DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.04.010

双圆盘商模 $\mathscr{N}_\psi$ 上 Toeplitz 算子的向量丛模型

许安见[1]，　邹　杨[2]

1. 重庆理工大学 理学院，重庆 400054；2. 重庆第二师范学院 数学与信息工程学院，重庆 400067

摘要： 设 $\mathbb{D}$ 为复平面上的开单位圆盘，$H^2(\mathbb{D}^2)$ 为双圆盘 $\mathbb{D}^2$ 上的 Hardy 模，$\psi(z_2)$ 为 $\mathbb{D}$ 上的有限 Blaschke 乘积．首先定义了 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的 N_ψ-商模，利用 Blaschke 积的性质给出了商模的等价刻画，然后根据等价刻画构造出商模的一组正交正规基，并给出 N_ψ-商模的具体刻画．最后研究了 N_ψ-商模上以有限 Blaschke 乘积 $B(z_1)$ 为符号的解析 Toeplitz 算子 $T_{B(z_1)}$，通过分析 $B(z_1)$ 的全体逆的结构，建立了 $T_{B(z_1)}$ 的 Bergman 向量丛模型，并根据该模型给出了该 Toeplitz 算子的一些性质的几何刻画．

关　键　词： Toeplitz 算子；Bergman 空间；Hardy 空间；商模

中图分类号：O177.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2021)04-0079-06

设 $\mathbb{D}$ 表示复平面中的开单位圆盘，$\mathbb{T}$ 表示单位圆周．$\mathrm{d}A(z)$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的规范化面积测度．$\mathrm{d}m(z)$ 表示 $\mathbb{T}$ 上的规范化弧长测度，Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 是由 $\mathbb{D}$ 上相对于面积测度平方可积的解析函数全体组成，M_z 表示其上的乘法算子，也称为 Bergman 位移．Bergman 空间及其上的算子理论是近 30 年来函数空间与算子理论研究的重要对象，取得了一系列重要的成果[1-8]．

用 $\mathbb{T}^2$ 表示双圆盘，$H^2(\mathbb{T}^2)$ 表示 $\mathbb{T}^2$ 上的 Hardy 空间，$L^2(\mathbb{T}^2)$ 表示 $\mathbb{T}^2$ 上的 Lebesgue 空间，$H^\infty(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 上本性有界的解析函数全体，其中的变量分别用 z_1, z_2 表示．用 P 表示从 $L^2(\mathbb{T}^2)$ 到 $H^2(\mathbb{T}^2)$ 上的投影．对于 $\phi \in L^2(\mathbb{T}^2)$，$H^2(\mathbb{T}^2)$ 上的 Toeplitz 算子 T_ϕ 定义为 $T_\phi f = P(\phi f)(\forall f \in H^2(\mathbb{T}^2))$，称 ϕ 为 Toeplitz 算子 T_ϕ 的符号．当 ϕ 是解析函数的时候，就称 T_ϕ 为解析 Toeplitz 算子，如 T_{z_1}, T_{z_2}．设 $\mathscr{M}$ 为 $H^2(\mathbb{T}^2)$ 中的子空间，若 $\mathscr{M}$ 在 T_{z_1}, T_{z_2} 作用下不变，则称 $\mathscr{M}$ 为子模．子模 $\mathscr{M}$ 的正交补空间 $\mathscr{N} = H^2(\mathbb{T}^2) \ominus \mathscr{M}$ 称为商模，商模显然是 $T_{z_1}^*, T_{z_2}^*$ 不变的．多圆盘 $\mathbb{D}^n$ 上的 Hardy 模，以及它的子模和商模是近 20 年来算子理论研究的重要对象，取得了大量的重要成果[9-13]．

1　$\mathscr{N}_\psi$-商模

对于单变量内函数 $\psi(z_2) \in H^\infty(\mathbb{D})$，用 $[z_1 - \psi(z_2)]$ 表示 $H^2(\mathbb{T}^2)$ 中由 $z_1 - \psi(z_2)$ 生成的子模，$\mathscr{N}_{\psi(z_2)}$ 表示相应的商模 $H^2(\mathbb{T}^2)/[z_1 - \psi(z_2)]$．文献[10] 首先引入了这类商模，并给出了该商模的一些性质与刻画．

命题 1

$$\mathscr{N}_\psi = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k T_{\psi(z_2)}^{*k} g(z_2) : T_{\psi(z_2)}^{*k} g(z_2) \in H^2(\mathbb{T}), \text{且} \sum_{k=0}^{\infty} \| T_{\psi(z_2)}^{*k} g(z_2) \|^2 < \infty \right\}$$

收稿日期：2020-06-29

基金项目：重庆市科学技术委员会项目(cstc2018jcyjA2248，cstc2019jcyjX0295)；重庆市教育委员会项目(KJQN201801110，KJQN202001606)；国家自然科学基金项目(11871127)；重庆第二师范学院校内项目(KY201703A)．

作者简介：许安见，副教授，博士，主要从事算子理论与算子代数的研究．

证 首先，对任意 $f \in \mathcal{N}_\psi$，有

$$f=\sum_{l=0}^{\infty} z_1^l g_l(z_2)$$

其中 $g_l(z_2) \in H^2(\mathbb{T})$. 则对 $l,k \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}0=&\langle f,\ z_1^l z_2^k(z_1-\psi(z_2))\rangle=\\&\langle g_{l+1},\ z_2^k\rangle-\langle g_l,\ \psi(z_2)z_2^k\rangle=\\&\langle g_{l+1}-T_{\psi(z_2)}^* g_l,\ z_2^k\rangle\end{aligned}$$

则对任何 $l \geqslant 0$，有

$$g_{l+1}=T_{\psi(z_2)}^* g_l$$

从而

$$g_k=T_{\psi(z_2)}^{*^k} g_0$$

由此可见

$$f=\sum_{k=0}^{\infty} z_1^k T_{\psi(z_2)}^{*^k} g_0$$

且

$$\sum_{k=0}^{\infty}\| T_{\psi(z_2)}^{*^k} g_0\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\| g_k\|^2=\| f\|^2<\infty$$

令

$$h=\sum_{k=0}^{\infty} z_1^k T_{\psi(z_2)}^{*^k} g_0(z_2)$$

这里的 $T_{\psi(z_2)}^{*^k} g_0(z_2) \in H^2(\mathbb{T})$. 因此

$$\begin{aligned}&\langle h,\ z_1^l z_2^k(z_1-\psi(z_2))\rangle=\\&\langle T_{\psi(z_2)}^{*^{l+1}} g_0,\ z_2^k\rangle-\langle T_{\psi(z_2)}^{*^l} g_0,\ z_2^k\psi(z_2)\rangle=0\end{aligned}$$

即 $h \in \mathcal{N}_\psi$.

当 $\psi(z_2)$ 是 M 阶 Blaschke 乘积时，$H^2(\mathbb{T}_{z_2}) \ominus \psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2})$ 是 M 维空间，我们用 $\lambda_1(z_2),\cdots,\lambda_M(z_2)$ 表示 $H^2(\mathbb{T}_{z_2}) \ominus \psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2})$ 的一组正交正规基. 定义

$$e_j(z_1,\ z_2)=\frac{1}{\sqrt{j+1}}\sum_{i=0}^{j} z_1^i z_2^{j-i}$$

我们用 $\mathcal{A}$ 表示 $H^2(\mathbb{T}^2)$ 中由 $\{e_j(z_1,\ z_2)\}$ 生成的闭子空间. 显然 $\{e_j(z_1,\ z_2)\}$ 就是 $\mathcal{A}$ 的一组正交正规基. $L_a^2(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的 Bergman 空间. 文献[11]证明了 $\mathcal{A}$ 与 $L_a^2(\mathbb{D})$ 可自然地等同. 利用该等同，文献[4,12]得到了一系列 Bergman 空间上的结果，也是 Bergman 空间以及其上算子理论研究的重要方式.

对 $k=1,\cdots,M$；$j=0,1,\cdots$，定义

$$E_{j,k}=\lambda_k(z_2)e_j(z_1,\ \psi(z_2))$$

定理 1 $\{E_{j,k}:k=1,\cdots,M;\ j=0,1,\cdots\}$ 是 $\mathcal{N}_{\psi(z_2)}$ 的一组正交正规基.

证 注意到

$$H^2(\mathbb{T}_{z_2})=\sum_{k=0}^{\infty}\oplus\,\psi^k(z_2)(H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2}))$$

也就是说 $\{\lambda_k(z_2)\psi(z_2)^j:k=1,\cdots,M;\ j=0,1,\cdots\}$ 是 $H^2(\mathbb{T}_{z_2})$ 的一组正交正规基. 若 $(i,k)\neq(r,s)$ 且 $i \leqslant r$，则

$$\begin{aligned}&\langle E_{i,k},\ E_{r,s}\rangle=\\&\frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{r+1}}\sum_{i_1=0}^{i}\sum_{r_1=0}^{r}\langle z_1^{i_1}\lambda_k(z_2)\psi(z_2)^{i-i_1},\ z_1^{r_1}\lambda_s(z_2)\psi(z_2)^{r-r_1}\rangle=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{r+1}}\sum_{i_1=0}^{i}\langle\lambda_k(z_2)\psi(z_2)^{i-i_1},\lambda_s(z_2)\psi(z_2)^{r-i_1}\rangle=0$$

因为 $i_u\neq r_u$ 或 $k_v\neq j_v$ 至少有一个成立，且容易验证 $\|E_{i,k}\|=1$，因此$\{E_{j,k}\}$是一组正交正规基.

下面证明 $\mathcal{N}_\psi$ 中任何函数 f 可由$\{E_{i_2,i_3,k}\}$表示. 因为

$$g(z_2)=\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{j_1=0}^{\infty}a_{k_1,j_1}\lambda_{k_1}(z_2)\psi(z_2)^{j_1}$$

其中$\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{j_1=0}^{\infty}|a_{k_1,j_1}|^2<\infty$，且

$$\begin{aligned}&T_{\psi(z_2)}^{*j_2}g(z_2)=\\&\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{j_1=0}^{\infty}a_{k_1,j_1}T_{\psi(z_2)}^{*j_2}(\lambda_{k_1}(z_2)\psi(z_2)^{j_1})=\\&\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{j_1=j_2}^{\infty}a_{k_1,j_1}\lambda_{k_1}(z_2)\psi(z_2)^{j_1-j_2}\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{l=0}^{\infty}\|T_{\psi(z_2)}^{*l}g(z_2)\|^2=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j_1=l}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{M}|a_{k_1,j_1}|^2=\sum_{j_1=0}^{\infty}(j_1+1)\sum_{k_1=1}^{M}|a_{k_1,j_1}|^2$$

因此

$$T_{\psi(z_2)}^{*j_2}g(z_2)\in\mathcal{N}_\psi\Leftrightarrow\sum_{j_1=0}^{\infty}(j_1+1)\sum_{k_1=1}^{M}|a_{k_1,j_1}|^2<\infty$$

此外，有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}z_1^kT_{\psi(z_2)}^{*k}g(z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{j_1=k}^{\infty}a_{k_1,j_1}\lambda_{k_1}(z_2)\psi(z_2)^{j_1-k}=\\&\sum_{j_1=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1=1}^{M}a_{k_1,j_1}\lambda_{k_1}(z_2)\Big)\big(\psi(z_2)^{j_1}+\psi(z_2)^{j_1-1}z_1+\cdots+z_1^{j_1}\big)=\\&\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{M}\sqrt{j_1+1}\,a_{k_1,j_1}E_{k_1,j_1}\end{aligned}$$

定理 1 得证.

定义 $\mathcal{N}_{\psi(z_2)}$ 到$(H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2}))\otimes L_a^2(\mathbb{D})$ 的算子 U_0 为

$$U_0:\mathcal{N}_{\psi(z_2)}\longrightarrow(H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2}))\otimes L_a^2(\mathbb{D})$$

$$E_{k,j}\longmapsto\lambda_k(z_2)\sqrt{j+1}\,z_1^j$$

命题 2　U_0 是酉算子，且有 $U_0T_{B(z_1)}=(I\otimes M_{B(z_1)})U_0$，其中 I 为 $H^2(\mathbb{T}_w)\ominus\psi(w)H^2(\mathbb{T}_w)$ 上的单位算子.

证　由文献[10]或直接计算知

$$U_0T_{z_1}=(I\otimes M_{z_1})U_0$$

从而有

$$U_0T_{z_1^N}=U_0T_{z_1}T_{z_1^{N-1}}=(I\otimes M_{z_1})U_0T_{z_1^{N-1}}=\cdots=(I\otimes M_{z_1^N})U_0$$

由于 $B(z_1)$ 在单位圆盘上可由多项式逼近，因此结论成立.

注 1　命题 2 说明商模 $\mathcal{N}_\psi$ 上的 Toeplitz 算子 T_{z_1} 酉等价于$(H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2}))\otimes L_a^2(\mathbb{D})$ 上的算子 $I\otimes M_{z_1}$，也表明商模 $\mathcal{N}_{\psi(z_2)}$ 上的 Toeplitz 算子 T_{z_1} 酉等价于 M- 重的 Bergman 位移.

2　丛位移

令 Ω 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开子集，$\mathscr{H}$ 表示一个 Hilbert 空间.

定义 1[13] Ω 上的连续向量丛 E 是一个由一簇 Hilbert 空间组成的拓扑空间，且满足：

(a) 存在连续映射 $q: E \longrightarrow \Omega$；

(b) E 在每个纤维 $E_z = q^{-1}(z)$ 上有 Hilbert 空间结构，且在每个 E_z 上的 Hilbert 拓扑与由 E 诱导的拓扑一致；

(c) 对于每个 $z \in \Omega$，存在 z 的邻域 $U \subset \Omega$ 以及一个同胚 $\Phi_U: q^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathscr{H}$，使得：

(c_1) 对每个 $(w, h) \in U \times \mathscr{H}$，点 $\Phi_U{}^{-1}(w, k) \in E_w$，

(c_2) 对每个 $w \in U$，映射 $(\Phi_U^w)^{-1}: \mathscr{H} \longrightarrow E_w$，$(\Phi_U^w)^{-1}(h) = \Phi_U(w, h)$ 是连续线性变换.

定义 2 (a) 设丛 E 为 Ω 上的连续向量丛，$GL(\mathscr{H})$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的可逆有界线性算子全体，若对任何一对相交非空的开集 $U, V \subset \Omega$，映射

$$\Phi_U \circ \Phi_V^{-1} \mid_{(U \cap V) \times \mathscr{H}}: (U \cap V) \times \mathscr{H} \longrightarrow (U \cap V) \times \mathscr{H}$$

$$\Phi_U \circ \Phi_V^{-1}: (w, h) \longmapsto (w, \Phi_{UV}(w) h)$$

中的 $\Phi_{UV}: U \cap V \longrightarrow GL(\mathscr{H})$ 是全纯的，则称 E 为 Ω 上的全纯向量丛；

(b) 设 E 为 Ω 上的全纯向量丛，若每个 E_z 上有内积，且内积关于 z 是光滑变化的，即对 E 的任何两个局部光滑截面 s, t，函数 $z \longmapsto \langle s(z), t(z) \rangle_z$ 是一个光滑函数，则称 E 为 Hermitian 的.

引理 1[14] Ω 上的任何全纯向量丛在全纯意义下都是平凡的.

对 Ω 上的 Hermitian 全纯向量丛 E，令 $\Gamma_a(E)$ 表示 E 的全体全纯截面组成的集合. E 上的 Bergman 空间 $L_a^2(E)$ 定义为

$$L_a^2(E) = \left\{ f \in \Gamma_a(E): \| f \|_{L_a^2(E)} = \int_\Omega \| f \|_{E_z}^2 \mathrm{d}A(z) < \infty \right\}$$

对于平坦向量丛 E 的 Bergman 空间，可用另一个观点来刻画：

定义 3 设 E 是复向量丛，E 的酉坐标覆盖是一组坐标卡 $\{U, \Phi_U\}$，且对每个开集 U 和 $z \in U$，丛映射 $\Phi_U \mid_{E_z}: E_z \longrightarrow \{z\} \times \mathscr{H}$ 是酉算子. 若函数 $\Phi_{UV}: U \cap V \longrightarrow U(\mathscr{H})$ 是常值的，则称 E 的酉坐标覆盖是平坦的. 具有平坦酉坐标覆盖的向量丛称为平坦酉向量丛 E.

Ω 上的平坦向量丛 E 可诱导 Ω 的基本群在 $\mathscr{H}$ 上的酉表示

$$\alpha: \pi_1(\Omega) \longrightarrow U(\mathscr{H})$$

反之，若有 Ω 的基本群在 $\mathscr{H}$ 上的酉表示 α，用 $\widetilde{\Omega}$ 表示 Ω 的万有覆盖空间，则我们可按如下方式构造一个平坦向量丛：在 $\widetilde{\Omega} \times \mathscr{H}$ 中定义等价关系 $\sim$：$(z_1, h_1) \sim (z_2, h_2)$，若对某 $A \in \pi_1(\Omega)$ 有 $z_2 = A(z_1)$ 且 $h_2 = \alpha(A) h_1$，则该等价关系给出一个平坦酉向量丛 $E_\alpha = \widetilde{\Omega} \times \mathscr{H} / \sim$. 关于平坦向量丛与酉表示，我们有如下结果：

命题 3[13] Ω 上的平坦酉向量丛与 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Omega), U(\mathscr{H})) / U(\mathscr{H})$ 是一一对应的.

3 Toeplitz 算子的丛位移模型

建立抽象算子的几何模型在算子研究中有着悠久的历史，也取得了非常重要的成果[15-17]. 设 $B(z)$ 是一个 N 阶 Blaschke 乘积，注意到集合 $\mathscr{S} = B(\{z: B'(z) = 0\})$ 是有限集，实际上有 $|\mathscr{S}| \leqslant N - 1$. 设 $\mathscr{S} = \{w_1, \cdots, w_k\}$，用 ℓ_i 表示连接 w_i 与 $\mathbb{D}$ 的边界 $\mathbb{T}$ 的直线，且当 $i \neq j$ 时，要求 ℓ_i 与 ℓ_j 不相交. 令 $\mathbb{D}_B = \mathbb{D} \backslash \{\ell_i\}_{i=1}^k$，则 $\mathbb{D}_B$ 是单连通的. 对 $\mathbb{D}$ 中的每个开集 U，可定义 B 在 U 上的逆为 U 上的解析函数 f，满足：$f(U) \subset \mathbb{D}$，且对 $z \in U$ 有 $B(f(z)) = z$. 对每个 $z \in \mathbb{D} \backslash \mathscr{S}$，有 $B^{-1}(z) = \{w_1, \cdots, w_N\}$，且当 $i \neq j$ 时，$w_i \neq w_j$，以及 $B(z)$ 在 w_i 的某足够小的邻域上是一一的. 设 U 为 z 在 $\mathbb{D}_B$ 中的邻域. 对 $i = 1, \cdots, N$，σ_i 表示 U_{w_i} 与 U 之间的双全纯映射且 $B(\sigma_i(z)) = z$. 由单值化定理以及 $\mathbb{D}_B$ 的单连通性，σ_i 可延拓到 $\mathbb{D}_B$ 上，仍用 σ_i 表示. 这里注意的是：σ_i 是 $w = B(z)$ 的逆，不是文献[18]研究交换子时使用的局部逆.

对 $z_0 \in \mathbb{D} \backslash \mathscr{S}$ 以及 $\mathbb{D}_B$ 中包含 z_0 的开子集 U，设 γ_i 是 $\mathbb{D} \backslash \mathscr{S}$ 中过 z_0 且包含 w_i 的闭曲线. 当将 $\{\sigma_i\}$ 沿着

γ_j 移动时，由解析延拓性，我们可得到$\{1,2,\cdots,k\}$的一个排列 τ_j. 由此可定义 $\mathbb{C}^N$ 上的一个酉算子

$$U_j(c_1,\cdots,c_k)=(c_{\tau_j(1)},\cdots,c_{\tau_j(k)})$$

我们用 $\alpha:\pi_1(\mathbb{D}\backslash\mathscr{S})\longrightarrow U(\mathbb{C}^k)$ 表示该酉表示. 根据该表示 α，由向量丛的构造可知，可在 $\mathbb{D}\backslash\mathscr{S}$上构造一个平坦酉向量丛 E_B. 显然 $E=E_B\otimes\mathbb{C}^M$ 也是 $\mathbb{D}\backslash\mathscr{S}$上的平坦酉向量丛，该向量丛对应的 Bergman 丛位移就是 N_ψ-商模上以有限 Blaschke 乘积为符号的 Toeplitz 算子的模型.

定理 2　设 $B(z_1)$ 是 M 阶 Blaschke乘积，$\mathcal{N}_{\psi(z_2)}$ 上的 Toeplitz 算子 $T_{B(z_1)}$ 酉等价于 $L_a^2(\mathbb{D})\otimes\mathbb{C}^M$ 上的算子 $T_{E_\alpha}\otimes I$，这里的 I 是 $\mathbb{C}^M$ 上的单位算子.

证　用 $f_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,f_M=(0,\cdots,0,1)$ 表示 $\mathbb{C}^M$ 的标准正交基. 对 $1\leqslant k\leqslant M$，定义 $H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2})$ 到 $\mathbb{C}^M$ 的酉变换 $U_1:\lambda_k(z_2)\longmapsto f_k$. 文献[1]定义了 $L_a^2(\mathbb{D}_{z_2})$ 到 $L_a^2(E_\alpha)$ 的酉算子

$$V_0(f(z_2))=\frac{1}{\sqrt{N}}((f\circ\sigma_1)\sigma_1',\cdots,(f\circ\sigma_N)\sigma_N')^{\mathrm{tr}}$$

且有

$$V_0\circ M_{B(z_1)}=T_{E_B}\circ V_0$$

从而算子

$$V=U_1\otimes V_0:(H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2}))\otimes L_a^2(\mathbb{D})\longrightarrow\mathbb{C}^M\otimes L_a^2(E_\alpha)$$

V 显然是酉算子. 定义算子 $U:\mathcal{N}_\psi\longrightarrow L_a^2(E_\alpha)\otimes\mathbb{C}^M$ 为 $U_0:\mathcal{N}_{\psi(z_2)}\longrightarrow(H^2(\mathbb{T}_{z_2})\ominus\psi(z_2)H^2(\mathbb{T}_{z_2}))\otimes L_a^2(\mathbb{D})$ 与 V 的复合，且有

$$\begin{aligned}UT_B=VU_0T_B=(U_1\otimes V_0)(I\otimes M_{B(z_1)})=U_1\otimes(V_0M_{B(z_1)})=\\U_1\otimes(T_{E_B}V_0)=(Id\otimes T_{E_B})U\end{aligned}$$

推论 1　$\mathcal{N}_{\psi(z_2)}$ 上的 Toeplitz 算子 $T_{B(z_1)}$ 的双交换子与 $T_{E_\alpha}\otimes Id$ 的双交换子等同.

由于有限阶矩阵是有限维的，由推论 1 可见 M_B 的双交换子是有限维的，也就说明 M_B 的极小约化子空间是有限的. 在后续研究中，我们将通过该向量丛模型进一步研究 $\mathcal{N}_{\psi(z_2)}$ 上的 Toeplitz 算子 $T_{B(z_1)}$ 的性质.

参考文献：

[1] DOUGLAS R G, KESHARI D K, XU A J. Generalized Bundle Shift with Application to Multiplication Operator on the Bergman Space [J]. J Operator Theory, 2016, 75(1): 3-19.

[2] DOUGLAS R G, PUTINAR M, WANG K. Reducing Subspaces for Analytic Multipliers of the Bergman Space [J]. J Funct Anal, 2012, 263(6): 1744-1765.

[3] DOUGLAS R G, SUN S H, ZHENG D C. Multiplication Operators on the Bergman Space Via Analytic Continuation [J]. Adv Math, 2011, 226(1): 541-583.

[4] HU J Y, SUN S H, XU X M, et al. Reducing Subspace of Analytic Toeplitz Operators on the Bergman Space [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2004, 49(3): 387-395.

[5] ZHU K H. Reducing Subspaces for a Class of Multiplication Operators [J]. J London Math Soc, 2000, 62(2): 553-568.

[6] THOMSON J E. The Commutant of a Class of Analytic Toeplitz Operators [J]. Amer J Math, 1977, 99: 522-529.

[7] 陈　雪，黄　穗. 调和 Fock 空间 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(2)：26-30.

[8] 刘　妮，郭艳鹂，任谨慎，等. 幂等算子核空间的刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(8)：102-105.

[9] CHEN X M, GUO K Y. Analytic Hilbert Modules [M]. London: A CRC Press Company, 2003.

[10] IZUCHI K, YANG R W. N_ϕ-Type Quotient Modules on the Torus [J]. New York J Math, 2008, 14: 431-457.

[11] RUDIN W. Function Theory in Polydiscs [M]. New York: W. A. Benjamin Inc, 1969.

[12] GUO K Y, SUN S H, ZHENG D C, et al. Multiplication Operators on the Bergman Space Via the Hardy Space of the Bidisk [J]. J Reine Angew Math, 2009, 628: 129-168.

[13] KOBAYASHI S. Differential Geometry of Complex Vector Bundles [M]. Tokyo: Princeton University Press, 1987.
[14] GRAUERT H. Analytische Faserungen uber Holomorph Vollstandigen Raumen [J]. Math Ann, 1958, 135: 263-273.
[15] MISRA G, REZA M R. Curvature Inequalities and Extremal Operators [J]. Illinois J Math, 2019, 63(2): 193-217.
[16] XU A J. Reductivity and Bundle Shifts [J]. Appl Math J Chinese Univ (Ser B), 2019, 34(1): 27-32.
[17] XU A J. Reducing Subspaces of Analytic Toeplitz Operators on the Bergman Space of the Annulus [J]. Complex Anal Oper Theory, 2019, 13(8): 4195-4206.
[18] STEPHENSON K. Analytic Functions and Hypergroups of Function Pairs [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1982, 31(6): 843-884.

A Vector Bundle Model of Toeplitz Operators on the Quotient Module $\mathcal{N}_\psi$ in the Bidisc

XU An-jian[1], ZOU Yang[2]

1. School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;
2. Department of Mathematics and Information Project, Chongqing University of Education, Chongqing 400067, China

Abstract: Let $\mathbb{D}$ be an open unit disc in the complex plane, $H^2(\mathbb{D}^2)$ the Hardy module on the bidisc $\mathbb{D}^2$, and $\psi(z_2)$ a finite Blaschke product. Firstly, the N_ψ-quotient module of $H^2(\mathbb{D}^2)$ is defined, and an equivalent characterization of the quotient module N_ψ is given by the properties of a finite Blaschke product. Secondly, an orthonormal basis is constructed according to this equivalent characterization and a more concrete characterization of N_ψ is given. Finally, the analytic Toeplitz operators on N_ψ-quotient module with the finite Blaschke product $B(z_1)$ as symbols are studied, and a Bergman bundle shift model is constructed by investigation of the set of inverses of $B(z_1)$. Furthermore, the geographical characterization of some properties of the Toeplitz operator is given using this model.

Key words: Toeplitz operator; Bergman space; Hardy space; quotient module

责任编辑 廖 坤