第 43 卷第 4 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2021 年 4 月
Vol. 43　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.04.009

一类图逆半群的同余格的性质

罗天红，　罗永乐，　王正攀

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 给定有向图，其上的图逆半群的同余格是上半模格，但通常不是下半模格．借助同余三元组的语言，利用具有覆盖关系的同余三元组所表现出的性质，通过分类讨论，证明了顶点指数最多为 1 的连通图上的图逆半群的同余格是下半模格．

关　键　词： 图逆半群；同余；同余格；上半模格；下半模格

中图分类号：O152.7　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2021)04－0073－06

一直以来，半群上的同余与同余格是国内外学者密切关注的对象(如文献[1-10]等)．综述文献[6-7]较详尽地给出了 20 世纪关于半群的同余格的研究成果，并指出了若干相关问题．文献[1]首次介绍了顶点间最多有 1 条边的图的图逆半群，并给出了这种图逆半群同余自由的充分条件．文献[11]证明了：顶点指数最多为 1 的连通图最多有 1 个汇点，且若该图不是树，则在圈共轭的意义下只有 1 个非平凡圈．文献[9]建立了从图逆半群上的所有同余构成的集合到图的同余三元组构成的集合的一一对应．文献[3]证明了：图逆半群的同余格是上半模格，但不是下半模格．文献[4]应用有向图的性质，证明了图逆半群上的 0-受限同余所组成的集合关于包含关系形成一个分配格．在这些基础之上，本文利用文献[3]中的方法证明了：顶点指数最多为 1 的连通图上的图逆半群的同余格不仅是上半模格，还是下半模格．

有向图 $\Gamma=(V, E, r, s)$ 由 V,E 以及 E 到 V 的映射 r,s 构成．V 中的元素为顶点，E 中的元素为边．对于边 e，$s(e)$ 为 e 的起点，$r(e)$ 为 e 的终点．用 $|X|$ 表示集合 X 的基数，对任意顶点 v，$|s^{-1}(v)|$ 称为 v 的指数．以下 $\Gamma=(V, E, r, s)$ 总表示某个有向图，简记为 Γ．

由 V 和 E 以及集合 $E^{*}=\{e^{*}: e\in E\}$ 生成的满足以下各条的含零半群称为 Γ 上的图逆半群，记为 $\mathrm{Inv}(\Gamma)$：对任意 $u, v\in V$，$e, f\in E$，

(G1) $uv=\delta_{u,v}u$；

(G2) $s(e)e=er(e)=e$；

(G3) $r(e)e^{*}=e^{*}s(e)=e^{*}$；

(G4) $f^{*}e=\delta_{f,e}r(e)$．

在 Γ 中，路是由边形成的序列 $\alpha=e_1e_2\cdots e_n$，其中 $r(e_i)=s(e_{i+1})$，$i=1,2,\cdots,n-1$．此时 $s(\alpha)=s(e_1)$

收稿日期：2020－07－20
基金项目：国家自然科学基金项目(12071375)．
作者简介：罗天红，硕士研究生，主要从事代数组合学的研究．
通信作者：王正攀，教授．

称为路 α 的起点，$r(\alpha)=s(e_n)$ 称为路 α 的终点. 记 $\{s(e_i): i=1,2,\cdots,n\}$ 为 $u(\alpha)$，约定顶点 v 为一条路径，且 $u(v)=\varnothing$. 若 $s(\alpha)=r(\alpha)$，且当 $i\neq j$ 时有 $s(e_i)\neq s(e_j)$，则称 α 为圈. 我们用 $\mathrm{Path}(\Gamma)$ 表示 Γ 中所有路构成的集合. 对于 $V_1\subseteq V$，用 $C(V_1)$ 表示所有满足 $u(c)\subseteq V_1$ 的圈构成的集合.

设 H 为 V 的子集，若对任意 $e\in E$，当 $s(e)\in H$ 时总有 $r(e)\in H$，则称 H 为 V 的遗传子集. 令 H 为遗传子集. 对任意 $v\in V$，称 $|\{e\in E: s(e)=v, r(e)\notin H\}|$ 为 v 相对于 H 的指数. 设 W 是 V 的子集，且 W 中的元素相对于 H 的指数为 1，显然 $H\cap W=\varnothing$. 设 f 是 $C(V)$ 到 $\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$ 的映射，若对任意 $c\in C(H)$，有 $f(c)=1$，对任意 $c\notin C(H)\cup C(W)$，有 $f(c)=\infty$，则称 f 为圈映射. 在文献[3]中，V 的遗传子集 H、相对于 H 的指数为 1 的顶点集的子集 W，以及圈映射 f 构成 Γ 的一个同余三元组，记为 (H, W, f). 用 $\mathscr{CT}(\Gamma)$ 表示 Γ 的所有同余三元组构成的集合.

对任意 $m_1, m_2\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$，我们用 (m_1, m_2) 表示它们的最大公约数，$[m_1, m_2]$ 表示它们的最小公倍数，且设 $\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\}$ 中的任意元素 m 都整除 ∞，即 $(m, \infty)=m$，$[m, \infty]=\infty$.

根据文献[3]，作者证明了图逆半群 $\mathrm{Inv}(\Gamma)$ 的同余格同构于 $\mathscr{CT}(\Gamma)$ 关于以下二元关系形成的格：对任意 $(H_1, W_1, f_1), (H_2, W_2, f_2)\in\mathscr{CT}(\Gamma)$，$(H_1, W_1, f_1)\leqslant(H_2, W_2, f_2)$ 当且仅当 $H_1\subseteq H_2$，$W_1\backslash H_2\subseteq W_2$，且对任意 $c\in C(V)$，$f_2(c)\mid f_1(c)$.

在格 L 中，我们用 $a\wedge b$ 和 $a\vee b$ 分别表示 a 和 b 的上确界和下确界. 若 $a>b$，且在 L 中不存在元素 x 使得 $a>x>b$，则称 a 覆盖 b，记为 $a\succ b$ 或 $b\prec a$.

对 L 中任意元素 a, b, c，若有 $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$，则称 L 为分配格；

对 L 中任意元素 $a, b, c, a\leqslant c$，若有 $(a\vee b)\wedge c=a\vee(b\wedge c)$，则称 L 为模格；

对 L 中任意元素 a, b，若 $a\succ a\wedge b$，$b\succ a\wedge b$ 时总有 $a\vee b\succ a$，$a\vee b\succ b$，则称 L 为上半模格；对 L 中任意元素 a, b，若 $a\vee b\succ a$，$a\vee b\succ b$ 时总有 $a\succ a\wedge b$，$b\succ a\wedge b$，则称 L 为下半模格.

本文引用文献[3] 对 $\mathscr{CT}(\Gamma)$ 中任意两个元素的上确界和下确界的刻画. 设

$$T_1=(H_1, W_1, f_1) \qquad T_2=(H_2, W_2, f_2)$$

是 Γ 的任意两个同余三元组. 我们用 V_0 表示 $(W_1\cup W_2)\backslash(H_1\cup H_2)$ 中相对于 $H_1\cup H_2$ 的指数为 0 的顶点形成的集合，X 表示集合 $(W_1\cap W_2)\backslash V_0$，$J$ 表示 $(W_1\cup W_2)\backslash(H_1\cup H_2)$ 中存在以其为起点的满足条件 $u(\alpha)\subseteq W_1\cup W_2$ 且以 V_0 中某顶点为终点的路径 α 的顶点形成的集合.

定理 1 当图 Γ 为顶点指数最多为 1 的连通图时，同余格 $(\mathscr{CT}(\Gamma), \leqslant)$ 是下半模格.

证 当 Γ 为顶点指数最多为 1 的连通图时，由文献[11]的定理 3.1 知：Γ 要么在不计循环置换的意义下只有 1 个圈，要么最多有 1 个汇点(V 中任意顶点都有路径到该点的顶点即为汇点)；若 H 为 V 的非空遗传子集，则 H 包含 Γ 的圈或汇点. 我们用 e_v 表示从顶点 $v(v\in V)$ 出发的边，由 Γ 的定义，e_v 是唯一的. 则

$$V_0=\{v\in W_1\backslash H_2: r(e_v)\in H_2\}\cup\{v\in W_2\backslash H_1: r(e_v)\in H_1\}$$

由于 $W_1\cap W_2$ 中的顶点相对于 $H_1\cup H_2$ 的指数为 1，故

$$X=W_1\cap W_2$$

对 $T_1=(H_1, W_1, f_1)\in\mathscr{CT}(\Gamma)$，$T_2=(H_2, W_2, f_2)\in\mathscr{CT}(\Gamma)$，由文献[3]中引理 2.7 和引理 2.8 可得 $T_l=(H_l, W_l, f_l)$，其中

$$H_l=H_1\cap H_2 \qquad W_l=(W_1\cap H_2)\cup(W_2\cap H_1)\cup X$$

对任意 $c\in C(V)$，$f_l(c)=[f_1(c), f_2(c)]$. $T_u=(H_u, W_u, f_u)$，其中

$$H_u=H_1\cup H_2\cup J \qquad W_u=(W_1\cup W_2)\backslash H_u$$

对任意 $c\in C(V)$，$f_u=(f_1(c), f_2(c))$. 要证明定理 1，即证明若有 $T_u\succ T_1$，$T_u\succ T_2$，则有 $T_1\succ T_l$，$T_2\succ T_l$.

当 $H_1=H_2$时，据文献[3] 的推论 2.9 可知，结论成立.

当 $H_1\neq H_2$时，我们分 $H_1\subset H_2$，$H_2\subset H_1$ 和 $H_1\nsubseteq H_2$ 且 $H_2\nsubseteq H_1$ 这 3 种情形讨论.

情形 1　$H_1\subset H_2$.

此时

$$H_u=H_2\cup J \qquad W_u=(W_1\cup W_2)\backslash(H_2\cup J)$$

H_1可为空集，但 H_2不能为空集，则 H_2包含 Γ 的汇点或圈，从而 W_2 中无圈. 由圈映射的定义，对任意 $c\in C(V)$，$f_2(c)$ 取值为 1，故

$$f_u(c)=(f_1(c),\ f_2(c))=f_2(c) \qquad f_l(c)=[f_1(c),\ f_2(c)]=f_1(c)$$

情形 1.1　当 $J=\varnothing$ 时，即 $H_u=H_2$.

由 $T_u\succ T_1$，$T_u\succ T_2$以及文献[3] 的引理 2.1 和引理 2.3 知，$W_1\backslash H_2=W_u$，$W_2\subseteq W_u$且 $|W_u\backslash W_2|=1$. 故有 $W_2\subset W_u\subseteq W_1$，从而

$$T_l=(H_1,\ (W_1\cap H_2)\cup W_2,\ f_1)$$

因为

$$|W_1\backslash W_l|=|W_1\backslash[(W_1\cap H_2)\cup W_2]|=|W_u\backslash W_2|=1$$

所以由文献[3] 的引理 2.3，结论成立. 下证 $T_2\succ T_l$.

对任意 $T'=(H',W',f')\in\mathscr{CT}(\Gamma)$，若有

$$(H_2,W_2,f_2)\succ(H',W',f')\geqslant(H_1,(W_1\cap H_2)\cup W_2,f_1) \tag{1}$$

则

$$H_1\subseteq H'\subseteq H_2$$

若 $H_2=H'$，则 $W'\subseteq W_2$，且由(1) 式可得

$$[(W_1\cap H_2)\cup W_2]\backslash H_2=W_2\subseteq W'$$

所以 $W'=W_2$，进而 $f'=f_2$，与假设矛盾，所以 $H_2\neq H'$.

由(1) 式可知

$$[(W_1\cap H_2)\cup W_2]\backslash H'\subseteq W'$$

所以$(W_1\cap H_2)\backslash H'$ 中的顶点相对于 H' 的指数为 1. 又由 $W_u=W_1\backslash H_2$知，$W_1\backslash H_2$ 中顶点相对于 H_2 的指数为 1，从而相对于 H' 的指数也为 1 (V 中任意顶点的指数最多为 1)，故$(H',W_1\backslash H',f_2)\in\mathscr{CT}(\Gamma)$. 所以有

$$T_u=(H_2,W_1\backslash H_2,f_2)\succ(H',W_1\backslash H',f_2)\geqslant(H_1,W_1,f_1)$$

由 $T_u\succ T_1$知 $H'=H_1$.

但若 $H_1=H'$，由 $T_u\succ T_1$ 和文献[3] 的引理 2.1 知，当 $c\in C[(W_1\cap H_2)\cup W_2]$ 时，有

$$f_u(c)=f_1(c)=f_2(c)$$

且在 $H_2\backslash[H_1\cup(W_1\cap H_2)\cup W_2]=H_2\backslash(H_1\cup W_1)$ 中没有顶点相对于 H_1 的指数为 1. 又由于

$$H_1\subset H_2 \qquad [(W_1\cap H_2)\cup W_2]\backslash H_2=W_2$$

故由文献[3] 的引理 2.5 得

$$W'=(W_1\cap H_2)\cup W_2 \qquad f'=f_1$$

即 $T'=T_l$. 从而有 $T_2\succ T_l$.

情形 1.2　当 $J\neq\varnothing$ 时，即 $H_u=H_2\cup J$.

此时 $H_1\subset H_u$，$H_2\subset H_u$. 由 $T_u\succ T_1$ 和文献[3] 的引理 2.1 知

$$W_1\backslash H_u=(W_1\cup W_2)\backslash H_u$$

所以 $W_2\backslash W_1\subseteq J$. 但在$(H_2\cup J)\backslash(H_1\cup W_1)$ 中顶点相对于 H_1 的指数为 0，所以 $W_2\backslash W_1$ 中顶点相对于

H_1 的指数为 0，从而相对于 H_2 的指数为 0，由同余三元组的定义 $W_2 \backslash W_1 = \varnothing$，即有 $W_2 \subseteq W_1$. 类似地，由 $T_u \succ T_2$ 和文献[3] 的引理 2.1 知

$$W_1 \backslash (W_2 \cup H_2) \subseteq J \qquad W_u \subseteq W_2$$

所以有

$$W_u \subseteq W_2 \subseteq W_1$$

因为$(H_2 \cup J) \backslash (H_2 \cup W_2)$ 中顶点相对于 H_2 的指数为 0，所以

$$V_0 = W_1 \backslash (H_2 \cup W_2)$$

因此 $W_2 \neq W_1$，否则 $V_0 = \varnothing$，$J = \varnothing$，与假设矛盾. 所以

$$W_u \subseteq W_2 \subset W_1$$

下证 $|V_0| = 1$. 若 $|V_0| > 1$，对任意 $v_1 \in V_0$，令

$$J_1 = \{v_1\} \cup \{v \in J: 存在\ \alpha \in \mathrm{Path}(\Gamma)，使得\ s(\alpha) = v，u(\alpha) \subseteq W_1，r(\alpha) = v_1\}$$

由 J_1 的定义不难看出 $H_2 \cup J_1$ 是遗传子集. 若 $W_2 \backslash J_1$ 中存在顶点 v 相对于 $H_2 \cup J_1$ 的指数为 0，因为 Γ 是连通图，所以存在一条边以 v 为起点，终点在 J_1 中，因此有 $v \in J_1$，矛盾. 故 $W_2 \backslash J_1$ 中的顶点相对于 $H_2 \cup J_1$ 的指数为 1，因此$(H_2 \cup J_1, W_2 \backslash J_1, f_2) \in \mathscr{CT}(\Gamma)$. 所以有

$$(H_2 \cup J, W_1 \backslash (H_2 \cup J), f_2) > (H_2 \cup J_1, W_2 \backslash J_1, f_2) > (H_2, W_2, f_2)$$

与 $T_u \succ T_2$矛盾，所以

$$|V_0| = |W_1 \backslash (H_2 \cup W_2)| = 1$$

由于

$$|W_1 \backslash W_l| = |W_1 \backslash [(W_1 \cap H_2) \cup W_2]| = |W_1 \backslash (H_2 \cup W_2)| = 1$$

据文献[3] 的引理 2.3，有

$$(H_1, W_1, f_1) \succ (H_1, (W_1 \cap H_2) \cup W_2, f_1)$$

即有 $T_1 \succ T_l$. 下证 $T_2 \succ T_l$.

对任意 $T' = (H', W', f') \in \mathscr{CT}(\Gamma)$，若有

$$(H_2, W_2, f_2) > (H', W', f') \geqslant (H_1, (W_1 \cap H_2) \cup W_2, f_1) \tag{2}$$

则有

$$H_1 \subseteq H' \subseteq H_2$$

若 $H' = H_2$，则由(2) 式可得

$$[(W_1 \cap H_2) \cup W_2] \backslash H_2 = W_2 \subseteq W' \qquad W' \subseteq W_2$$

所以 $W' = W_2$，进而 $f' = f_2$，与假设矛盾. 所以 $H_2 \neq H'$. 故

$$H_1 \subseteq H' \subset H_2$$

若以 V_0 中的唯一的顶点为起点的边的终点在 H' 中，则 $H' \cup J$ 是遗传子集. 由(2) 式可得

$$[(W_1 \cap H_2) \cup W_2] \backslash H' \subseteq W'$$

因此 $W_1 \backslash H'$ 中的顶点相对于H' 的指数为 1. 又因$(W_1 \cap H_2) \backslash H' \subseteq H_2$，且 H_2 为遗传子集，所以$(W_1 \cap H_2) \backslash H'$ 中的顶点相对于 $H' \cup J$ 的指数为 1. 因为

$$H' \cup J \subseteq H_2 \cup J = H_u$$

故 W_u 中的顶点相对于 $H' \cup J$ 的指数也为 1. 从而得到

$$(H' \cup J, W_u \cup [(W_1 \cap H_2) \backslash H'], f_2) \in \mathscr{CT}(\Gamma)$$

且有

$$(H_2 \cup J, W_u, f_2) > (H' \cup J, W_u \cup [(W_1 \cap H_2) \backslash H'], f_2) > (H_1, W_1, f_1)$$

这与 $T_u \succ T_1$矛盾，所以以 V_0 中的唯一的顶点为起点的边的终点在 $H_2 \backslash H'$ 中. 于是$(H', W_1 \backslash H', f_1) \in$

$\mathscr{CT}(\Gamma)$，且有

$$(H_2 \cup J, W_u, f_2) > (H', W_1 \backslash H', f_1) \geqslant (H_1, W_1, f_1)$$

再由 $T_u > T_1$ 知 $H' \subseteq H_1$.

由(2)式和文献[3]的引理 2.5 知$[(W_1 \cap H_2) \cup W_2] = W'$，进而 $f' = f_2$. $T_2 > T_l$ 得证.

情形 2　$H_2 \subset H_1$.

与情形 1 的证明类似.

情形 3　$H_1 \not\subseteq H_2$ 且 $H_2 \not\subseteq H_1$.

此时 $H_1 \neq \emptyset$，$H_2 \neq \emptyset$，故若 Γ 中有圈，则圈在 $H_1 \cap H_2$ 中，所以 W_1 和 W_2 中均无圈. 从而可设 $f_u = f_1 = f_2 = f_l = f$. 由 $T_u > T_1$，$T_u > T_2$ 以及文献[3]的引理 2.1 可得

$$V_0 = [W_1 \backslash (H_2 \cup W_2)] \cup [W_2 \backslash (H_1 \cup W_1)]$$

下证 $V_0 = \emptyset$. 否则，不妨设 $W_2 \backslash (H_1 \cup W_1) \neq \emptyset$. 令

$$J_2 = \{v \in J: 存在\ \alpha \in \mathrm{Path}(\Gamma)，使得\ s(\alpha) = v，u(\alpha) \subseteq W_1 \cup W_2，r(\alpha) \in W_2 \backslash (H_1 \cup W_1)\}$$

则 $J_2 \neq \emptyset$. 由 $T_u > T_1$ 和文献[3]的引理 2.1 知，$W_2 \backslash (H_1 \cup W_1)$ 中的顶点相对于 H_1 的指数为 0，所以 $H_1 \cup J_2$ 为遗传子集. 类似于情形 1.2 的证明，$W_1 \backslash J_2$ 中的顶点相对于 $H_1 \cup J_2$ 的指数为 1，所以$(H_1 \cup J_2, W_1 \backslash J_2, f) \in \mathscr{CT}(\Gamma)$. 因此

$$(H_1 \cup H_2 \cup J, W_u, f) > (H_1 \cup J_2, W_1 \backslash J_2, f) > (H_1, W_1, f_1)$$

这与 $T_u > T_1$ 矛盾，故 $V_0 = \emptyset$.

由 $V_0 = \emptyset$ 及 J 的定义可得 $J = \emptyset$，所以

$$W_1 = (W_1 \cap H_2) \cup (W_1 \cap W_2) \qquad W_2 = (W_2 \cap H_1) \cup (W_1 \cap W_2)$$

$$T_u = (H_1 \cup H_2, W_1 \cap W_2, f) \qquad T_l = (H_1 \cap H_2, W_1 \cup W_2, f)$$

下证 $T_1 > T_l$. 对任意 $T' = (H', W', f') \in \mathscr{CT}(\Gamma)$，若有

$$(H_1, W_1, f) > (H', W', f') \geqslant (H_1 \cap H_2, W_1 \cup W_2, f) \tag{3}$$

则有 $H_1 \cap H_2 \subseteq H' \subseteq H_1$. 若 $H' = H_1$，由(3)式可得

$$(W_1 \cup W_2) \backslash H' = W_1 \subseteq W' \qquad W' \subseteq W_1$$

所以 $W' = W_1$. 进而 $f' = f$，与假设矛盾，所以 $H' \neq H_1$. 故 $H_1 \cap H_2 \subseteq H' \subset H_1$，进而有

$$H_2 \subseteq H' \cup H_2 \subset H_1 \cup H_2$$

由(3)式可知$(W_1 \cup W_2) \backslash H' \subseteq W'$，所以 $W_2 \backslash H' \subseteq W'$，这说明在 $W_2 \backslash H'$ 中的顶点相对于 H' 的指数为 1. 又因为 $H' \cup H_2$ 是遗传子集. 所以$(H' \cup H_2, W_2 \backslash H', f) \in \mathscr{CT}(\Gamma)$. 由

$$T_u > (H' \cup H_2, W_2 \backslash H', f) \geqslant (H_2, W_2, f_2)$$

得 $H_2 = H' \cup H_2$，即 $H' \subseteq H_2$. 又由 $H' \subseteq H_1$，所以 $H' \subseteq H_1 \cap H_2$. 故 $H' = H_1 \cap H_2$. 与情形 1.1 的证明类似，由文献[3]的引理 2.5 得

$$W' = W_1 \cup W_2 \qquad f' = f$$

即 $T' = T_l$，$T_1 > T_l$ 得证. 同理可证 $T_2 > T_l$.

参考文献：

[1]　ASH C J, HALL T E. Inverse Semigroups on Graphs [J]. Semigroup Forum, 1975, 11(1): 140-145.

[2]　冯　建. 关于完全正则半群同余对的一个公开问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2009, 31(12): 96-98.

[3]　LUO Y L, WANG Z P. On Lattice of Congruences on Graph Inverse Semigroups [EB/OL]. [2006-06-28]. https://arxiv: 2006. 15745vl [math. G R] 28 Jun 2020.

[4]　罗永乐, 王正攀. 图逆半群上的 0-受限同余格 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2020, 56(2): 34-37.

[5] 马思遥，宫春梅. 关于 Ehresmann 群上最大同余的一个注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(6)：8-11.
[6] MITSCH H. Semigroups and Their Lattice of Congruences [J]. Semigroup Forum，1983，26(1)：1-63.
[7] MITSCH H. Semigroups and Their Lattice of Congruences II [J]. Semigroup Forum，1997，54(1)：1-42.
[8] 张前滔，赵 平，罗永贵. 半群 $TOP_n(k)$ 的格林(星)关系及富足性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：9-15.
[9] WANG Z P. Congruences on Graph Inverse Semigroups [J]. Journal of Algebra，2019，534：51-64.
[10] 朱聘瑜. 有限幂零半群及其同余格 [J]. 数学年刊(A 辑)，1991，12(5)：546-553.
[11] MEAKIN J，WANG Z P. Graph Inverse Semigroups and Leavitt Path Algebras [EB/OL]. [2006-06-25]. https：//arxiv：1911. 0059002 [math. G R] 18 Nov 2019.

Properties of the Congruence Lattice for a Class of Graph-Inverse Semigroups

LUO Tian-hong， LUO Yong-le， WANG Zheng-pan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：The congruence lattice of the graph-inverse semigroup on a given directed graph is upper semimodular，but not necessarily lower semimodular. In terms of congruence triples，we prove that the congruence lattices of graph-inverse semigroups defined on graphs，each of whose vertices has an index of at most 1，are lower semimodular by using the properties of covering between congruence triples and classification discussion.

Key words：graph-inverse semigroup；congruence；congruence lattice；upper semimodular lattice；lower semimodular lattice

责任编辑 廖 坤