第 43 卷第 3 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2021 年 3 月
Vol. 43　No. 3　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Mar.　2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.03.011

双 sine-Gordon 方程的新精确解及其应用

林府标，　张千宏

贵州财经大学 数统学院，贵阳 550025

摘要： 首先利用试探函数法结合初等积分方法给出了双 sine-Gordon 方程的许多新显式精确解．其次采用这些新显式精确解构造了一种求非线性偏微分方程的双 sine-Gordon 方法．最后给出了双 sine-Gordon 方法的一些具体应用例子．

关 键 词： 双 sine-Gordon 方程；试探函数法；双 sine-Gordon 方法；精确解；应用

中图分类号：O175.14；O175.29　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2021)03-0074-08

双 sine-Gordon 方程

$$u_{xt}=\sin u+\sin 2u \tag{1}$$

在物理学和工程等领域有广泛的应用[1-10]．虽然已经有很多解析求解非线性偏微分方程的理论和方法[3-16]，但求解非线性偏微分方程没有统一而普遍适用的途径，而且许多非线性偏微分方程至今都还没有找到精确解．因此，继续探求行之有效的新解析求解方法并给出非线性偏微分方程的新精确解仍然是一项有实际价值和意义的工作．

在前人工作的基础上，首先利用试探函数法找到了文献[3-8]中并没有给出的方程(1)的许多新显式精确解，然后运用初等积分方法结合这些新精确解进一步找到了方程(1)的更多新显式精确解．其次利用这些新显式精确解和方程(1)的简化方程构造了双 sine-Gordon 方法．最后采用方程(1)的新显式精确解结合双 sine-Gordon 方法探求 Burgers，KdV 和 BBM 方程的新显式行波解．

1　试探函数法

试探函数法[11-12,14]的核心思想是巧妙地运用某些初等函数作为非线性偏微分方程解的试探函数，从而可以获得这些方程的显式精确解．假设 $u(x,t)=f(\xi)$，$\xi=x-\alpha t$，$\alpha\in\mathbb{R}$ 是方程(1)的解，则函数 $f=f(\xi)$ 满足方程

$$\alpha f''+\sin f+\sin 2f=0 \tag{2}$$

利用试探函数法假设方程(2)的精确解的表达式为

$$f(\xi)=\pm 2\arctan[v(\xi)]$$

通过计算可得

收稿日期：2019-05-23
基金项目：国家自然科学基金项目(11761018)；贵州省科技厅科学技术基金项目([2020]1Y008)；贵州省教育厅创新群体项目(黔教合 KY 字[2021]015)．
作者简介：林府标，副教授，博士，主要从事微分方程的解法研究．
通信作者：张千宏，教授，博士．

$$f''=\pm 2\,\frac{v''(1+v^2)-2vv'^2}{(1+v^2)^2}$$

$$\sin f=\pm\frac{2v}{1+v^2}\qquad \sin 2f=\pm 2\,\frac{2v(1-v^2)}{(1+v^2)^2}$$

于是约化方程(2)变成

$$\alpha v''(1+v^2)-2\alpha vv'^2+3v-v^3=0 \tag{3}$$

依据试探函数法的基本思想，假设方程(3)的显式精确解可写成

$$v=v_0+\frac{a+bw^2}{c+dw},\ w=\mathrm{e}^{k\xi},\ v_0,a,b,c,d,k\in\mathbb{R}$$

通过计算可得

$$v'=\frac{bdkw^3+2bckw^2}{(c+dw)^2}$$

$$v''=\frac{bd^2k^2w^4+3bcdk^2w^3+4bc^2k^2w^2}{(c+dw)^3}$$

把 v,v',v'' 的表达式代入方程(3)，计算整理得关于 w 的多项式函数方程，分别令 $w^j(j=0,1,\cdots,8)$ 的系数为零，得到关于待定参数 v_0,a,b,c,d,α,k 的非线性代数方程组

$$\begin{gathered}
b^3d^2(\alpha k^2+1)=0,\ b^2d(5\alpha bck^2+2bc+3d^2v_0)=0\\
b(5\alpha abd^2k^2-3abd^2-4\alpha b^2c^2k^2-2\alpha bcd^2k^2v_0+\alpha d^4k^2{v_0}^2+\\
\alpha d^4k^2-b^2c^2-9bcd^2v_0-3d^4{v_0}^2+3d^4)=0\\
d(5\alpha ab^2ck^2+8\alpha abd^2k^2v_0-6ab^2c-6abd^2v_0-2\alpha b^2c^2k^2v_0+\\
5\alpha bcd^2k^2{v_0}^2+5\alpha bcd^2k^2-9b^2c^2v_0-12bcd^2{v_0}^2+12bcd^2-d^4{v_0}^3+3d^4v_0)=0\\
5\alpha a^2bd^2k^2-3a^2bd^2+20\alpha abcd^2k^2v_0+\alpha ad^4k^2{v_0}^2+\alpha ad^4k^2-3ab^2c^2-18abcd^2v_0-3ad^4{v_0}^2+\\
3ad^4+11\alpha bc^2d^2k^2{v_0}^2+11\alpha bc^2d^2k^2-3b^2c^3v_0-18bc^2d^2{v_0}^2+18bc^2d^2-5cd^4{v_0}^3+15cd^4v_0=0\\
d(9\alpha a^2bck^2-6a^2bc-3a^2d^2v_0+20\alpha abc^2k^2v_0+\alpha acd^2k^2{v_0}^2+\alpha acd^2k^2-18abc^2v_0-\\
12acd^2{v_0}^2+12acd^2+11\alpha bc^3k^2{v_0}^2+11\alpha bc^3k^2-12bc^3{v_0}^2+12bc^3-10c^2d^2{v_0}^3+30c^2d^2v_0)=0\\
4\alpha a^2bc^2k^2-\alpha a^3d^2k^2-2\alpha a^2cd^2k^2v_0-3a^2bc^2-9a^2cd^2v_0+8\alpha abc^3k^2v_0-\alpha ac^2d^2k^2{v_0}^2-\alpha ac^2d^2k^2-\\
6abc^3v_0-18ac^2d^2{v_0}^2+18ac^2d^2+4\alpha bc^4k^2{v_0}^2+4\alpha bc^4k^2-3bc^4{v_0}^2+\\
3bc^4-10c^3d^2{v_0}^3+30c^3d^2v_0-a^3d^2=0\\
cd(-\alpha a^3k^2-2a^3-2\alpha a^2ck^2v_0-9a^2cv_0-\alpha ac^2k^2{v_0}^2-\alpha ac^2k^2-12ac^2{v_0}^2+\\
12ac^2-5c^3{v_0}^3+15c^3v_0)=0\\
c^2(-a^3-3a^2cv_0-3ac^2{v_0}^2+3ac^2-c^3{v_0}^3+3c^3v_0)=0
\end{gathered}\tag{4}$$

利用软件 Matlab 结合吴消元法，可求得方程组(4)的一组解为 $v_0=0$，$c=0$，$\alpha=-\dfrac{1}{k^2}$，$d=\pm 2\sqrt{ab}$，$ab>0$. 因此，方程(3)的精确解可写成

$$v=\pm\frac{a+bw^2}{2\sqrt{ab}\,w},\ w=\mathrm{e}^{k\xi},\ \xi=x+\frac{1}{k^2}t,\ ab>0$$

所以方程(1)的行波解和方程(2)的精确解为

$$u(x,t)=f(\xi)=\pm 2\arctan[v(\xi)],\ v=\frac{a+bw^2}{2\sqrt{ab}\,w},\ w=\mathrm{e}^{k\xi},\ \xi=x+\frac{1}{k^2}t,\ ab>0 \tag{5}$$

特别地若取 $a=b=1$，则方程(1)的行波解和方程(2)的精确解的表达式为

$$u(x,t)=f(\xi)=\pm 2\arctan[\cosh(k\xi)],\ \xi=x+\frac{1}{k^2}t \tag{6}$$

类似地，利用试探函数法可求得方程(3)的精确解为

$$v=\pm\frac{2\sqrt{-3ab}\,w}{a+bw^2},\ w=e^{k\xi},\ \xi=x+\frac{3}{k^2}t,\ ab<0$$

因此，方程(1)的行波解和方程(2)的精确解为

$$u(x,t)=f(\xi)=\pm2\arctan[v(\xi)],\ v=\frac{2\sqrt{-3ab}\,w}{a+bw^2},\ w=e^{k\xi},\ \xi=x+\frac{3}{k^2}t,\ ab<0 \tag{7}$$

特别地若取 $a=-1$，$b=1$，则方程(1)的行波解和方程(2)的精确解的表达式为

$$u(x,t)=f(\xi)=\pm2\arctan[\sqrt{3}\operatorname{csch}(k\xi)],\ \xi=x+\frac{3}{k^2}t \tag{8}$$

文献[3-8]没有给出方程(1)的显式行波解(5)-(8).

2 初等积分方法

若令变换 $f=2\omega$，即 $\omega=\frac{1}{2}f(\xi)$，$\xi=x-\alpha t$，α 为常数，则约化方程(2)转化成

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2}=-\frac{1}{\alpha}(\sin\omega\cos\omega+\sin2\omega\cos2\omega) \tag{9}$$

在方程(9)两边同时乘以 $2\omega'$，可得

$$\alpha((\omega')^2)'=-(\sin^2\omega)'-\frac{1}{2}(\sin^2 2\omega)'$$

然后两边同时关于 ξ 积分一次，记积分常数为 c，于是有

$$\left(\frac{d\omega}{d\xi}\right)^2=\frac{1}{\alpha}(2\sin^4\omega-3\sin^2\omega+c),\ c\in\mathbb{R} \tag{10}$$

1) 若取 $c=1$，$\alpha<0$，$\varepsilon=\pm1$，则方程(10)变成

$$\frac{d\omega}{d\xi}=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{\alpha}\cos^2\omega\cos2\omega} \tag{11}$$

取 $\alpha=-\frac{1}{k^2}$，易验证方程(11)的精确解为

$$\omega=\frac{1}{2}f(\xi),\ \xi=x+\frac{1}{k^2}t \tag{12}$$

其中 $f=f(\xi)$ 见(5)式.

2) 若取 $c=0$，$\alpha<0$，$\varepsilon=\pm1$，则方程(10)变成

$$\frac{d\omega}{d\xi}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{-\alpha}}\sin\omega\sqrt{3-2\sin^2\omega} \tag{13}$$

取 $\alpha=-\frac{3}{k^2}$，易验证方程(13)的精确解为

$$\omega=\frac{1}{2}f(\xi),\ \xi=x+\frac{3}{k^2}t \tag{14}$$

其中 $f=f(\xi)$ 见(7)式.

3) 若取 $c=\frac{9}{8}$，$\alpha>0$，$\varepsilon=\pm1$，则方程(10)变成

$$\frac{d\omega}{d\xi}=\varepsilon\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\left(\sin^2\omega-\frac{3}{4}\right) \tag{15}$$

作三角函数代换，若令 $\bar{\omega}=\tan\frac{\omega}{2}$，即 $\omega=2\arctan\bar{\omega}$，$\sin\omega=\frac{2\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^2}$，则通过分离变量可求出方程(15)的一

般解为

$$\omega = 2\arctan(\tilde{\omega}_j(\xi)) \qquad j = 1,2 \tag{16}$$

其中：$\tilde{\omega}_1 = \dfrac{\varphi + 1 + 2\sqrt{\varphi^2 - \varphi + 1}}{\sqrt{3}(\varphi - 1)}$，$\tilde{\omega}_2 = \dfrac{\varphi + 1 - 2\sqrt{\varphi^2 - \varphi + 1}}{\sqrt{3}(\varphi - 1)}$，$\varphi = \lambda e^{\varepsilon\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}$，$\lambda \in \mathbb{R}$，$\varepsilon = \pm 1$.

从而利用(16)式与 $\tilde{\omega}_j(j = 1,2)$ 的关系式和三角函数恒等式，可得

$$\tan\omega = \frac{2\tilde{\omega}_j}{1 - \tilde{\omega}_j^2} \qquad \sin\omega = \frac{2\tilde{\omega}_j}{1 + \tilde{\omega}_j^2} \qquad \cos\omega = \frac{1 - \tilde{\omega}_j^2}{1 + \tilde{\omega}_j^2} \qquad j = 1,2 \tag{17}$$

因此，方程(1)的显式行波解和方程(2)的显式精确解的表达式为

$$u(x, t) = f(\xi) = 4\arctan(\tilde{\omega}_j(\xi)) \qquad j = 1,2 \tag{18}$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\varphi + 1 + 2\sqrt{\varphi^2 - \varphi + 1}}{\sqrt{3}(\varphi - 1)} \qquad \tilde{\omega}_2 = \frac{\varphi + 1 - 2\sqrt{\varphi^2 - \varphi + 1}}{\sqrt{3}(\varphi - 1)}$$

$$\varphi = \lambda e^{\varepsilon\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}, \ \xi = x - \alpha t, \ \alpha > 0, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \varepsilon = \pm 1$$

4）若取 $c = 1$，$\alpha = 1$，$\varepsilon = \pm 1$，则方程(10)变成

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \varepsilon\cos\omega\sqrt{\cos 2\omega} \tag{19}$$

注意到通过分离变量，方程(19)可改写成

$$\frac{d\sin\omega}{(1 - \sin^2\omega)\sqrt{1 - 2\sin^2\omega}} = \varepsilon d\xi$$

若令变换 $s = \sqrt{\cot^2\omega - 1}$，则该方程变成

$$\frac{ds}{1 + s^2} = \varepsilon d\xi$$

两边同时积分得方程(19)的一般解为

$$\omega = \operatorname{arccot}[\pm\sec(\xi + \lambda)], \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{20}$$

从而方程(1)的行波解和方程(2)的显式精确解的表达式为

$$u(x, t) = f(\xi) = 2\operatorname{arccot}[\pm\sec(\xi + \lambda)], \ \xi = x - t, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{21}$$

文献[3-8]没有给出方程(1)的显式行波解(18)和(21).

3　双 sine-Gordon 方法的求解步骤

方程(11),(13),(15)和(19)是双 sine-Gordon 方程(1)和约化方程(2)的另一种被简化的变换形式，其对应的显式精确解分别为(12),(14),(16)和(20). 作为一种应用，这些变换方程及其相应的显式精确解可用来求解非线性偏微分方程

$$F(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{tt}, u_{xx}, \cdots) = 0 \tag{22}$$

第一步：对变量 x 和 t 作行波变换，令 $\xi = x - \alpha t$，其中 α 为常数，表示波速. 假设 $u(x, t) = v(\xi)$，$\xi = x - \alpha t$ 为方程(22)的解，于是方程(22)可转化为关于 $v = v(\xi)$ 的常微分方程

$$F(v, -\alpha v', v', -\alpha v'', \alpha^2 v'', v'', \cdots) = 0 \tag{23}$$

第二步：假设方程(23)的精确解的表达式可写成以下 3 种形式中的一种

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sin^i[\omega(\xi)] \qquad v(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cos^i[\omega(\xi)] \qquad v(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \tan^i[\omega(\xi)] \tag{24}$$

其中 $\alpha, a_0, \cdots, a_n$ 是待定的未知实参数，$\omega = \omega(\xi)$ 满足方程(11)或(13)或(15)或(19)，n 是正整数，可采用齐次平衡原理，通过平衡方程(22)中的非线性项和最高阶导数项而得到.

第三步：把表达式(24)代入方程(22)中，利用软件 Matlab 或 Mathematica 计算，可得到关于 $\sin^i\omega$，

$\sin^i\omega\cos^j\omega$，$\cos^i\omega(i,j=0,1,\cdots)$ 的多项式. 然后令多项式的各项系数为零，则进一步可获得关于待求实参数 $\alpha,a_0,\cdots,a_n$ 的代数方程组.

第四步：确定常数 $\alpha,a_0,\cdots,a_n$ 后，将方程(11)或(13)或(15)或(19)的对应解代入(24)式，即可获得非线性偏微分方程(22)的新精确解.

4 Burgers 方程的新行波解

双 sine-Gordon 方法(24)与广义 Tanh 函数法[9-10]的基本思想类似，但有时又比广义 Tanh 函数法更简洁，且能找到方程(22)的新精确解. 下面用双 sine-Gordon 方法(24)求解 Burgers 方程

$$u_t+uu_x-\beta u_{xx}=0,\ \beta>0 \tag{25}$$

这里 β 是耗散系数，方程(25)的背景和其它应用介绍可参见文献[10，12]. 假设 $u(x,t)=v(\xi)$，$\xi=x-\alpha t$，$\alpha\in\mathbb{R}$ 是方程(25)的解. 因此，方程(25)变成

$$\alpha v'-vv'+\beta v''=0 \tag{26}$$

注意到方程(15)和(24)，平衡方程(26)中的项 vv' 和 v''，于是假设方程(26)的精确解的表现形式可写成

$$v(\xi)=a_0+a_1\tan[\omega(\xi)],\ a_0,a_1\in\mathbb{R} \tag{27}$$

这里 ω 满足变换方程(15)，其中 $\varepsilon=1$. 于是把(27)式代入方程(26)，通过计算整理得关于 a_0,a_1,α 的代数方程

$$4a_1\left(\beta-\sqrt{\frac{2}{\alpha}}a_1\alpha\right)\sin^3\omega-4a_1\alpha(a_0-\alpha)\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sin^2\omega\cos\omega-$$

$$3a_1\left(\beta-\sqrt{\frac{2}{\alpha}}a_1\alpha\right)\sin\omega+3a_1\alpha(a_0-\alpha)\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\cos\omega=0$$

分别令 $\sin^3\omega,\sin^2\omega\cos\omega,\sin\omega,\cos\omega$ 的系数为零，解得 $a_0=\alpha$，$a_1=\dfrac{\beta}{\sqrt{2\alpha}}$，$\alpha>0$. 类似地，若 ω 满足变换方程(15)，且选取 $\varepsilon=-1$，则可解得 $a_0=\alpha$，$a_1=-\dfrac{\beta}{\sqrt{2\alpha}}$，$\alpha>0$. 注意到(27)式和 ω 满足方程(15)，而(16)是方程(15)的解，故直接利用(17)式的第一个三角恒等式，方程(25)的新显式行波解可写成

$$u_j(x,t)=\alpha\pm\beta\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\ \frac{\tilde{\omega}_j(\xi)}{1-\tilde{\omega}_j^2(\xi)}\qquad j=1,2 \tag{28}$$

$$\tilde{\omega}_1=\frac{\varphi+1+2\sqrt{\varphi^2-\varphi+1}}{\sqrt{3}(\varphi-1)}\qquad \tilde{\omega}_2=\frac{\varphi+1-2\sqrt{\varphi^2-\varphi+1}}{\sqrt{3}(\varphi-1)}\qquad \varphi=\lambda\mathrm{e}^{\varepsilon\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}$$

其中 $\xi=x-\alpha t$，$\alpha>0$，$\lambda\in\mathbb{R}$，$\varepsilon=\pm1$. 文献[9-12，16-20]没有给出方程(25)的显式行波解(28). 显式行波函数(28)的取值仅与相 $\xi=x-\alpha t$，$\alpha>0$ 有关，当 $x\to\pm\infty$ 时，可得到 $\xi\to\pm\infty$. 若取 $\varepsilon=1$，则

$$\lim_{\xi\to+\infty}\varphi=\lim_{\xi\to+\infty}\lambda\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}=\infty$$

$$\lim_{\xi\to-\infty}\varphi=\lim_{\xi\to-\infty}\lambda\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}=0$$

若取 $\varepsilon=-1$，则

$$\lim_{\xi\to+\infty}\varphi=\lim_{\xi\to+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}=0$$

$$\lim_{\xi\to-\infty}\varphi=\lim_{\xi\to-\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}\xi}=\infty$$

于是注意到(28)式可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}u_j(x,t)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}u_j(x,t)$ 为有限值，$j=1,2$.

因此，显式行波解(28)收敛，即显式行波解(28)具有冲击波的特征. 显式行波解(28)的扭结型(kink)或反扭结型(ante-kink)依赖于(28)式中符号“±”和 $\varepsilon=\pm1$ 的选取.

5　KdV 和 BBM 方程的新行波解

5.1　KdV 方程的新行波解

Korteweg 和 de Vries 在研究浅水波的传播时建立了标准的 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{29}$$

并且探求出了方程(29)的孤立波解，KdV 方程的常见其它形式参见文献[10-12,15]，其一般形式为 $u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$，$a, b \in \mathbb{R}$，但标度变换并不改变方程本身的固有特性. 假设方程(29)的行波解可写成 $u(x, t) = v(\xi)$，$\xi = x - \alpha t$，其中 α 为常数，表示波速. 于是该行波变换将方程(29)化为关于 ξ 的常微分方程

$$\alpha v' - 6vv' - v''' = 0 \tag{30}$$

将方程(30)两边关于 ξ 同时积分一次，并令积分常数为零可得

$$\alpha v - 3v^2 - v'' = 0 \tag{31}$$

利用方程(30)注意到(24)式，平衡最高阶导数项 v''' 和非线性项 vv' 推出 $n = 2$. 因此，可假设方程(30)的解的表达式为

$$v(\xi) = b_0 + b_1 \tan[\omega(\xi)] + b_2 \tan^2[\omega(\xi)],\ b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \tag{32}$$

其中 ω 满足变换方程(15)，而 $\varepsilon = 1$. 把(32)式代入方程(30)，计算整理之后分别令 $\sin^{2j}\omega\,(j = 0, 1, \cdots, 8)$ 和 $\sin^{2j-1}\omega\cos\omega\,(j = 1, \cdots, 8)$ 的系数为零，可得关于 b_0, b_1, b_2, α 的代数方程组

$$\begin{gathered}
b_1(2\alpha^2 - 12\alpha b_0 + 36\alpha b_2 + 3) = 0,\ -2\alpha^2 b_2 + 12\alpha b_0 b_2 + 6\alpha b_1{}^2 - 12\alpha b_2{}^2 - 9b_2 = 0\\
b_1(-62\alpha^2 + 372\alpha b_0 - 972\alpha b_2 - 87) = 0,\ 18\alpha^2 b_2 - 108\alpha b_0 b_2 - 54\alpha b_1{}^2 + 92\alpha b_2{}^2 + 77b_2 = 0\\
b_1(140\alpha^2 - 840\alpha b_0 + 1872\alpha b_2 + 183) = 0,\ -52\alpha^2 b_2 + 312\alpha b_0 b_2 + 156\alpha b_1{}^2 - 220\alpha b_2{}^2 - 211b_2 = 0\\
b_1(-203\alpha^2 + 1218\alpha b_0 - 2250\alpha b_2 - 246) = 0,\ 25\alpha^2 b_2 - 150\alpha b_0 b_2 - 75\alpha b_1{}^2 + 84\alpha b_2{}^2 + 96b_2 = 0\\
b_1(196\alpha^2 - 1176\alpha b_0 + 1728\alpha b_2 + 219) = 0,\ -8\alpha^2 b_2 + 48\alpha b_0 b_2 + 24\alpha b_1{}^2 - 20\alpha b_2{}^2 - 29b_2 = 0\\
b_1(-42\alpha^2 + 252\alpha b_0 - 276\alpha b_2 - 43) = 0,\ 46\alpha^2 b_2 - 276\alpha b_0 b_2 - 138\alpha b_1{}^2 + 76\alpha b_2{}^2 + 157b_2 = 0\\
b_1(364\alpha^2 - 2184\alpha b_0 + 1584\alpha b_2 + 339) = 0,\ -44\alpha^2 b_2 + 264\alpha b_0 b_2 + 132\alpha b_1{}^2 - 36\alpha b_2{}^2 - 141b_2 = 0\\
b_1(-25\alpha^2 + 150\alpha b_0 - 54\alpha b_2 - 21) = 0,\ \alpha^2 b_2 - 6\alpha b_0 b_2 - 3\alpha b_1{}^2 + 3b_2 = 0,\ b_1(4\alpha^2 - 24\alpha b_0 + 3) = 0
\end{gathered} \tag{33}$$

利用吴消元法结合软件 Matlab 计算，可获得代数方程组(33)的一组解为 $b_0 = \dfrac{\alpha^2 + 3}{6\alpha}$，$b_1 = 0$，$b_2 = -\dfrac{1}{4\alpha}$，$\alpha > 0$. 因此，方程(29)的行波解为

$$u(x, t) = \frac{\alpha^2 + 3}{6\alpha} - \frac{1}{4\alpha}\tan^2[\omega(\xi)],\ \xi = x - \alpha t,\ \alpha > 0 \tag{34}$$

采用(17)式可以写出行波解(34)的具体表达式，为了行文简洁省略其重复列举过程. 类似地，求解方程(31)也可以获得解(34)，但其中 $\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 文献[9-13]没有给出显式行波解(34).

5.2　BBM 方程的新行波解

假设 BBM 方程

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{35}$$

的行波解为 $u(x, t) = v(\xi)$，$\xi = x - \alpha t$，$\alpha \in \mathbb{R}$. 于是方程(35)约化为常微分方程 $(1-\alpha)v' + vv' - \alpha v''' = 0$. 类似地，可获得方程(35)的行波解为

$$u(x, t) = \alpha - 4 + \frac{3}{2}\tan^2[\omega(\xi)],\ \xi = x - \alpha t,\ \alpha > 0 \tag{36}$$

其中 $\omega = \omega(\xi)$ 见(16)式，利用(17)式可以写出行波解(36)的具体表达式，为了行文简洁省略其过程. 文献

[21-24]没有给出显式行波解(36). 另外，类似地可探求变系数的BBM方程 $u_t+\kappa u_x+\beta u u_x-\gamma u_{xxt}=0$，$\kappa,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ 的显式行波解.

6 结论与探讨

首先找到了双sine-Gordon方程的许多新行波解，并且构造了一种求解非线性偏微分方程精确解的双sine-Gordon方法. 其次，利用构造的双sine-Gordon方法分别给出了Burgers、KdV和BBM方程的显式新精确解，并对找到的Burgers方程的新精确解的相关性质作了分析. 最后，构造的双sine-Gordon方法可用于求解其它非线性偏微分方程，如采用该方法可获得修正的BBM方程 $u_t+u_x+u^2u_x+\beta u_{xxt}=0$，$\beta>0$ 的行波解为 $u(x,t)=\pm\frac{\sqrt{3\beta}}{2}\tan[\omega(\xi)]$，$\xi=x-\alpha t$，$\alpha=\frac{3\beta+4}{4}$，其中 ω 见(16)式. 如何探求更多的双sine-Gordon方程(1)的解析求解方法和找到变换方程(10)的新精确解值得今后进一步探索，并且如何用它们找到非线性科学中许多具有实际意义和应用价值的非线性偏微分方程的新显式精确解值得在今后的工作中进一步研究和深思.

参考文献：

[1] SALERNO M, QUINTERO N R. Soliton Ratchets [J]. Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2002, 65(2): 1-4.

[2] GANI V A, KUDRYAVTSEV A E. Kink-Antikink Interactions in the Double Sine-Gordon Equation and the Problem of Resonance Frequencies [J]. Physical Review E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, 1999, 60(3): 3305-3309.

[3] POPOV C A. Perturbation Theory for the Double Sine-Gordon Equation [J]. Wave Motion, 2005, 42(4): 309-316.

[4] WANG M L, LI X Z. Exact Solutions to the Double Sine-Gordon Equation [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 27(2): 477-486.

[5] LIU S K, FU Z T, LIU S D. Exact Solutions to Sine-Gordon-Type Equations [J]. Physics Letters A, 2006, 351(1-2): 59-63.

[6] HE B, MENG Q, LONG Y, et al. New Exact Solutions of the Double Sine-Gordon Equation Using Symbolic Computations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186(2): 1334-1346.

[7] CHEN Y Z, YONG X L. Exact Solutions to the Sine-Gordon-Type Equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 202(2): 539-543.

[8] SUN Y C. New Exact Traveling Wave Solutions for Double Sine-Gordon Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 258: 100-104.

[9] 范恩贵. 可积系统与计算机代数 [M]. 北京：科学出版社，2004.

[10] 郭玉翠. 非线性偏微分方程引论 [M]. 北京：清华大学出版社，2008.

[11] 刘式适，刘式达. 物理学中的非线性方程 [M]. 2版. 北京：北京大学出版社，2012.

[12] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解 [M]. 北京：科学出版社，2007.

[13] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[14] 林府标，张千宏，张俊，等. 预李群分类法的应用和Fitzhugh-Nagumo方程的行波解 [J]. 应用数学，2017，30(4)：908-915.

[15] WAZWAZ A M. Two Integrable Third-Order and Fifth-Order KdV Equations with Time-Dependent Coefficients [J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2019, 29(6): 2093-2102.

[16] GRIGORIEV Y N, IBRAGIMOV N H, KOVALEV V F, et al. Symmetries of Integro-Differential Equations: with Applications in Mechanics and Plasma Physics [M]. New York: Springer, 2010.

[17] 李伟. Burgers方程的新的精确解 [J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版)，2017，35(1)：73-75.

[18] 谢元喜. Burgers方程的新解 [J]. 吉首大学学报(自然科学版)，2008，29(5)：5-9，22.

[19] 谢元喜. Burgers 方程的直接解法 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版)，2007(3)：89-92.
[20] 谢元喜，唐驾时. 对“求一类非线性偏微分方程解析解的一种简洁方法”一文的一点注记 [J]. 物理学报，2005，54(3)：1036-1038.
[21] 胡凯丽，李　岩. 基于符号计算的 BBM 方程的精确解 [J]. 计算机技术与发展，2019，29(5)：70-73.
[22] 套格图桑，斯仁道尔吉. BBM 方程和修正的 BBM 方程新的精确孤立波解 [J]. 物理学报，2004，53(12)：4052-4060.
[23] 任莹蓉，丁琰豪，范佳琪，等. BBM 方程的精确行波解研究 [J]. 湖州师范学院学报，2017，39(2)：8-11.
[24] 姜喜春. BBM 方程的显式精确行波解 [J]. 辽宁工业大学学报(自然科学版)，2010，30(2)：136-140.

New Exact Solutions of Double Sine-Gordon Equation and Their Application

LIN Fu-biao，　ZHANG Qian-hong

School of Mathematics and Statistics，Guizhou University of Finance and Economics，Guiyang 550025，China

Abstract：Firstly，many new explicit and exact solutions of the double sine-Gordon equation are given by means of the method of trial function and elementary integrals. Secondly，a double sine-Gordon method is developed by using the obtained new solutions of the double sine-Gordon equation，which can be used to find exact solutions of nonlinear partial differential equations. Finally，some examples of application of the double sine-Gordon method are presented.

Key words：double sine-Gordon equation；trial function method；double sine-Gordon method；exact solution；application

责任编辑　张　枸