解展开的[2-9]．文献[10]给出了双加权伪概周期函数的概念，进一步推广了伪概周期函数．随着脉冲微分方程的发展，概周期理论得到进一步的发展，分段伪概周期函数、分段加权伪概周期函数与分段双加权伪概周期函数相继被提出[11-13]．关于微分方程，数学工作者做了许多的工作[14-24]．本文的工作是对分段双加权伪概周期函数[25]研究的延续，主要介绍了分段双加权伪概周期函数的复合定理，以及双加权伪概周期函数与双加权伪概周期序列之间的关系．

1　分段双加权伪概周期函数

现在介绍分段加权伪概周期函数的概念．首先定义集合 U 为加权函数全体 $\{\mu: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)\}$，则

$$\mu(S, \rho) = \int_{-S}^{S} \rho(t)\,\mathrm{d}t$$

$$U_{\infty} = \left\{\mu \in U: \inf_{t \in \mathbb{R}} \mu(t) > 0,\ \lim_{S \to \infty} \int_{-S}^{S} \mu(t)\,\mathrm{d}t = \infty\right\}$$

$$U_B = \{\mu \in U: \mu \in U_{\infty},\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \mu(t) < \infty\}$$

$$U_T^0 = \left\{\mu \in U_{\infty}: \lim_{S \to \infty} \frac{\mu(S + |r|)}{\mu(S)} < \infty,\ \forall r \in \mathbb{R}\right\}$$

加权函数具有如文献[2]中定义的加权函数的相关性质，在此将不再赘述．对于 $\rho, \upsilon \in U_{\infty}$，$S > 0$，$f \in PC_T(\mathbb{R}, X)$，定义

收稿日期：2020－04－07

基金项目：山西省青年科技研究基金项目(201901D211275)．

作者简介：宋　娜，博士，讲师，主要从事概周期理论的研究．

$$\mathscr{W}(S, f, \rho, \upsilon)=\frac{1}{\mu(S, \rho)}\int_{-S}^{S}\|f(t)\|\upsilon(t)\mathrm{d}t$$

分段双加权遍历空间 $PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)$ 和 $PPAP_T^0(\Omega, X, \rho, \upsilon)$，有如下定义：

$$PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)=\{f\in PC_T(\mathbb{R}, X): \lim_{S\to\infty}\mathscr{W}(S, f, \rho, \upsilon)=0\}$$

$$PPAP_T^0(\Omega, X, \rho, \upsilon)=\{f\in PC_T(\mathbb{R}\times\Omega, X): \lim_{S\to\infty}\mathscr{W}(S, f(\cdot, u), \rho, \upsilon)=0\text{ 对}\forall u\in\Omega\text{ 成立}\}$$

$PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)$ 在上确界范数下是 Banach 空间. 分段双加权伪概周期函数空间为

$$PPAP_T(X, \rho, \upsilon)=\{f=f^{ap}+f^e\in PC_T(\mathbb{R}, X): f^{ap}\in AP_T(\mathbb{R}, X), f^e\in PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)\}$$

$$PPAP_T(\Omega, X, \rho, \upsilon)=\{f=f^{ap}+f^e\in PC_T(\mathbb{R}\times\Omega, X): f^{ap}\in AP_T(\mathbb{R}\times\Omega, X), f^e\in PPAP_T^0(\Omega, X, \rho, \upsilon)\}$$

定理 1 令 $f\in PPAP_T(\Omega, X, \rho, \upsilon)$ 且 $h\in PPAP_T(\Omega, \rho, \upsilon)$. 假设下面的条件成立：

(H_1) $\rho\in U_T^0$，$\upsilon\in U_\infty$，$\inf\limits_{S>0}\dfrac{\mu(S, \upsilon)}{\mu(S, \rho)}>0$，且 $\lim\limits_{S>0}\dfrac{\mu(S, \upsilon)}{\mu(S, \rho)}<\infty$；

(H_2) $f(t, \cdot)$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 在每个有界子集 Ω 上是一致连续的，即对 $\forall\varepsilon>0$ 和有界集 $K\subset\Omega$，存在 $\delta>0$，使得当 $x, y\in K$ 且 $\|x-y\|<\delta$ 时，$\|f(t, x)-f(t, y)\|<\varepsilon$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 成立；

(H_3) $f(\mathbb{R}, K)=\{f(t, x): t\in\mathbb{R}, x\in K\}$ 对每个有界子集 $K\in\Omega$ 是有界的.

若 $R(h)\subset K$，那么 $f(t, h(t))\in PPAP_T(X, \rho, \upsilon)$.

证 因为 $f\in PPAP_T(\Omega, X, \rho, \upsilon)$，$h\in PPAP_T(\Omega, \rho, \upsilon)$，所以 $f=f^{ap}+f^e$ 且 $h=h^{ap}+h^e$. 则函数 $f(\cdot, h(\cdot))$ 可以做如下的分解：

$$\begin{aligned}f(\cdot, h(\cdot))&=f^{ap}(\cdot, h^{ap}(\cdot))+f(\cdot, h(\cdot))-f^{ap}(\cdot, h^{ap}(\cdot))=\\&f^{ap}(\cdot, h^{ap}(\cdot))+f(\cdot, h(\cdot))-f(\cdot, h^{ap}(\cdot))+f^e(\cdot, h^{ap}(\cdot))\end{aligned}$$

由于 $R(h^{ap})$ 在 X 上是相对紧的，则 $\forall t\in\mathbb{R}$，$f^{ap}(t, \cdot)$ 在 $R(h^{ap})$ 上是一致连续的. 由文献[11] 的定理 3.1，容易看出 $f^{ap}(\cdot, h^{ap}(\cdot))\in AP_T(\mathbb{R}, X)$. 下面证明

$$f(\cdot, h(\cdot))-f(\cdot, h^{ap}(\cdot))+f^e(\cdot, h^{ap}(\cdot))\in PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)$$

步骤 1 证明 $f(\cdot, h(\cdot))-f(\cdot, h^{ap}(\cdot))\in PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)$.

令 $K\in\Omega$ 是有界的，使得 $R(h), R(h^{ap})\subset K$. 由条件(H_3)，存在 $M>0$ 使得

$$\|f(\cdot, h(\cdot))-f(\cdot, h^{ap}(\cdot))\|\leqslant M\qquad\forall t\in\mathbb{R}$$

同时，由条件(H_2)，对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x, y\in K$ 且 $\|x-y\|<\delta$ 时，有

$$\|f(t, x)-f(t, y)\|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\forall t\in\mathbb{R}$$

因为 $h^e\in PPAP_T^0(\Omega, \rho, \upsilon)$，根据条件($H_1$)，有

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{\mu(S, \rho)}\int_{M(S, \delta, h^e)}\upsilon(t)\mathrm{d}t=0$$

其中

$$M(S, \delta, h^e)=\{t\in[-S, S]: \|h^e(t)\|\geqslant\delta\}$$

因此存在 $\overline{M}, S_0>0$，使得当 $S>S_0$ 时，有

$$\frac{1}{\mu(S, \rho)}\int_{M(S, \delta, h^e)}\upsilon(t)\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2M}\qquad\frac{\mu(S, \upsilon)}{\mu(S, \rho)}<\overline{M}$$

又因为

$$\|h(t)-h^{ap}(t)\|=\|h^e(t)\|<\delta\qquad t\in Q_S/M(S, \delta, h^e)$$

所以

$$\|f(\cdot, h(\cdot))-f(\cdot, h^{ap}(\cdot))\|<\frac{\varepsilon}{2\overline{M}}\qquad t\in Q_S/M(S, \delta, h^e)$$

由平移不变性可得，对 $S > S_0$，有

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\int_{Q_S} \| f(\cdot, h(\cdot)) - f(\cdot, h^{ap}(\cdot)) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\int_{M(S,\delta,h^e)} \| f(\cdot, h(\cdot)) - f(\cdot, h^{ap}(\cdot)) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t +$$

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\int_{Q_S/M(S,\delta,h^e)} \| f(\cdot, h(\cdot)) - f(\cdot, h^{ap}(\cdot)) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{M}{\mu(S,\rho)}\int_{M(S,\delta,h^e)} \upsilon(t)\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2\overline{M}\mu(S,\mu)}\int_{Q_S/M(S,\delta,h^e)} \upsilon(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2\overline{M}}\frac{\mu(S,\upsilon)}{\mu(S,\rho)} \leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\overline{M}\varepsilon}{2\overline{M}} = \varepsilon$$

步骤 2　证明 $f^e(\cdot, h^{ap}(\cdot)) \in PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)$.

因为 $f = f^{ap} + f^e$，且当 $t \in \mathbb{R}$ 时，$f^{ap}(t, \cdot)$ 在 $R(h^{ap})$ 上是一致连续的．那么由条件(H_2)可知，$f^e(t, x) = f(t, x) - f^{ap}(t, x)$ 关于 t 在 $x \in R(h^{ap})$ 上是一致连续的．即对于 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x, y \in R(h^{ap})$ 且 $\| x - y \| < \delta$ 时，有

$$\| f^e(t, x) - f^e(t, y) \| < \varepsilon \qquad t \in \mathbb{R}$$

由 $R(h^{ap})$ 在 X 上是相对紧的，则对 $\varepsilon > 0$，可以找到有限 n 个以 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R(h^{ap})$ 为中心的开球 O_k，使得 $R(h^{ap}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_k$ 且

$$\| f^e(t, x) - f^e(t, x_k) \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad x \in O_k,\ t \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \cdots, n$$

集合 $B_k = \{t \in \mathbb{R}: h^{ap}(t) \in O_k\}$ 是开的，并且 $R = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$．令

$$E_1 = B_1 \qquad E_k = B_k / \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j$$

那么当 $i \neq j$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$ 并且 $R = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ 时，$E_i \cap E_j = \varnothing$.

因为 $f^e(\cdot, x_k) \in PPAP_T^0(\Omega, X, \rho, \upsilon)$，所以存在 $S_0 > 0$，使得

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\int_{-S}^{S} \| f^e(t, x_k) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2n} \qquad S > S_0,\ 1 \leqslant k \leqslant n$$

因此对于 $S > S_0$，有

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\int_{-S}^{S} \| f^e(t, h^{ap}(t)) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\sum_{k=1}^{n}\int_{E_n \cap Q_S} \| f^e(t, h^{ap}(t)) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{1}{\mu(S,\rho)}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{E_n \cap Q_S} \| f^e(t, h^{ap}(t)) - f^e(t, x_k) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t + \int_{E_n \cap Q_S} \| f^e(t, x_k) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t\right] \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\mu(S,\rho)}\sum_{k=1}^{n}\int_{E_n \cap Q_S} \| f^e(t, x_k) \| \upsilon(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + n\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon$$

则 $f^e(\cdot, h^{ap}(\cdot)) \in PPAP_T^0(X, \rho, \upsilon)$.

2　双加权伪概周期序列

令 V_s 为序列(加权)$\sigma: \mathbb{Z} \longrightarrow (0, +\infty)$ 的集合．对于 $\sigma \in V_s$ 且 $T \in \mathbb{Z}_+$，令

$$\mu_s(T,\sigma)=\sum_{n=-T}^{T}\sigma(n)$$

$$V_{s\infty}=\{\sigma\in V_s:\lim_{T\to\infty}\mu_s(T,\sigma)=\infty\}$$

$$V_{sB}=\{\sigma\in V_{s\infty}:\sigma\text{ 是有界的，且}\inf_{n\in\mathbb{Z}}\sigma(n)>0\}$$

定义1 令 $\sigma,\vartheta\in V_{s\infty}$，序列 $\{x(n)\}:\mathbb{Z}\longrightarrow X$ 是有界的且满足

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\mu_s(T,\sigma)}\sum_{n=-T}^{T}|x(n)|\vartheta(n)=0$$

那么序列 $\{x(n)\}$ 被称为 σ,ϑ-PAP_0 序列，我们用 $PAP_0S(X,\sigma,\vartheta)$ 来标记.

类似于文献[12]中引理2.1的证明，可以得到下面的引理：

引理1 令 $\sigma,\vartheta\in V_{s\infty}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=-n}^{n}\vartheta(i)}{\sum\limits_{i=-n}^{n}\sigma(i)}<\infty$$

且 $x:\mathbb{Z}\longrightarrow X$ 是有界的. 对 $\forall\varepsilon>0$, $S>0$, $S\in\mathbb{Z}$, 定义

$$M_{S,\varepsilon}(x)=\{n\in[-S,S]\cap\mathbb{Z}:\|x(n)\|\geqslant\varepsilon\}\qquad\mu_s(M_{S,\varepsilon}(x),\vartheta)=\sum_{n\in M_{S,\varepsilon}(x)}\vartheta(n)$$

故 $x\in PAP_0S(X,\sigma,\vartheta)$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{S\to\infty}\dfrac{\mu_s(M_{S,\varepsilon}(x),\vartheta)}{\mu_s(n,\sigma)}=0$.

定义

$$\hat{\sigma}(j)=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\rho(t)\mathrm{d}t\qquad\hat{\vartheta}(j)=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\upsilon(t)\mathrm{d}t\qquad j\in\mathbb{Z}$$

那么

$$\mu_s(N,\hat{\sigma})=\sum_{n=-N}^{N}\hat{\sigma}(n)=\sum_{n=-N}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\rho(t)\mathrm{d}t=\int_{t_{-N-1}}^{t_N}\rho(t)\mathrm{d}t$$

由 $\hat{\sigma}(j)$,$\hat{\vartheta}(j)$ 的定义可看出：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=-n}^{n}\hat{\vartheta}(i)}{\sum\limits_{i=-n}^{n}\hat{\sigma}(i)}<\infty$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{S\to\infty}\dfrac{\int_{-S}^{S}\upsilon(t)\mathrm{d}t}{\int_{-S}^{S}\rho(t)\mathrm{d}t}<\infty$.

类似于文献[12]中引理2.6和定理2.5的证明，容易得到下面的两个引理：

引理2 令 $u\in PPAP_T^0(X,\rho,\upsilon)$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_s(n,\hat{\sigma})}\int_{t_{-n-1}}^{t_n}\|u(t)\|\upsilon(t)\mathrm{d}t=0$$

引理3 序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in PAP_0S(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$ 的充分必要条件是：存在 $a\in PPAP_T^0(X,\rho,\upsilon)\cap UPC_T(\mathbb{R},X)$，使得 $a(t_n)=a_n$, $n\in\mathbb{Z}$. 进一步，$PAP_0S(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$ 是平移不变的.

定理2 令 $\{I_i(x)\}\in PAPS(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$, $x\in\Omega$. 当 $u(\mathbb{R})\subset\Omega$ 时，$u\in PPAP_T(X,\rho,\upsilon)\cap UPC_T(\mathbb{R},X)$. 如果下面的条件成立：

(H_4) $\{I_i(u):n\in\mathbb{Z},u\in K\}$ 在每个子集 $K\subseteq\Omega$ 上是有界的；

(H_5) 当 $i\in\mathbb{Z}$ 时，$I_i(u)$ 在 $u\in\Omega$ 处一致连续.

那么 $\{I_i(u(t_i))\}\in PAPS(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$.

证　类似于文献[12]中引理 3.7 的证明，容易证明$\{u^{ap}(t_i)\}\in APS(X)$. 此外，由引理 3 可得$\{u^{e}(t_i)\}\in PAP_0S(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$，所以$\{u(t_i)\}\in PAPS(X)$. 根据文献[13]的引理 3，当 $y_1,y_2\in\Omega$ 时，有

$$\|I_i^{ap}(y_1)-I_i^{ap}(y_2)\|\leqslant\|I_i(y_1)-I_i(y_2)\|$$

结合条件(H_5)可得，当 $i\in\mathbb{Z}$ 时，$I_i^{ap}(u)$ 是关于 $u\in\Omega$ 一致连续的，且 $I_i^{e}(u)$ 也是一致连续的. 定义

$$P_1(i)=I_i^{ap}(u^{ap}(t_i))\qquad P_2(i)=I_i(u(t_i))-I_i^{ap}(u^{ap}(t_i))\qquad i\in\mathbb{Z}$$

那么

$$I_i(u(t_i))=P_1(i)+P_2(i)\qquad i\in\mathbb{Z}$$

由文献[11]的定理 3.4，容易看出$\{P_1(i)\}\in APS(X)$. 所以下面只需要证明$\{P_2(i)\}\in PAP_0S(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$.

注意到$\{u(t_i)\}$和 $u^{ap}(t_i)$ 是有界的. 令 $K\subset\Omega$ 是有界的，使得 $u(t_i),u^{ap}(t_i)\subset K$，$i\in\mathbb{Z}$. 由条件($H_5$)，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$ 使得

$$\|I_i(u(t_i))-I_i(u^{ap}(t_i))\|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\|u^{e}(t_i)\|<\delta_1\qquad i\in\mathbb{Z}$$

容易看出 $K_1=\{u^{ap}(t_i):i\in\mathbb{Z}\}$ 是相对紧的. 因为当 $i\in\mathbb{Z}$ 时，I_i^{e} 在 $u\in K_1$ 处是一致连续的. 那么对 $\varepsilon>0$，存在 $0<\delta<\max\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$ 使得当 $y_1,y_2\in K_1$ 且 $\|y_1-y_2\|<\delta$ 时，有

$$\|I_i^{e}(y_1)-I_i^{e}(y_2)\|<\frac{\varepsilon}{4}\qquad i\in\mathbb{Z}$$

由于 K_1 是相对紧的，则存在 $x_1,\cdots,x_m\in K_1$ 使得对每个 i，有

$$\|u^{ap}(t_i)-x_k\|<\delta\qquad 1\leqslant k\leqslant m$$

$$\|I_i^{e}(u^{ap}(t_i))-I_i^{e}(x_k)\|<\frac{\varepsilon}{4}$$

所以如果 $\|I_i^{e}(x_k)\|<\delta$，那么

$$\|I_i^{e}(u^{ap}(t_i))\|\leqslant\|I_i^{e}(u^{ap}(t_i))-I_i^{e}(x_k)\|+\|I_i^{e}(x_k)\|<\frac{\varepsilon}{4}+\delta<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此，如果 $\|u^{e}(t_i)\|<\delta$ 且 $\|I_i^{e}(x_k)\|<\delta$，$k=1,2,\cdots,m$，那么

$$\|P_2(i)\|\leqslant\|I_i(u(t_i))-I_i(u^{ap}(t_i))\|+\|I_i^{e}(u^{ap}(t_i))\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\qquad i\in\mathbb{Z}$$

此外，对于 $S>0$，有

$$M_{S,\varepsilon}(P_2)\subset\bigcup_{k=1}^{m}M_{S,\delta}(I_i^{e}(x_k))\cup M_{S,\delta}(u^{e}(t_i))$$

因为$\{u^{e}(t_i)\},\{I_i^{e}(x_k)\}\in PAP_0S(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$，$k=1,\cdots,m$，由文献[13]的引理 1 以及定理 1，可得

$$\lim_{S\to\infty}\frac{\mu_s(M_{S,\delta}(u^{e}(t_i)),\hat{\vartheta})}{\mu_s(n,\hat{\sigma})}=\lim_{S\to\infty}\frac{\mu_s(M_{S,\delta}(I_i^{e}(x_k)),\hat{\vartheta})}{\mu_s(n,\hat{\sigma})}=0\qquad k=1,2,\cdots,m$$

因此

$$\lim_{S\to\infty}\frac{\mu_s(M_{S,\varepsilon}(P_2),\hat{\vartheta})}{\mu_s(n,\hat{\sigma})}\leqslant\lim_{S\to\infty}\frac{\mu_s(M_{S,\delta}(u^{e}(t_i)),\hat{\vartheta})+\sum_{k=1}^{m}\mu_s(M_{S,\delta}(I_i^{e}(x_k)),\hat{\vartheta})}{\mu_s(n,\hat{\sigma})}=0$$

所以 $P_2\in PAP_0S(X,\hat{\sigma},\hat{\vartheta})$.

参考文献:

[1] DIAGANA T. Weighted Pseudo Almost Periodic Functions and Applications [J]. Comp Rend Math, 2006, 343(10): 643-646.

[2] ZHANG L L, LI H X. Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions of Second-Order Neutral-Delay Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Comput Math Appl, 2011, 62(12): 4362-4376.

[3] NADIRA B H, EZZINBI K. Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions for Some Partial Functional Differential Equations [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(3): 3612-3621.

[4] CUEVAS C, PINTO M. Existence and Uniqueness of Pseudo-Almost Periodic Solutions of Semilinear Cauchy Problem with Non Dense Domain [J]. Nonlinear Anal, 2001, 45(1): 73-83.

[5] AGARWAL R P, ANDRADE B, CUEVAS C. Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions of a Class of Semilinear Fractional Differential Equations [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2010, 11(5): 3532-3554.

[6] DIAGANA T. Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces [M]. New York: Nova Science Publishers, 2007.

[7] ZHANG L L, LI H X. Weighted Pseudo-Almost Periodic Solutions for Some Abstract Differential Equations with Uniform Continuity [J]. Bull Aust Math Soc, 2010, 82(3): 424-436.

[8] ZHANG L L, LI H X. Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions of Second Order Neutral Differential Equations with Piecewise Constant Argument [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(2): 6770-6780.

[9] SHAIR A, GANI T S. On Almost Periodic Processes in Impulsive Competitive Systems with Delay and Impulsive Perturbations [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2009, 10(5): 2857-2863.

[10] DIAGANA T. Doubly-Weighted Pseudo-Almost Periodic Functions [J/OL]. African Diaspora Journal of Mathematics New, 2010, 14: 1-17. [2020-03-05]. https://arxiv.org/abs/1012.3043.

[11] LIU J W, ZHANG C Y. Composition of Piecewise Pseudo Almost Periodic Functions and Applications to Abstract Impulsive Differential Equations [J]. Advance Differential Equation, 2013, 2013: 1-11.

[12] SONG N, LI H X, CHEN C H. Piecewise Weighted Pseudo Almost Periodic Functions and Applications to Impulsive Differential Equations [J]. Math Slovaca, 2016, 66(5): 1-18.

[13] 夏正德, 宋 娜. 分段双加权伪概周期函数及其分解唯一性 [J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(24): 231-236.

[14] EDUARDO H M, MARCO R, HERNÁN R H. Existence of Solutions for Impulsive Partial Neutral Functional Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 331(2): 1135-1158.

[15] LIANG J, XIAO T J, ZHANG J. Decomposition of Weighted Pseudo-Almost Periodic Functions [J]. Nonlinear Anal, 2010, 73(10): 3456-3461.

[16] DIAGANA T. Existence of Doubly-Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions to Non-Autonomous Differential Equations [J]. Electron J Diff Equ, 2011, 28: 1-15.

[17] LIU J W, ZHANG C Y. Existence and Stability of Almost Periodic Solutions for Impulsive Differential Equations [J]. Advance Differential Equation, 2012, 2012: 1-34.

[18] STAMOV G T. On the Existence of Almost Periodic Solutions for the Impulsive Lasota-Wazewska Model [J]. Appl Math Lett, 2009, 22(4): 516-520.

[19] STAMOV G T, ALZABUT J O. Almost Periodic Solutions for Abstract Impulsive Differential Equations [J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(5): 2457-2464.

[20] CUEVAS C, HERNÁNDEZM E, RABELO M. The Existence of Solutions for Impulsive Neutral Functional Differential Equations [J]. Comput Math Appl, 2009, 58(4): 744-757.

[21] SONG N, XIA Z D. Almost Periodic Solutions for Impulsive Lasota-Wazewska Model with Discontinuous Coefficients [J]. International Mathematical Forum, 2017, 12(17): 841-852.

[22] SONG N, XIA Z D, HOU Q. The Study of Piecewise Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions for Implusive Lasota-

Wazewska Model with Discontinuous Coefficients [J]. Mathematica Slovaca，2020，70(2)：343-360.
[23] 姚晓洁，秦发金. 一类具有脉冲和收获率的 Lotla-Volterra 合作系统的 4 个正概周期解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(11)：7-14.
[24] 王春生，李永明. 多变时滞 Volterra 型动力系统的稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(7)：62-69.
[25] HERNÁN R H，ANDRADE B D，RABELO M. Existence of Almost Periodic Solutions for a Class of Abstract Impulsive Differential Equations [J]. ISRN Math，2011，2011：1-21.

The Compound Theorem for Piecewise Double-Weighted Pseudo-almost Periodic Functions

SONG　Na，　XIA Zheng-de

School of Science of NUC，North University of China，Taiyuan 030051，China

Abstract：In order to study the composition theorem of the piecewise double-weighted pseudo-almost periodic function，the composite functionis decomposed into the sum of the piecewise almost periodic function and the remaining part of it，and it is proved by translation invariancethat the remaining part after removing the piecewise almost periodic part should be a double weighted function. The composition theorem is further proved that the compounding of the two piecewise double weighted pseudo-almost periodic functions remains a piecewise double weighted pseudo-almost periodic function. The double-weighted pseudo-almost periodic sequence is introduced again，and the relationship between the double-weighted pseudo-almost periodic sequence and the piecewise double-weighted pseudo-almost periodic function is studied. Further，it is proved that the composite function of the double-weighted pseudo-almost periodic function and the double-weighted pseudo-almost periodic sequence is the double weighted pseudo-almost periodic sequence.

Key words：piecewise double-weighted pseudo-almost periodic function；double-weighted pseudo-almost periodic sequence；composition theorem

责任编辑　廖　坤