第 43 卷第 3 期　西南大学学报(自然科学版)　2021 年 3 月
Vol. 43　No. 3　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Mar.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.03.014

双参数弱(下)鞅的一类极大值不等式

文慧敏，　冯德成，　杨亚男

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：在弱(下)鞅概率不等式的基础上，给出了双参数弱(下)鞅的一类极小值不等式.

关　键　词：弱(下)鞅；双参数弱(下)鞅；极小值不等式

中图分类号：**O211.4**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2021)03-0095-06

设 $n, m \in \mathbb{N}^2$，$n = (n_1, n_2)$，$m = (m_1, m_2)$. 如果 $n_i \leqslant m_i$，$i = 1, 2$，则称 $n \leqslant m$，如果 $n_i \leqslant m_i$，$i = 1, 2$ 中至少有一个严格小于成立，则称 $n < m$.

在本文中，用 $\{X_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 或 $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 表示定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上的双参数随机变量序列. 记 $X^+ = \max\{0, X\}$，$I(A)$ 表示集合 A 的示性函数.

定义 1[1]　设 $\{X_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 是一列 L^d 双参数随机变量，如果对所有的 $i, j \in \mathbb{N}^2$，$i \leqslant j$，都有

$$E[(X_j - X_i) f(X_k, k \leqslant i)] \geqslant 0$$

其中 f 是任意分量不减函数并且使上述期望有意义，则称 $\{X_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双参数弱鞅，如果进一步假设 f 是非负的，那么称 $\{X_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 是双参数弱下鞅.

近年来，一些学者将单参数弱鞅序列的若干结果推广到了多指标弱(下)鞅的情形，并且给出了多参数弱(下)鞅的一些概率不等式[1-2]. 很多学者对双参数鞅的概率不等式及相关应用做了广泛研究，并取得了丰硕的成果[3-7].

本文受文献[1]的启发. 一方面，将文献[3]中单参数弱下鞅的一类极大值不等式推广到双参数弱下鞅的情形，得到了双参数弱下鞅的极大值不等式，另一方面用非负凸函数作用于弱鞅，得到了双参数弱鞅的极大值不等式.

引理 1　设 $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双参数弱(下)鞅，且 g 是一个不减的凸函数，$g(Y_n) \in L^1$，$n \geqslant 1$，则 $\{g(Y_n), n \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双参数弱下鞅.

证　由于 $g(x)$ 是不减凸函数，令

$$h(y) = \lim_{x \to y^-} (g(x) - g(y))/(x - y)$$

则

$$g(x) \geqslant g(y) + (x - y) h(x)$$

且 $h(x)$ 是非负不减函数. 假定 $f(x)$ 是任意分量不减的非负函数，则

$$E[(g(Y_j) - g(Y_i)) f(g(Y_k, k \leqslant i))] \geqslant E[(Y_j - Y_i) h(Y_i) f(g(Y_k, k \leqslant i))] = E[(Y_j - Y_i) f^*(Y_k, k \leqslant i)]$$

这里 $f^*(Y_k, k \leqslant i) = h(Y_i) f(g(Y_k, k \leqslant i))$，且 f^* 是一个任意分量不减的非负函数. 由于 $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^2\}$

收稿日期：2019-01-06

基金项目：国家自然科学基金项目(11861057，11761064).

作者简介：文慧敏，硕士，主要从事极限理论的研究.

是一个双参数弱(下)鞅，则

$$E[(g(Y_j)-g(Y_i))f(g(Y_k,k\leqslant i))]\geqslant 0$$

所以$\{g(Y_n),n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱下鞅.

定理 1 设$\{Y_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱下鞅，且当$k_1k_2=0$时$Y_k=0$，这里$k=(k_1,k_2)$. 假定$\{c_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是正的不减数列，则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}&\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}\leqslant\\&\min\{\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[Y^+_{n_1,j}\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}],\ \sum_{i=1}^{n_1}c_{i,n_2}E[Y^+_{i,n_2}\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}]\}\end{aligned}$$

证 设$A=\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}$，$A_{1j}=\{c_{1j}Y_{1j}\geqslant\varepsilon\}$，$A_{ij}=\{c_{rj}Y_{rj}<\varepsilon,1\leqslant r<i;c_{ij}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}$，$2\leqslant i\leqslant n_1$，$1\leqslant j\leqslant n_2$，则$A=\bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}A_{ij}$.

$$\begin{aligned}\varepsilon P(A)=\varepsilon P(\bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}A_{ij})\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}E(\varepsilon\boldsymbol{I}_{A_{ij}})\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}E(c_{ij}Y_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})=\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})=\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{1j}Y^+_{1j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}})+\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{2j}Y^+_{2j}\boldsymbol{I}_{A_{2j}})+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})=\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{1j}Y^+_{1j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}})+\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{2j}Y^+_{2j}(\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}})]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})=\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{2j}Y^+_{2j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})+\sum_{j=1}^{n_2}E[(c_{1j}Y^+_{1j}-c_{2j}Y^+_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{2j}Y^+_{2j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})-\sum_{j=1}^{n_2}c_{2j}E[(Y^+_{2j}-Y^+_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})\end{aligned}$$

这里$A_{1j}\cap A_{2j}=\varnothing$，$\boldsymbol{I}_{A_{2j}}=\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}}$.

令$g(x)=x^+$，$h(y)=\lim_{x\to y^-}(x^+-y^+)/(x-y)$，则$g(y)-g(x)\geqslant h(x)(y-x)$，$g$和$h$是非负不减函数，同时由双参数弱下鞅的性质可得

$$E[(Y^+_{2j}-Y^+_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]\geqslant E[(Y_{2j}-Y_{1j})h(Y_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]\geqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}\varepsilon P(A)\leqslant&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{2j}Y^+_{2j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})=\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{2j}Y^+_{2j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})+\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{3j}Y^+_{3j}\boldsymbol{I}_{A_{3j}})+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{2j}Y^+_{2j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})+\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{3j}Y^+_{3j}(\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{3j}Y^+_{3j}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}})-\sum_{j=1}^{n_2}c_{3j}E[(Y^+_{3j}-Y^+_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E(c_{ij}Y^+_{ij}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})\end{aligned}$$

这里$A_{1j}\cap A_{2j}\cap A_{3j}=\varnothing$，$\boldsymbol{I}_{A_{3j}}=\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}$. 由于$g$是一个凸函数，$\{Y_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱下鞅，所以有

$$E[(Y^+_{3j}-Y^+_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]\geqslant E[(Y_{3j}-Y_{2j})h(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]\geqslant 0$$

这里$h(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}$是一个关于$\{Y_{1j},Y_{2j}\}$分量不减的非负函数. 那么有

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{3j}Y_{3j}^{+}\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}})+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E(c_{ij}Y_{ij}^{+}\boldsymbol{I}_{A_{ij}})$$

重复上述证明过程可得

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{n_1,j}Y_{n_1,j}^{+}\boldsymbol{I}_A)-\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[(Y_{n_1,j}^{+}-Y_{n_1-1,j}^{+})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}]$$

同样地，$h(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}$ 是关于$\{Y_{1j},Y_{2j},\cdots,Y_{n_1-1,j}\}$分量不减的非负函数，再次利用双参数弱下鞅的性质可得

$$E[(Y_{n_1,j}^{+}-Y_{n_1-1,j}^{+})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}]\geqslant$$
$$E[(Y_{n_1,j}-Y_{n_1-1,j})h(Y_{n_1-1,j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}]\geqslant 0$$

所以

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}E(c_{n_1j}Y_{n_1j}^{+}\boldsymbol{I}_A)\tag{1}$$

同理可得

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{i=1}^{n_1}E(c_{i,n_2}Y_{i,n_2}^{+}\boldsymbol{I}_A)\tag{2}$$

综合(1),(2) 式结论得证.

推论 1　设$\{Y_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱下鞅，g 是一个不减凸函数，$g(Y_n)\in L^1$，$n\in\mathbb{N}^2$，且当 $k_1k_2=0$ 时 $Y_k=0$，这里 $k=(k_1,k_2)$. 假定$\{c_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是正的不减数列，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$
$$\min\{\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[g^{+}(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}],\sum_{i=1}^{n_1}c_{i,n_2}E[g^{+}(Y_{i,n_2})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}]\}$$

证　由引理 1 可知$\{g(Y_n),n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱下鞅，再直接利用定理 1 可知结论成立.

若在定理 1 中取 $c_{ij}\equiv 1$，则有下面的推论.

推论 2　设$\{Y_n,n\geqslant 1\}$是一个双参数弱(下)鞅，且当 $k_1k_2=0$ 时 $Y_k=0$，这里 $k=(k_1,k_2)$. 则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$
$$\min\{\sum_{j=1}^{n_2}E[Y_{n_1,j}^{+}\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}],\sum_{i=1}^{n_1}E[Y_{i,n_2}^{+}\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}Y_{ij}\geqslant\varepsilon\}]\}$$

定理 2　设$\{Y_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱鞅，g 是一个非负凸函数，$g(Y_n)\in L^1$，$n\in\mathbb{N}^2$，且当 $k_1k_2=0$ 时 $g(Y_k)=0$. 假定$\{c_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是正的不减数列，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$
$$\min\{\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[g(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}],\sum_{i=1}^{n_1}c_{i,n_2}E[g(Y_{i,n_2})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}]\}$$

证　令 $u(x)=g(x)\boldsymbol{I}(x\geqslant 0)$，$v(x)=g(x)\boldsymbol{I}(x<0)$，则 $u(x)$ 是一个非负不减凸函数，$v(x)$ 是一个非负不增凸函数，且 $g(x)=u(x)+v(x)=\max(u(x),v(x))$，则

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}=$$
$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}\max(u(Y_{ij}),v(Y_{ij}))\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$
$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}u(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}+\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}v(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}$$

由推论 1 可知

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}u(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[u^{+}(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}u(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}]=$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} c_{n_1,j} E[u(Y_{n_1,j}) \boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij}u(Y_{ij}) \geqslant \varepsilon\}] \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} c_{n_1,j} E[u(Y_{n_1,j}) \boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij}g(Y_{ij}) \geqslant \varepsilon\}] \tag{3}$$

设 $A=\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} c_{ij}v(Y_{ij}) \geqslant \varepsilon\}$，$A_{1j}=\{c_{1j}v(Y_{1j}) \geqslant \varepsilon\}$，$A_{ij}=\{c_{rj}v(Y_{rj}) < \varepsilon,\ 1 \leqslant r < i;\ c_{ij}v(Y_{ij}) \geqslant \varepsilon\}$，$2 \leqslant i \leqslant n_1$，$1 \leqslant j \leqslant n_2$，则 $A=\bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} A_{ij}$，且当 $i \neq j$ 时，$A_{1j} \cap A_{2j}=\varnothing$. 因此有

$$\varepsilon P(A)=\varepsilon P(\bigcup_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)} A_{ij}) \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1} E(\varepsilon \boldsymbol{I}_{A_{ij}}) \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]=$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j}v(Y_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]+\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]=$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{1j}v(Y_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]+\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})(\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}})]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]=$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2} E[(c_{1j}v(Y_{1j})-c_{2j}v(Y_{2j}))\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}] \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]-\sum_{j=1}^{n_2} c_{2j}E[(v(Y_{2j})-v(Y_{1j}))\boldsymbol{I}_{A_{1j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]$$

这里 $\boldsymbol{I}_{A_{2j}}=\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}}$.

由于 $v(x)$ 是凸函数，令

$$h(y)=\lim_{x\to y^-}(v(x)-v(y))/(x-y)$$

则 $v(x)-v(y) \geqslant (x-y)h(x)$，故

$$v(Y_{2j})-v(Y_{1j}) \geqslant (Y_{2j}-Y_{1j})h(Y_{1j})$$

再由双参数弱鞅的性质可得

$$E[(v(Y_{2j})-v(Y_{1j}))\boldsymbol{I}_{A_{1j}}] \geqslant E[(Y_{2j}-Y_{1j})h(Y_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}] \geqslant 0$$

此处 h 是非正不减函数，$\boldsymbol{I}_{A_{1j}}$ 是分量不增的非负函数，所以 $h(Y_{1j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}}$ 是关于 Y_{1j} 的分量不减函数. 因此有

$$\varepsilon P(A) \leqslant \sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=3}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]=$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{3j}v(Y_{3j})\boldsymbol{I}_{A_{3j}}]+$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}] \leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{2j}v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{3j}v(Y_{3j})(\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}})]+$$
$$\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]=$$
$$\sum_{j=1}^{n_2} E[c_{3j}v(Y_{3j})(\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}})]-\sum_{j=1}^{n_2} c_{3j}E[(v(Y_{3j})-v(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1} E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]$$

这里 $A_{1j} \cap A_{2j} \cap A_{3j}=\varnothing$，$\boldsymbol{I}_{A_{3j}}=\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}}-\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}$，且 g 是一个凸函数，$\{Y_n, n \in \mathbb{N}^2\}$ 是一个双参

数弱鞅，因此有

$$E[(v(Y_{3j})-v(Y_{2j}))\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]\geqslant E[(Y_{3j}-Y_{2j})h(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}]\geqslant 0$$

这里 $h(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}}$ 是一个关于$\{Y_{1j},Y_{2j}\}$分量不减的函数．那么有

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{3j}v(Y_{3j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup A_{3j}}]+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=4}^{n_1}E[c_{ij}v(Y_{ij})\boldsymbol{I}_{A_{ij}}]$$

重复上述证明过程可得

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1,j}v(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}_A]-\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[(v(Y_{n_1,j})-v(Y_{n_1-1,j}))\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}]$$

同样地，$h(Y_{2j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}$ 是关于$\{Y_{1j},Y_{2j},\cdots,Y_{n_1-1,j}\}$分量不减的函数，再次利用双参数弱鞅的性质可得

$$E[(v(Y_{n_1,j})-v(Y_{n_1-1,j}))\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}]\geqslant$$
$$E[(Y_{n_1,j}-Y_{n_1-1,j})h(Y_{n_1-1,j})\boldsymbol{I}_{A_{1j}\cup A_{2j}\cup\cdots\cup A_{n_1-1,j}}]\geqslant 0$$

因此可得

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}E[c_{n_1,j}v(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}_A]$$

从而有

$$\varepsilon P(A)\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[v(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}]\tag{4}$$

所以由(3),(4)式可得

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}\leqslant\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[g(Y_{n_1,j})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}]$$

同理

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}\leqslant\sum_{i=1}^{n_1}c_{i,n_2}E[g(Y_{i,n_2})\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}g(Y_{ij})\geqslant\varepsilon\}]$$

因此结论得证．

若在定理 2 中取 $g(x)=x^+$，则有下面的推论．

推论 3　设$\{Y_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱鞅，$\{c_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是正的不减数列，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}^+\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$

$$\min\{\sum_{j=1}^{n_2}c_{n_1,j}E[Y_{n_1,j}^+\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}^+\geqslant\varepsilon\}],\ \sum_{i=1}^{n_1}c_{i,n_2}E[Y_{i,n_2}^+\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}c_{ij}Y_{ij}^+\geqslant\varepsilon\}]\}$$

若在定理 2 中取 $g(x)=|x|$，再令 $c_{ij}\equiv 1$ 则有下面的推论．

推论 4　设$\{Y_n,n\in\mathbb{N}^2\}$是一个双参数弱鞅，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon P\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}|Y_{ij}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant$$

$$\min\{\sum_{j=1}^{n_2}E[|Y_{n_1,j}|\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}|Y_{ij}|\geqslant\varepsilon\}],\ \sum_{i=1}^{n_1}E[|Y_{i,n_2}|\boldsymbol{I}\{\max_{(i,j)\leqslant(n_1,n_2)}|Y_{ij}|\geqslant\varepsilon\}]\}$$

参考文献：

[1]　CHRISTOFIDES T，HADJIKYRIAKOU M. Maximal Inequalities for Multidimensionally Indexed Demimartingales and the Hájek-rényi Inequality for Associated Random Variables [J]. Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications，2011，7(2)：1-9.

[2]　WANG J F. Maximal Inequalities for Associated Random Variables and Demimartingales [J]. Statistics & Probability Letters，2004，66(3)：347-354.

[3] AMIRDJANOVA A, LINN M. Stochastic Evolution Equations for Nonlinear Filtering of Random Fields in the Presence of Fractional Brownian Sheet Observation Noise [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2008, 55(8): 1766-1784.

[4] CAIROLI R, WALSH J. Stochastic Integrals in the Plane [J]. Acta Mathematica, 1975, 134: 111-183.

[5] NEWMAN C M, WRIGHT A. Associated Random Variables and Martingale Inequalities [J]. Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete, 1982, 59(3): 361-371.

[6] DAI P P, SHEN Y, HU S H. Some Results for Demimartingales and N-demimartingales [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1): 1-12.

[7] CHRISTOFIDES T C, HADJIKYRIAKOU M. Conditional Demimartingales and Related Results [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 398(1): 380-391.

[8] WANG X H, HU S H. On the Maximal Inequalities for Conditional Demimartingales [J]. Journal of Mathematical Inequalities, 2014, 8(3): 545-558.

[9] WANG X J, HU S H. Maximal Inequalities for Demimartingales and Their Applications [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(10): 2207-2217.

[10] CHRISTOFIDES T C. Maximal Inequalities for Demimartingales and a Strong Law of Large Numbers [J]. Statistics & Probability Letters, 2000, 50(4): 357-363.

A Class of Maximax (Minimax) Inequalities for Two-Parameter Demi(sub)martingales

WEN Hui-min, FENG De-cheng, YANG Ya-nan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, a class of maximax inequalities for one-parameter demi(sub)martingales are extended to two-parameter demi(sub)martingales, and a class of maximax inequalities for two-parameter demi(sub)martingales are obtained. In addition, let a non-negative convex function act on the demimartingale, and a maximax inequality for two-parameter demi(sub)martingales is obtained.

Key words: demi(sub)martingale; two-parameter demi(sub)martingale; minimax inequality

责任编辑 张 枸