

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.04.011

黎曼流形上导航术问题的推广

程新跃, 瞿秋红

重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331

摘要:黎曼流形上的导航术问题在芬斯勒几何中扮演着非常重要的角色. Randers 度量和 Kropina 度量都可以由黎曼流形 (M, h) 上具有向量场 W 的导航术问题的解来刻画, 其中 $\|W\| \leq 1$. 论文首先揭示了芬斯勒流形上的导航术问题与流形的单位切球的几何之间的重要关系. 当芬斯勒流形 (M, Φ) 上的向量场 $V = V(x)$ 满足条件 $\Phi(x, -V_x) < 1$ 时, 证明了由导航数据 (Φ, V) 确定的芬斯勒度量 F 是一个正则的芬斯勒度量; 当 $\Phi(x, -V_x) = 1$ 时, 证明了 F 是一个锥芬斯勒度量. 进一步, 研究了 Kropina 流形和 Randers 流形上的导航术问题. 当 F 是流形 M 上的 Kropina 度量, 且向量场 V 满足 $F(x, -V_x) \leq 1$ 时, 证明了由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 必然是 Randers 度量或 Kropina 度量; 当 F 为 Randers 度量, 且向量场 V 满足 $F(x, -V_x) = 1$ 时, 证明了由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 必然是 Kropina 度量.

关键词: Kropina 度量; Randers 度量; 导航术问题; 向量场; 芬斯勒度量

中图分类号: O186.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2021)04-0085-07

众所周知, 求解 Zermelo 导航术问题一直是探索和研究芬斯勒空间结构的重要方法之一, 对推进芬斯勒几何的研究发挥了重要作用. Zermelo 导航术问题是考虑度量空间中的一个运动物体在内力和外力的作用下从一个点运动到另一个点所走的最短时间路径问题^[1-2]. 文献[1]在芬斯勒空间上推广了 Zermelo 导航术问题, 证明了在芬斯勒流形 (M, F) 上, 在满足 $F(x, -W_x) < 1$ 的外力场 W 的影响下, 最短时间路径是由方程

$$F\left(x, \frac{y}{F(x, y)} - W_x\right) = 1 \tag{1}$$

确定的新的度量 $\bar{F}$ 的测地线. 一般地, 度量 $\bar{F}$ 称为由导航数据 (F, W) 确定的导航术问题(1)的解. 当 F 是黎曼度量 $h = \sqrt{h_{ij}y^iy^j}$, 且外向量场 $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 满足 $\|W\|_h < 1$ 时, 通过

$$h\left(x, \frac{y}{F(x, y)} - W_x\right) = 1 \tag{2}$$

得到的解为

$$F = \frac{\sqrt{\lambda h^2 + W_0^2}}{\lambda} - \frac{W_0}{\lambda}$$

其中 $W_0 = W_i y^i$, $W_i = h_{ij} W^j$, $\lambda = 1 - \|W\|_h^2 > 0$. 容易验证 $\|W_x\|_h = \|\beta_x\|_a$. 此时, F 是 Randers 度量, 我们把 (h, W) 称为 Randers 度量的导航数据^[1-2].

另外, 设 $h = \sqrt{h_{ij}(x)y^iy^j}$ 是流形 M 上的黎曼度量, $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是流形 M 上的一个向量场并且满足

$\|W\|_h = 1$, 那么通过解(2)式可得

$$F = \frac{h^2}{2W_0} \quad (3)$$

此时, F 是 Kropina 度量. 由(3)式确定的度量 F 在切丛 TM 上并不是正则的, 但在锥形区域 $A = \bigcup_{x \in M} A_x$ 上是正则的, 这里

$$A_x = \left\{ y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M : W_0 = W_i(x) y^i > 0 \right\} \quad (4)$$

我们称这样的度量为锥 Kropina 度量. 如果令

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{4} h^2 \quad \beta = \frac{b^2}{2} W_0 \quad (5)$$

则由(3)式确定的 Kropina 度量 F 也可等价地表示为

$$F = \frac{\alpha^2}{\beta}$$

此时, F 仍然在锥形区域 $A = \bigcup_{x \in M} A_x$ 上是正则的, 且 A_x 可表示为

$$A_x = \left\{ y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M : \beta = b_i(x) y^i > 0 \right\}$$

反过来, 给定一个 Kropina 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$, 令

$$h_{ij} = \frac{4}{b^2} a_{ij} \quad W_i = \frac{2}{b^2} b_i \quad (6)$$

则由(6)式得到的导航数据 (h, W) 满足 $\|W\|_h = 1$, 并且容易验证由导航数据 (h, W) 确定的(2)式的解正是 F . 所以 Kropina 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 与满足 $\|W\|_h = 1$ 的导航数据 (h, W) 是一一对应的. 我们称 (h, W) 为 Kropina 度量 F 的导航数据^[3].

从本质上讲, 芬斯勒流形上的 Zermelo 导航术问题与流形的单位切球的几何有着密切的关系. 事实上, 芬斯勒流形上的导航术问题总对应于单位切球沿一个给定向量场的平移. 具体地, 在芬斯勒流形 (M, Φ) 上, 任意点 $x \in M$ 处的单位切球 S_Φ 是切空间 $T_x M$ 在原点 x 附近的一个封闭超曲面, $S_\Phi = \{y \in T_x M : \Phi(x, y) = 1\}$. 假定 $V = V(x)$ 是流形 M 上的一个向量场, 并且 $\Phi(x, -V_x) \leq 1$, 考虑 S_Φ 沿向量场 V 的平行移动 $S_\Phi + \{V\}$. 易知 $y \in S_\Phi + \{V\}$ 当且仅当 $\Phi(x, y - V_x) = 1$, 即在切空间 $T_x M$ 上, $S_\Phi + \{V\}$ 的方程为 $\Phi(x, y - V_x) = 1$. 进一步, 我们有以下两个重要的观察结果:

(I) 当 $\Phi(x, -V_x) < 1$ 时, $-V_x$ 的终点在 S_Φ 的内部, 且沿 V_x 作平行移动后一定与原点 x 重合. 此时可知 $S_\Phi + \{V\}$ 包含原点 x (图 1).

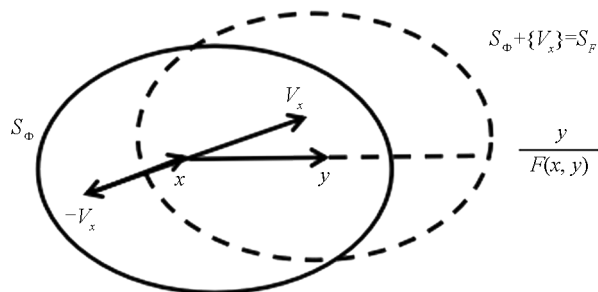


图 1 $\Phi(x, V_x) < 1$ 时的图 $S_\Phi + \{V\}$

在这种情况下, 易见对于任意的 $y \in T_x M - \{0\}$, 一定存在唯一正数 $F = F(x, y) > 0$, 使得

$$\frac{y}{F(x, y)} \in S_\Phi + \{V\} \quad (7)$$

这等价于 $F(x, y)$ 满足

$$\Phi\left(x, \frac{y}{F(x, y)} - V_x\right) = 1 \quad (8)$$

可以证明, 这样的 $F = F(x, y)$ 是正则的芬斯勒度量^[3]. 显然, 由(8)式可知 F 是由导航数据 (Φ, V) 确定的导航术问题的解.

(II) 当 $\Phi(x, -V_x) = 1$ 时, $-V_x$ 的终点在 S_Φ 上, 且沿 V_x 作平行移动后一定与原点 x 重合. 此时, 易见 $S_\Phi + \{V\}$ 必定通过原点 x (图2).

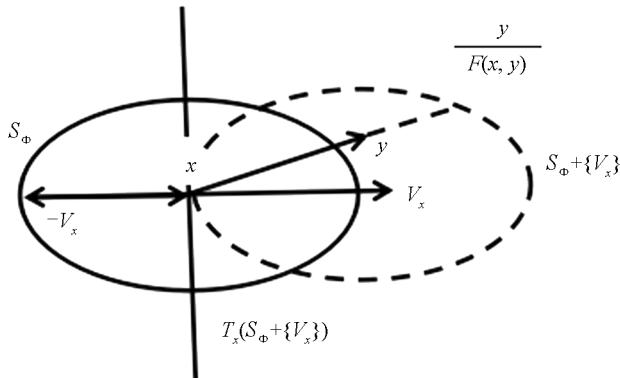


图2 $\Phi(x, -V_x) = 1$ 时的图 $S_\Phi + \{V\}$

在这种情况下, 易见对于任意的 $y \in A_x = \{y \in T_x M : g_V(y, V_x) > 0\}$, 存在唯一正数 $F = F(x, y) > 0$, 使得 $F = F(x, y)$ 满足(7)式, 亦即等价地满足(8)式. 此时, $F = F(x, y)$ 是锥芬斯勒度量.

上述观察对深刻认识导航术技巧的几何本质, 深入推进利用导航术技巧来揭示芬斯勒空间的几何性质与结构的工作是极为重要的.

导航术技巧对于研究芬斯勒几何中的许多问题有着重要的作用, 已受到了几何学家们越来越多的关注. 文献[4]利用黎曼流形上的导航术技巧完全刻画和分类了具有常数旗曲率的 Randers 度量. 进一步, 文献[5]刻画和完全分类了具有弱迷向旗曲率的 Randers 度量和弱 Einstein-Randers 度量. 文献[6]利用黎曼流形上的导航术技巧刻画和分类了具有常数旗曲率的 Kropina 度量. 文献[7]进一步决定了具有弱迷向旗曲率的 Kropina 度量的局部结构. 文献[8]研究了 Randers 流形 (M, F) 上的 Zermelo 导航术问题, 证明了: 由 F 和满足 $F(x, -V_x) < 1$ 的共形向量场 V 作为导航数据所得到的 Zermelo 导航术问题的解是一个 Randers 度量 $\bar{F}$, 并决定了 F 与 $\bar{F}$ 的 S -曲率、旗曲率和 Ricci 曲率性质之间的关系. 文献[9]还研究了由一个 Douglas 型的 Randers 度量 F 与一个满足 $F(x, -V_x) < 1$ 的向量场 V 作为导航数据所确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 的曲率性质. 另一方面, 文献[10]研究了由一个芬斯勒度量 F 和一个位似向量场 V 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 的旗曲率性质, 并建立了 F 与 $\bar{F}$ 的旗曲率之间的关系, 为利用导航术技巧深入研究芬斯勒度量的旗曲率性质提供了新的路径.

本文着重研究 Kropina 流形与 Randers 流形上的导航术问题, 证明了当 F 为 Kropina 度量且向量场 V 满足 $F(x, -V_x) \leq 1$ 时, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 必然是 Randers 度量或 Kropina 度量. 进一步, 当 F 为 Randers 度量且向量场 V 满足条件 $F(x, -V_x) = 1$ 时, 我们证明了 $\bar{F}$ 必然是 Kropina 度量.

1 预备知识

在这一节中, 我们简要介绍关于 Randers 度量及 Kropina 度量的知识.

给定流形 M 上的黎曼度量 $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 和 1-形式 $\beta = b_i(x)y^i$, (α, β) -度量是形如

$$F = \alpha\varphi(s) \quad s = \frac{\beta}{\alpha}$$

的度量, 这里 $\varphi = \varphi(s)$ 是定义在 $(-b_0, b_0)$ 上的正的光滑函数, 且满足

$$\varphi(s) - s\varphi'(s) + (b^2 - s^2)\varphi''(s) > 0 \quad |s| \leq b < b_0$$

当 $\varphi = 1 + s$ 时, 所得到的 (α, β) -度量即是 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$. Randers 度量是由物理学家

G. Randers 在 1941 年研究广义相对论时引入的,是最简单的一类非黎曼芬斯勒度量. 一个基本的事实是, Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 正则的充分必要条件是 $b = \|\beta\|_a < 1$ (见文献[2]). Randers 度量具有许多重要的曲率性质, 关于 Randers 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 的研究也极大地促进了对一般的芬斯勒度量的研究^[11]. 当 $\varphi = \frac{1}{s}$ 时, 所得到的 (α, β) -度量即是 Kropina 度量. Kropina 度量最初由 L. Berwald 在讨论

二维射影平坦芬斯勒度量时提出, 此后引入到热动力学理论等领域. Kropina 度量是芬斯勒几何中一类形式简单但极为重要的度量, 它在物理学、电子光学、力学等领域中也有着重要的应用^[12-14].

如前所述, Randers 度量和 Kropina 度量都可以通过黎曼流形上的导航术确定. 在流形维数大于 2 时, Randers 度量与 Kropina 度量都是 C -可约的芬斯勒度量^[12,15-16]. 这两类度量在生态学中的 Krivan 问题的研究中有着重重要的应用^[13]. 但是, Randers 度量是正则的芬斯勒度量, 而 Kropina 度量是非正则的芬斯勒度量. 具体地, 当上述的 s 在任意区间 $(-b_0, b_0)$ 上取值时, 相应的 Kropina 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是具有奇异性的芬斯勒度量.

本文着重讨论和研究正则的 Kropina 度量, 把 Kropina 度量定义在切丛的锥形区域 $A = \bigcup_{x \in M} A_x$ 上, 其中

$$A_x = \left\{ y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M : \beta = b_i(x) y^i > 0 \right\}$$

显然, 此时的 Kropina 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta} : A \longrightarrow (0, +\infty)$ 为正则的芬斯勒度量. 我们把这样的 Kropina 度量称为锥 Kropina 度量^[3,6]. 本文所涉及到的 Kropina 度量均为锥 Kropina 度量. 在不引起歧义的情况下, 本文总是用术语 Kropina 度量代替术语锥 Kropina 度量.

2 Kropina 流形上的导航术问题

本节着重讨论 Kropina 流形上的导航术问题. 假若在 Kropina 流形 (M, F) 上给定了向量场 V , 且 V 满足 $F(x, -V_x) \leq 1$. 根据前面的讨论可知: 当 $F(x, -V_x) < 1$ 时, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 一定是正则的芬斯勒度量; 而当 $F(x, -V_x) = 1$ 时, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 一定是锥芬斯勒度量. 具体地, 一个有趣的问题是: 此时的 $\bar{F}$ 到底会是一个怎么样的度量呢? 以下定理为我们给出了明确的答案.

定理 1 令 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是 n 维流形 M 上的 Kropina 度量, 假设 V 是流形 (M, F) 上的向量场且 $-V_x \in A_x$, 并且满足 $F(x, -V_x) \leq 1$. 则:

(i) 若 $F(x, -V_x) < 1$, 则由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解为

$$\bar{F} = \frac{\sqrt{\bar{W}_0^2 + \bar{\lambda} \bar{h}^2}}{2\bar{\lambda}} + \frac{\bar{W}_0}{2\bar{\lambda}}$$

其中 $\bar{W}_i = -(2V_i + b_i)$, $\bar{h} = 2\alpha$, $\bar{\lambda} = -(\|V_x\|_a^2 + 2\rho)$, $\rho = b_i V^i$, $V_i = a_{ij} y^j$, $V_0 = V_i y^i$. 此时, $\bar{F}$ 是正则的 Randers 度量.

(ii) 若 $F(x, -V_x) = 1$, 则由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解为

$$\bar{F} = \frac{\bar{h}^2}{\bar{W}_0}$$

其中 $\bar{W}_i = 2V_i + b_i$, $\bar{h} = \alpha$. 此时, $\bar{F}$ 是 Kropina 度量.

证 首先, 由 $-V_x \in A_x$ 可知 $F(x, -V_x) > 0$, 即 $-b_i V_i > 0$. 进一步, 由方程(1)知, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 满足

$$F\left(x, \frac{y}{F(x, y)} - V_x\right) = 1 \quad (9)$$

即

$$a_{ij}\left(\frac{y^i}{F} - V^i\right)\left(\frac{y^j}{F} - V^j\right) = b_i\left(\frac{y^i}{F} - V^i\right) \quad (10)$$

把(10)式化简后得

$$a_{ij}\left(\frac{y^i y^j}{F^2} - \frac{y^i V^j}{F} - \frac{y^j V^i}{F} + V^i V^j\right) = b_i\left(\frac{y^i}{F} - V^i\right)$$

进一步, 有

$$\frac{\alpha^2}{F^2} - \frac{2V_0}{F} + \|V\|_a^2 = \frac{\beta}{F} - b_i V^i \quad (11)$$

其中 $V_0 = V_i y^i$, $V_i = a_{ij} y^j$. 对(11)式两边同乘 $\bar{F}^2$, 我们可得

$$\alpha^2 - 2V_0 \bar{F} + \|V\|_a^2 \bar{F}^2 - \beta \bar{F} + \rho \bar{F}^2 = 0 \quad (12)$$

其中 $\rho = V(b) = b_i V^i$. 整理后, 有

$$(\rho + \|V\|_a^2) \bar{F}^2 - (2V_0 + \beta) \bar{F} + \alpha^2 = 0 \quad (13)$$

(i) 若 $F(x, -V_x) < 1$, 我们有 $0 < \frac{\|V_x\|_a^2}{-b_i V^i} < 1$, 从而可得 $\|V_x\|_a^2 + \rho < 0$.

进一步, 由 $\bar{F} > 0$, 可得(13)式的解为

$$\bar{F} = \frac{(2V_0 + \beta) - \sqrt{(2V_0 + \beta)^2 - 4(\|V_x\|_a^2 + \rho)\alpha^2}}{2(\|V_x\|_a^2 + \rho)} \quad (14)$$

由于 $\|V_x\|_a^2 + \rho < 0$, 令 $\bar{\lambda} = -(\|V_x\|_a^2 + \rho) > 0$. 再令 $\bar{W}_i = -(2V_i + b_i)$, $\bar{h} = 2\alpha$, 从而

$$\bar{F} = \frac{\sqrt{\bar{W}_0^2 + \bar{\lambda} \bar{h}^2}}{2\bar{\lambda}} + \frac{\bar{W}_0}{2\bar{\lambda}} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \quad (15)$$

此时, $\bar{F}$ 是一个 Randers 度量.

记 $\bar{\alpha} = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$, $\bar{\beta} = \bar{b}_i y^i$, 则由(15)式, 有

$$\bar{a}_{ij} = \frac{(\bar{W}_i \bar{W}_j + \bar{\lambda} \bar{h}_{ij})}{4\bar{\lambda}^2} \quad \bar{b}_i = \frac{\bar{W}_i}{2\bar{\lambda}} \quad (16)$$

利用文献[2]中的引理 1.1.1, 可得

$$\bar{a}^{ij} = \frac{\bar{\lambda}[4b^2 \bar{h}^{ij} - \bar{W}^i \bar{W}^j]}{b^2} \quad \bar{b}^i = \frac{b^2 \bar{W}^i - \bar{W}^2 \bar{W}^i}{2b^2} \quad (17)$$

其中 $\bar{h}^{ij} = 4a_{ij}$, $\bar{W}^i = a^{ij} \bar{W}_j = -a^{ij}(2V_j + b_j) = -(2V^i + b^i)$. 从而, 由(16)式和(17)式可得

$$\|\bar{\beta}_x\|_a^2 = \bar{a}^{ij} \bar{b}_i \bar{b}_j = 1 - \frac{4\bar{\lambda}}{b^2} < 1$$

由此可知, $\bar{F}$ 是正则的 Randers 度量.

(ii) 若 $F(x, -V_x) = 1$, 即 $\frac{\|V_x\|_a^2}{-b_i V^i} = 1$, 可得 $\|V_x\|_a^2 + \rho = 0$. 则(13)式等价于

$$-(2V_0 + \beta) \bar{F} + \alpha^2 = 0$$

由此可得

$$\bar{F} = \frac{\alpha^2}{2V_0 + \beta} \quad (18)$$

令 $\bar{W}_i = 2V_i + b_i$, $\bar{h} = \alpha$, 则(18)式可重新表达为

$$\bar{F} = \frac{\bar{h}^2}{\bar{W}_0}$$

显然, 此时 $\bar{F}$ 是 Kropina 度量.

3 Randers 流形上的导航术问题

由前面的介绍已知, 给定 Randers 流形 (M, F) 上的一个向量场 V , 假若向量场 V 满足 $F(x, -V_x) < 1$, 则由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 必然是 Randers 度量^[8]. 由此产生的一个有趣的问题是: 如果给定的向量场 V 满足 $F(x, -V_x) = 1$, 那么由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 会是一个怎样的度量? 根据前面的讨论, 此时的 $\bar{F}$ 一定是锥芬斯勒度量. 进一步, 下面的定理告诉我们, 此时的 $\bar{F}$ 必然是 Kropina 度量:

定理 2 设 $F = \alpha + \beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量, V 是流形 (M, F) 上的向量场且满足 $F(x, -V_x) = 1$. 则由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解为

$$\bar{F} = \frac{\bar{h}^2}{2\bar{W}_0}$$

其中 $\bar{W}_i = V_i - (1 + \rho)b_i$, $\bar{h}^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $\rho = \beta(V) = b_i V^i$. 此时, $\bar{F}$ 是 Kropina 度量.

证 由方程(1)知, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解 $\bar{F}$ 一定满足 $F\left(x, \frac{y}{\bar{F}(x, y)} - V_x\right) = 1$. 从而, 我们有

$$\sqrt{a_{ij}\left(\frac{y^i}{\bar{F}} - V^i\right)\left(\frac{y^j}{\bar{F}} - V^j\right)} + b\left(\frac{y^i}{\bar{F}} - V^i\right) = 1 \quad (19)$$

把(19)式化简后得

$$\frac{\alpha^2}{\bar{F}^2} - \frac{2V_0}{\bar{F}} + \|V_x\|_\alpha^2 = (1 + b_i V^i) - 2(1 + b_i V^i) \frac{\beta}{\bar{F}} + \frac{\beta^2}{\bar{F}^2} \quad (20)$$

由于 $F(x, -V_x) = 1$, 即 $\|V_x\|_\alpha^2 - (1 + b_i V^i)^2 = 0$. 令 $\rho = b_i V^i$, 整理(20)式后, 有

$$2[V_0 - (1 + \rho)\beta]\bar{F} = \alpha^2 - \beta^2 \quad (21)$$

由(21)式易得

$$\bar{F} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2[V_0 - (1 + b_i V^i)\beta]} \quad (22)$$

我们令 $\bar{W}_i = V_i - (1 + \rho)b_i$, $\bar{h}^2 = \alpha^2 - \beta^2$, 则(22)式可表达为

$$\bar{F} = \frac{\bar{h}^2}{2\bar{W}_0}$$

此时, $\bar{F}$ 是 Kropina 度量.

文献[8]研究了 Randers 流形上的导航术问题. 给定一个 Randers 流形 (M, F) , 证明了: 由 F 和满足 $F(x, -V_x) < 1$ 的向量场 V 作为导航数据所得到的 Zermelo 导航术问题的解是 Randers 度量 $\bar{F}$. 结合定理 1 和定理 2 的结果, 我们可以得到以下结论: 设 F 是流形 M 上的 Randers 度量或 Kropina 度量, V 是 M 上的向量场(当 F 是 Kropina 度量时, 要求 $-V_x \in A_x$), 则当 $F(x, -V_x) < 1$ 时, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解必为 Randers 度量; 当 $F(x, -V_x) = 1$ 时, 由导航数据 (F, V) 确定的导航术问题的解必为 Kropina 度量. 本文的研究成果不仅极大地推广了文献[8]中的结果, 更为深化导航术技巧在芬斯勒几何研究中的应用提供了有力的支撑.

参考文献:

- [1] SHEN Z M. Finsler Metrics with $K=0$ and $S=0$ [J]. Canad J Math, 2003, 55(1): 112-132.
- [2] CHERN S S, SHEN Z M. Riemann-Finsler Geometry [M]. Singapore: World Scientific, 2005.
- [3] CHENG X Y, LI T T, YIN L. The Conformal Vector Fields on Conic Kropina Manifolds Via Navigation Data [J]. J Geom Phys, 2018, 131: 138-146.

- [4] BAO D, ROBLES C, SHEN Z M. Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds [J]. J Differential Geometry, 2004, 66(3): 377-435.
- [5] CHENG X Y, SHEN Z M. Randers Metrics of Scalar Flag Curvature [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 87(3): 359-370.
- [6] YOSHIKAWA R, SABAU S V. Kropina Metrics and Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds [J]. Geometriae Dedicata, 2014, 171(1): 119-148.
- [7] XIA Q L. On Kropina Metrics of Scalar Flag Curvature [J]. Diff Geom Appl, 2013, 31(3): 393-404.
- [8] SHEN Z M, XIA Q L. On Conformal Vector Fields on Randers Manifolds [J]. Science China Mathematics, 2012, 55(9): 1869-1882.
- [9] XIA Q L. On the Flag Curvature of a Class of Randers Metric Generated from the Navigation Problem [J]. J Math Anal Appl, 2013, 397(1): 415-427.
- [10] ESRA SENGELEN S, SHEN Z M. Randers Metrics of Constant Scalar Curvature [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2013, 56(3): 615-620.
- [11] CHENG X Y, SHEN Z M. Finsler Geometry——An Approach via Randers Spaces [M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [12] MATSUMOTO M. On C-Reducible Finsler Spaces [J]. Tensor N S, 1972, 24: 29-37.
- [13] ANTONELLI P L, INGARDEN R S, MATSUMOTO M. The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology [M]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993.
- [14] 程新跃, 李婷婷, 殷 丽. 关于射影 Ricci 曲率的比较定理与共形不变性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(2): 52-59.
- [15] CHENG X Y, SHEN Z M. Einstein Finsler Metrics and Killing Vector Fields on Riemannian Manifolds [J]. Science China Mathematics, 2017, 60(1): 83-98.
- [16] CHENG X Y, YIN L, LI T T. The Conformal Vector Fields on Kropina Manifolds [J]. Differential Geometry and Its Applications, 2018, 56: 344-354.

Generalizations of Navigation Problems on Riemann Manifolds

CHENG Xin-yue, QU Qiu-hong

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: The navigation problem on Riemannian manifolds plays a very important role in Finsler geometry. Both Randers metric and Kropina metric can be characterized by the solution of the navigation problem on a Riemannian manifold (M, h) with a vector field W satisfying $\|W\| \leq 1$. First, the important relationships between navigation problems and the geometry of indicatrix on Finsler manifolds are revealed in this paper. When the vector field $V = V(x)$ on Finsler manifold (M, Φ) satisfies $\Phi(x, -V_x) < 1$, it is proved that the Finsler metric F determined by navigation data (Φ, V) is a regular Finsler metric; and that when $\Phi(x, -V_x) = 1$, F is a conic Finsler metric. Next, the navigation problems on Kropina manifolds and Randers manifolds are studied. When F is a Kropina metric on a manifold M and vector field V satisfies $F(x, -V_x) \leq 1$, it is proved that the solution $\bar{F}$ of the navigation problem with the navigation data (F, V) is either a Randers metric or a Kropina metric. Further, when F is a Randers metric and the vector field V satisfies $F(x, -V_x) = 1$, it is proved that the solution $\bar{F}$ of the navigation problem with the navigation data (F, V) must be a Kropina metric.

Key words: Kropina metric; Randers metric; navigation problem; vector field; Finsler metric