第 43 卷第 3 期 西南大学学报(自然科学版) 2021 年 3 月
Vol. 43 No. 3 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Mar. 2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.03.012

一类 Rosenau 方程 Cauchy 问题整体解的存在性

王 科[1], 华 洋[2]

1. 成都工业学院 大数据与人工智能学院,成都 611730;2. 电子科技大学 数学科学学院,成都 611731

摘要: 主要研究如下一类 Rosenau 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}+u_{xxxxtt}-\gamma u_{xx}+u_{xxxx}=f(u)_{xx}$$

当 $f(u)=\beta|u|^{p}u$, $\beta\neq 0$ 和初始能量 $E(0)>0$ 时,利用势井方法得到了其弱解的整体存在性.

关 键 词: Rosenau 方程;Cauchy 问题;整体解;不变集

中图分类号: O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2021)03-0082-07

目前,在国内外有很多波浪数值模拟的理论模型,比如缓坡方程、KdV 方程、Navier-Stokes 方程以及 Boussinesq 类水波方程等. 其中,荷兰数学家 Korteweg 和他的学生 de Vries 在研究浅水表面波运动时建立了 KdV 方程,它是能对包含弱非线性和弱色散效果的非线性系统很好逼近的模型,并在理论上证实了孤立子波的存在性. KdV 方程描述了与孤立子波的产生有关的一维非简谐晶格的振动问题. 近年来,人们对于 KdV 方程的初值问题做了大量工作,由于此方程是在假设弱非调和的条件下建立起来的模型,坡度和高振幅波的性态不能由 KdV 方程准确预知. 在对紧离散系统的研究中,KdV 方程不能描绘波与波、波与墙的相互作用关系,为了弥补 KdV 方程的不足,文献[1-2]提出了 Rosenau 方程来处理紧离散动力系统. 它的两个经典方程为:

$$u_{t}+u_{xxxxt}-u_{x}+uu_{x}=f(u)_{x} \tag{1}$$

和

$$u_{tt}-\gamma u_{xx}+\alpha_1 u_{xxxx}+\alpha_2 u_{xxxxtt}=f(u)_{xx} \tag{2}$$

文献[3-8] 给出了这两个方程解存在性和唯一性的大量结果. 文献[9] 在有移动边界的区域里得到了方程(1) 解的存在性.

本文将考虑方程(2)Cauchy 问题解的存在性. 不失一般性,在方程(2) 中,假设 $\alpha_1=\alpha_2=1$,也即我们将研究如下 Rosenau 方程的 Cauchy 问题

$$u_{tt}+u_{xxxxtt}-\gamma u_{xx}+u_{xxxx}=f(u)_{xx} \tag{3}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{4}$$

其中:$x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}^{+}$, $\gamma>0$ 是正常数,$f(u)=-\beta|u|^{p}u$, $\beta\neq 0$. 在文献[10] 中,当 $\beta>0$ 时,作者利用压缩映射原理得到了方程局部解的适定性. 当 $F(u)=\int_0^u f(z)\mathrm{d}z\geqslant 0$ 或 $f'(u)$ 有下界时,得到了

收稿日期:2019-04-11

基金项目:国家自然科学基金项目(11671326).

作者简介:王 科,副教授,主要从事模型与算法、数据分析等研究.

问题(3)—(4)整体解的存在唯一性和解爆破的条件. 为界定初始能量，先给出文献[10]中关于问题(3)—(4)的一些结果，并引入势井深度.

引理 1[10]　假设 $s>\frac{1}{2}$，$\phi,\psi\in H^s$，则存在一个依赖于 ϕ,ψ 的最大时间 T_0，满足对于任意的 $T<T_0$，问题(3)—(4)有唯一解. 而且，如果

$$\sup_{t\in[0,T_0)}[\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}]<\infty$$

则 $T_0=\infty$.

引理 2[10]　假设引理 1 的条件成立，$T_0>0$ 是问题(3)—(4)解的最大存在时间，则对于所有的 $0<T<T_0$，如下能量等式成立

$$E(t)=\frac{1}{2}[\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2]+\frac{\beta}{p+2}\int_{\mathbb{R}}|u|^p u\,\mathrm{d}x=E(0)\tag{5}$$

这里 $(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u=\mathscr{F}^{-1}[|\xi|^{-1}\hat{u}(\xi)]$，$\mathscr{F}$ 是 Fourier 变换，$E(0)=\frac{1}{2}[\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2]+\frac{\beta}{p+2}\int_{\mathbb{R}}|u|^p u\,\mathrm{d}x$ 为初始能量.

我们引入如下能量函数

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{\gamma}{2}\|u\|^2+\frac{\beta}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}\tag{6}$$

和函数

$$I(u)=\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2+\beta\|u\|_{p+2}^{p+2}\tag{7}$$

引理 3(势井深度)　势井深度 $d=\frac{p}{2(p+2)}(\beta C_*^{p+2})^{-\frac{2}{p}}$，这里 C_* 是最佳 Sobolev 嵌入常数，即

$$C_*=\sup_{u\in H^1\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{p+2}}{(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)^{\frac{1}{2}}}\tag{8}$$

证　由 d 的定义，我们得到 $u\in\mathscr{N}$，这里 $\mathscr{N}=\{u\in H^1\setminus\{0\}\mid I(u)=0\}$，即 $I(u)=0$，所以

$$\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2=-\beta\|u\|_{p+2}^{p+2}\leqslant|\beta|C_*^{p+2}(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)^{\frac{p}{2}}(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)$$

再由(8)式得到

$$(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)\geqslant(|\beta|C_*^{p+2})^{-\frac{2}{p}}\tag{9}$$

另一方面，由(6),(7),(8)式和 $I(u)=0$，有

$$J(u)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+2}\right)(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)+\frac{1}{p+2}I(u)=$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+2}\right)(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)\geqslant$$
$$\frac{p}{2(p+2)}(|\beta|C_*^{p+2})^{-\frac{2}{p}}\tag{10}$$

即

$$d=\frac{p}{2(p+2)}(|\beta|C_*^{p+2})^{-\frac{2}{p}}$$

当 $f(u)=-\beta|u|^p u$ 时，作者建立稳定集和不稳定集，在初始能量 $E(0)<d$ 时和 $E(0)=d$ 时，利用势井方法得到了方程整体有界解的存在性和爆破的条件. 文献[12]中研究了如下的 Boussinesq 方程

$$u_{tt}-u_{xxtt}+u_{xxxxtt}=-\alpha u_{xxxx}+u_{xx}+f(u)_{xx}\tag{11}$$

用同样的方法得到了方程(11)解的整体存在性和爆破. 但是这些文献都是在低初始能量 $E(0)<d$ 和

临界初始能量 $E(0)=d$ 的条件下进行讨论，所以很自然想到在初始能量 $E(0)>0$ 时对方程的整体解进行研究. 当 $\beta>0$ 时，文献[13] 通过定义新的函数和势井法，在初始能量 $E(0)>0$ 时，得到了方程(3) 整体解的存在性，但是这种方法不适合 $\beta\neq 0$ 的情况. 我们将采用文献[14-16] 中的方法，构建一个新的势井来讨论问题.

本文分别用 L^p 和 H^s 来表示空间 $L^p(\mathbb{R})$ 和 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$，其范数分别为

$$\|u\|_p=\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}\qquad \|u\|=\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\qquad \|u\|_{H^s}=\|u\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

其中

$$\|u\|_{H^s}=\|(1-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}u\|=\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\|$$

再定义一个空间

$$H=\{u\in H^1\mid(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\in L^2\}$$

其范数为

$$\|u\|_H^2=\|u\|_{H^1}^2+\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\|^2$$

通过(7) 式，我们定义与文献[10] 中不同的稳定集

$$K_1=\{u\in H^1\mid I(u)>0\}\cup\{0\}\tag{12}$$

不稳定集

$$K_2=\{u\in H^1\mid I(u)<0\}\tag{13}$$

和势井深度

$$d=\inf_{u\in\mathcal{N}}J(u)$$

对于满足 $u\in C^1((0,T),H^1)$，$u_t\in C((0,T),H)$ 的解 $u(x,t)$，为了在任意正能量时得到解的整体存在性，我们定义一个新的函数空间

$$\mathscr{W}_T:=\{u\mid I(u(t))>\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2\}\cup\{0\}$$

下面证明本文中新定义的稳定集和不稳定集是不变集.

引理 4(不变集) 假设 $f(u)=\beta|u|^p u$，$\beta\neq 0$，$\phi\in H^1$，$\psi\in H$，$u(x,t)\in C^1([0,T_0);H^1)$ 是问题(3)-(4) 的唯一解，这里 T_0 是解的最大存在时间. 如果 $E(0)<d$，则对于所有的 $t\in[0,T_0)$：

1) 若 $\phi\in K_1$，则 $u(t)\in K_1$ 且 $\|u_x(t)\|^2+\gamma\|u\|^2<\dfrac{2(p+2)d}{p}$；

2) 若 $\phi\in K_2$，则 $u(t)\in K_2$ 且 $\|u_x(t)\|^2+\gamma\|u\|^2>\dfrac{2(p+2)d}{p}$.

证 因为 1) 和 2) 的证明是类似的，所以我们只需证明 2). 假设 $u(t)$ 是问题(3)-(4) 满足 $E(0)<d$，$\phi\in K_2$ 的任何一个局部弱解，T_0 是解的最大存在时间，则由引理 1 可知 $E(u(t))=E(0)<d$. 所以只需证明 $I(u(t))<0$. 这里用反证法，假设存在一个 $t_1\in(0,T_0)$ 满足 $I(u(t_1))\geqslant 0$，由 $I(u(t))$ 关于时间的连续性可知存在一个 $t_*\in(0,T_0)$ 满足 $I(u(t_*))=0$. 则由 d 的定义，得到

$$d\leqslant J(u(t_*))\leqslant E(u(t_*))=E(0)<d$$

这与已知条件矛盾. 所以，当 $t\in[0,T_0)$ 时，$\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2<-\beta\|u\|_{p+2}^{p+2}$. 由(8) 式可得

$$\frac{1}{C_*^2}\leqslant\frac{\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2}{\|u\|_{p+2}^2}<\frac{-\beta\|u\|_{p+2}^{p+2}}{\|u\|_{p+1}^2}\leqslant|\beta|\ \|u\|_{p+2}^p\tag{14}$$

则由引理 3 和(14) 式，可得

$$d=\frac{p}{2(p+2)}|\beta|^{-\frac{2}{p}}C_*^{-2}C_*^{-\frac{4}{p}}\leqslant$$

$$\frac{p}{2(p+2)}\frac{\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2}{\|u\|_{p+2}^2}(\|u\|_{p+2}^p)^{\frac{2}{p}}=$$

$$\frac{p}{2(p+2)}(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)$$

所以

$$\|u_x(t)\|^2+\gamma\|u\|^2>\frac{2(p+2)d}{p}$$

其实对于 1)，由 $I(t)$ 和 $E(t)$ 的定义有

$$E(t)=\frac{1}{2}[\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2+\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2]+\frac{\beta}{p+2}\int_{\mathbb{R}}|u|^p u\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|u_{xt}\|^2)+\frac{p}{2(p+2)}(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)+\frac{1}{p+2}I(t)$$

如果 $I(u(t))>0$，则

$$\frac{p}{2(p+2)}(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)<E(t)=E(0)<d$$

所以，

$$\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2<\frac{2(p+2)}{p}d$$

得证.

利用本文新定义的不变集和文献[10]中的方法也能得到文献[10]中同样的结果，这里不再赘述.

本文的主要结果如下：

定理 1　假设 $2\leqslant s\leqslant p+1$，$\phi\in H^1$，$\psi\in H$，如果

$$E(0)>0 \tag{15}$$

$$I(\phi)>\|(-\partial_x)^{-\frac{1}{2}}\psi\|^2+\|\psi_x\|^2 \tag{16}$$

$$2((-\partial_x)^{-\frac{1}{2}}\phi,(-\partial_x)^{-\frac{1}{2}}\psi)+2(\phi_x,\psi_x)+\|(-\partial_x)^{-\frac{1}{2}}\phi\|^2+\|\phi_x\|^2+\frac{2(p+2)}{p+4}E(0)<0 \tag{17}$$

则问题(3)－(4)的解整体存在.

引理 5　假设 $u(x,t)$ 是问题(3)－(4)带初值条件$(\phi,\psi)(\phi\in H^1,\psi\in H)$的解，如果初值条件满足(15)和(17)，则当 $u(x,t)\in\mathscr{W}_T$ 时，映射

$$\{t\longmapsto\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\|^2+\|u_x\|^2\}$$

是严格递减的.

证　我们定义

$$F(t)=\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u\|^2+\|u_x\|^2 \tag{18}$$

两边对 t 求导得到

$$F'(t)=2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t)+2(u_x,u_{xt}) \tag{19}$$

由(3)式得到

$$F''(t)=2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_{tt})+2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+2(u_x,u_{xtt})+2\|u_{xt}\|^2=$$

$$2\langle((-\partial_x^2)^{-1}u_{tt}+u_{xxtt},u)\rangle_{X*X}+2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|+2\|u_{xt}\|^2=$$

$$-2\|u_x\|^2-2\gamma\|u\|^2-2\beta\int_{\mathbb{R}}|u|^p u\,\mathrm{d}x+2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+2\|u_{xt}\|^2=$$

$$2\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t\|^2+2\|u_{xt}\|^2-2I(t)$$

其中 $X=\{u\in C^1((0,T),H^1)\cap C((0,T),H)\mid u(x,0)=\varphi,u_t(x,0)=\psi\}$.

因为 $u(t)\in\mathscr{W}_T$，所以当 $t\in[0,T)$ 时，

$$F''(t)<0$$

再由(17)式得到

$$2((-\partial_x)^{-\frac{1}{2}}\phi,(-\partial_x)^{-\frac{1}{2}}\psi)+2(\phi_x,\psi_x)<0$$

所以 $F'(0)<0$. 又因为 $F'(t)<F'(0)<0$，即 $F'(t)<0$，所以在区间$[0,T)$上

$$\{t\longmapsto\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\|^2+\|u_x\|^2\}$$

是严格递减的.

引理 6 假设 $2\leqslant s\leqslant p+1$，$\phi\in H^1$，$\psi\in H$，$u(x,t)$ 是问题(3)-(4)在最大存在区间$[0,T)$满足 $u\in C^1((0,T),H^1)$，$u_t\in C((0,T),H)$ 的弱解. 如果初始值满足(15)-(17)式，则 $u\in\mathscr{W}_T$.

证 我们将证明对任意的 $t\in[0,T)$，$u(t)\in\mathscr{W}_T$.

反证法：假设存在第一个 $t_*\in(0,T)$ 满足

$$I(u(t_*))=\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)\|^2+\|u_{tx}(t_*)\|^2 \tag{20}$$

和对任意的 $t\in[0,t_*)$，

$$I(u(t))>\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+\|u_{tx}(t)\|^2 \tag{21}$$

由(18),(19)式和引理 5 可知 $F(t)$ 和 $F'(t)$ 在区间$(0,t_*)$上都是严格递减的. 由(17)可得对所有的 $t\in(0,t_*)$，

$$F(t)<\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\phi\|^2+\|\phi_x\|^2<$$
$$-2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\phi,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\psi)-2(\phi_x,\psi_x)-\frac{2(p+2)}{p+4}E(0)$$

而且由 $\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\|^2+\|u_x\|^2$ 关于 t 的连续性，可知

$$F(t_*)<-2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\phi,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\psi)-2(\phi_x,\psi_x)-\frac{2(p+2)}{p+4}E(0) \tag{22}$$

另一方面，由(5)-(7)式和引理 2，可得

$$E(0)=E(t_*)=\frac{1}{2}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)\|^2+\|u_{tx}(t_*)\|^2)+$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+2}\right)(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)+\frac{1}{p+2}I(u(t_*))$$

由(5)式有

$$E(0)=E(t_*)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{p+2})(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)\|^2+\|u_{tx}(t_*)\|^2)+ \tag{23}$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+2}\right)(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)\geqslant$$
$$\frac{p+4}{2(p+2)}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)\|^2+\|u_{tx}(t_*)\|^2) \tag{24}$$

由下面的等式

$$\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)\|^2=\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)+(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t_*)\|^2-\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t_*)\|^2-$$
$$2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t_*),(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*))$$
$$\|u_{tx}(t_*)\|^2=\|u_{tx}(t_*)+u_x(t_*)\|^2-\|u_x(t_*)\|^2-2(u_x(t_*),u_{tx}(t_*))$$

和引理 5 可得

$$
\begin{aligned}
E(0) \geqslant & \frac{p+4}{2(p+2)}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t_*)+(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*)\|^2+\|u_{tx}(t_*)+u_x(t_*)\|^2)- \\
& \frac{p+4}{2(p+2)}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t_*)\|^2+\|u_x(t_*)\|^2)- \\
& 2\frac{p+4}{2(p+2)}(((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t_*),(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t_*))+(u_x(t_*),u_{tx}(t_*)))
\end{aligned} \tag{25}
$$

所以

$$
F(t_*) \geqslant -2((-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\phi,(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}\psi)-2(\phi_x,\psi_x)-\frac{p+4}{2(p+2)}E(0) \tag{26}
$$

显而易见，(18) 和(21) 式矛盾. 引理得证.

定理 1 的证明　由引理 1，可知问题在最大存在区间$[0, T)$上有唯一的局部解. 假设 $u(x, t)$ 是问题满足 $u \in C^1((0, T), H^1)$，$u_t \in C((0, T), H)$ 和(15)－(17) 式的弱解. 由引理 6 可得，$u(x, t) \in \mathscr{W}_T$，即当 $t \in [0, T)$ 时，

$$
I(u(t)) > \|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u(t)\|^2+\|u_{tx}(t)\|^2 \tag{27}
$$

因而，由引理 2,(5),(7) 和(25) 式，可得

$$
\begin{aligned}
E(0)=E(t)= & \frac{1}{2}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+\|u_{tx}(t)\|^2)+ \\
& (\frac{1}{2}-\frac{1}{p+2})(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)+\frac{1}{p+2}I(u(t)) > \\
& \frac{p+4}{2(p+2)}(\|(-\partial_x^2)^{-\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+\|u_{tx}(t)\|^2)+ \\
& \frac{p}{2(p+2)}(\|u_x\|^2+\gamma\|u\|^2)
\end{aligned}
$$

由此可得 $u(x, t)$ 和 $u_t(x, t)$ 分别在空间 $C^1((0, T), H^1)$ 和空间 $C((0, T), H)$ 中是有界的. 所以由引理 1 可知 $T=\infty$，即问题的解整体存在.

参考文献：

[1]　ROSENAU P. A Quasi-Continuous Description of a Nonlinear Transmission Line [J]. PhysicaScripta，1986，34(6B)：827-829.

[2]　ROSENAU P. Dynamics of Dense Discrete Systems High Order Effects [J]. Progress of Theoretical Physics，1988，79(5)：1028-1042.

[3]　CHUNG S K. Finite Difference Approximate Solutions for [J]. Applicable Analysis，1998，69(1-2)：149-156.

[4]　CHUNG S K，HA S N. Finite Element Galerkin Solutions for the Rosenau Equation [J]. Applicable Analysis，1994，54(1-2)：39-56.

[5]　PARK M A. On Nonlinear Dispersive Equations [J]. Differential Integral Equations，1996，9：1331-1335.

[6]　PARK M A. On some Nonlinear Dispersive Equations [J]. Contemporary Math，1999，221：211-216.

[7]　PARK M A. On the Rosenau Equation [J]. Computational and Applied Mathematics，1990，9：145-152.

[8]　PARK M A. On the Rosenau Equation in Multidimensional Space [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，1993，21(1)：77-85.

[9]　BARRETO R K，DE CALDAS C S Q，GAMBOA P，et al. Existence of Solutions to the Rosenau and Benjamin-Bona-Mahony Equation in Domains with Moving Boundary [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2004，35(35)：281-286.

[10]　WANG S B，XU G X. The Cauchy Problem for the Rosenau Equation [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2009，71(1-2)：456-466.

[11] WANG S B, XUE H X. Global Solution for a Generalized Boussinesq Equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 204(1): 130-136.

[12] WANG Y Z, WANG Y X. Existence and Nonexistence of Global Solutions for a Class of Nonlinear Wave Equations of Higher Order [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(12): 4500-4507.

[13] TASKESEN H, POLAT N, ERTAŜ A. On Global Solutions for the Cauchy Problem of a Boussinesq-Type Equation [J]. Abstract and Applied Analysis, 2012, 2012: 1-10.

[14] KUTEV N, KOLKOVSKA N, DIMOVA M. Global Existence of Cauchy Problem for Boussinesq Paradigm Equation [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2013, 65(3): 500-511.

[15] XU R Z, YANG Y B, LIU B W, etal. Global Existenceand Blow up of Solutions for the Multidimensional Sixth-Order "Good" Boussinesq Equation [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik, 2015, 66(3): 955-976.

[16] WANG Y. Cauchy Problem for the Sixth-Order Damped Multidimensional Boussinesq Equation [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2018, 4: 1161-1178.

Existence of the Global Solution of a Cauchy Problem for the Rosenau Equation

WANG Ke[1], HUA Yang[2]

1. College of Big Data and Artificial Intelligence, Chengdu Technological University, Chengdu 611730, China;
2. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China

Abstract: This paper considers the global existence for the Cauchy problem of the Rosenau equation

$$u_{tt}+u_{xxxxtt}-\gamma u_{xx}+u_{xxxx}=f(u)_{xx}$$

For $E(0)>0$ and $f(u)=\beta|u|^p u$ with $\beta\neq 0$, the global existence of the weak solution for the problem is proved with the aid of the potential well method.

Key words: Rosenau equation; Cauchy problem; global solution; invariant set

责任编辑 张 枸