第 43 卷第 4 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2021 年 4 月
Vol. 43　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.04.012

# 非自治随机 $p$-Laplacian 格点方程的后向紧随机吸引子

宋　立，　李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要：** 在外力是后向缓增的情况下，通过对解的估计，证明了非自治随机 $p$-Laplacian格点方程在空间 $l^2$ 上存在后向一致吸收集，且方程在吸收集上是后向渐进紧的．再利用吸引子的存在性定理，证明了非自治随机 $p$-Laplacian 格点方程在空间 $l^2$ 上存在后向紧随机吸引子．

**关　键　词：** 随机动力系统；非自治 $p$-Laplacian 格点方程；后向紧随机吸引子

**中图分类号：O193**　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2021)04－0092－08

若随机吸引子的后向并是预紧的，则称该吸引子为后向紧随机吸引子．文献[1-2]对非自治动力系统所产生的拉回吸引子的存在性和后向紧性做了深入的研究，并建立了相对完善的理论体系．文献[3-6]对非自治方程的吸引子的存在性进行了研究，文献[7-8]对自治 $p$-Laplacian 格点方程吸引子的存在性做了研究．本文将在文献[8]的基础上，研究非自治情况下，带有乘法噪音的随机 $p$-Laplacian 格点方程的后向紧吸引子的存在性．

## 1　预备知识

**定义 1**　设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间，$\theta=\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$：$\mathbb{R}\times\Omega\longrightarrow\Omega$ 是一簇 $(\mathscr{B}(\mathbb{R})\times\mathscr{F}, \mathscr{F})$ 保测映射，使得 $\theta_t(0, \cdot)$ 是 $\Omega$ 上的恒等映射，且满足

$$\theta_t(s+t, \cdot)=\theta_t(t, \cdot)\circ\theta_t(s, \cdot) \qquad \forall\, t, s\in\mathbb{R}$$

则称 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \theta)$ 是一个度量动力系统．

**定义 2**　令 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \theta)$ 是度量动力系统，若存在映射 $\Phi$：$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\Omega\times X\longrightarrow X$，使得对任意 $\omega\in\Omega$，$\tau\in\mathbb{R}$ 及 $t, s\in\mathbb{R}_+$，满足：

(i) $\Phi(\cdot, \tau, \cdot, \cdot)$：$\mathbb{R}_+\times\Omega\times X\longrightarrow X$ 是 $(B(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F}\times B(X), B(X))$ 可测的；

(ii) $\Phi(0, \tau, \omega, \cdot)$ 是 $X$ 上的恒等映射；

(iii) $\Phi(t+s, \tau, \omega, \cdot)=\Phi(t, \tau+s, \theta_s\omega, \cdot)\circ\Phi(s, \tau, \omega, \cdot)$；

(iv) $\Phi(t, \tau, \omega, \cdot)$：$X\longrightarrow X$ 是连续的．

则称映射 $\Phi$ 是关于 $(\Omega, \mathscr{F}, P, \theta)$ 的非自治动力系统，也称协循环．

---

收稿日期：2020－10－21

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283)．

作者简介：宋　立，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究．

通信作者：李扬荣，博士生导师，教授．

**定义 3**　设 $\mathscr{D}=\{\mathscr{D}(t,\omega)\}$ 是 $X$ 中的集合，若对 $\forall x\in X$，$\tau\in\mathbb{R}$，函数 $f:\omega\longrightarrow d(x,\mathscr{D}(t,\omega))$ 是 $(\mathscr{F},\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ 可测的，则称 $D$ 为随机集.

**定义 4**　令 $\mathscr{B}$ 是 $X$ 的所有有界非空子集族构成的集合，假设集合

$$\mathscr{K}=\{K(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathscr{B}$$

若对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$D\in\mathscr{B}$，存在 $T=T(\tau,\omega,D)>0$，使得当 $t\geqslant T$ 时有

$$\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,D(\tau-t,\theta_{-t}\omega))\subseteq K(\tau,\omega)$$

则称 $\mathscr{K}$ 为 $\Phi$ 的 $\mathscr{B}$-拉回吸收集.

## 2　非自治随机动力系统

本文将在 $\ell^2$ 空间上讨论带有乘法噪音的非自治随机 $p$-Laplacian 格点方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=|u_{i+1}-u_i|^{p-2}(u_{i+1}-u_i)-|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-\\ \qquad\lambda(u_i+|u_i|^{p-2}u_i)+f_i(u_i)+g_i(t)+\alpha u_i\circ\dfrac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\\ u_i(\tau)=u_{0,i}\qquad i\in\mathbb{Z}\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 代表整数集，$\lambda,\alpha>0$，$p>2$，$W(t)$ 是双边实值 Wiener 过程，$\circ$ 代表 Stratonovich 积分意义下的乘法噪音. 对于外力项 $f=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和非自治项 $g=(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 有如下假设：

(F1) $f_i\in C^1(\mathbb{R})$，$\sup\limits_{i\in\mathbb{Z}}|f_i'(u)|$ 局部有界，且 $f_i$ 满足

$$f_i(s)s\leqslant 0\qquad\forall s\in\mathbb{R}\tag{2}$$

(F2) $g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\ell^2)$，且满足

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\gamma(r-s)}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r<\infty\qquad\forall\tau\in\mathbb{R},\gamma>0\tag{3}$$

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|\geqslant N}|g_i(s)|^2=0\qquad\forall s,\tau\in\mathbb{R}\tag{4}$$

定义 $\ell^2$ 上的有界算子：

$$B:(Bu)_i=u_{i+1}-u_i\qquad B^*:(B^*u)_i=u_{i-1}-u_i$$

$$A:(Au)_i=|u_i-u_{i-1}|^{p-2}(u_i-u_{i-1})-|u_{i+1}-u_i|^{p-2}(u_{i+1}-u_i)\qquad\forall u\in\ell^2$$

因此，根据算子的定义，有

$$(Au,u)=(|Bu|^{p-2}\otimes(Bu),Bu)=\|Bu\|_p^p\leqslant\|Bu\|^p\leqslant 2^p\|u\|^p\qquad\forall u\in\ell^2\tag{5}$$

微分方程(1)可整理为

$$\begin{cases}u(t)=u_0+\displaystyle\int_\tau^t[-Au(s)-\lambda(u(s)+|u(s)|^{p-2}u(s))+f(u(s))+g]\mathrm{d}s+\alpha\int_\tau^t u(s)\mathrm{d}\omega(t)\\ u(\tau)=u_0\in\ell^2\end{cases}\tag{6}$$

下面证明方程(6)能生成随机动力系统.

做变量替换 $v(t)=\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_t\omega)}u(t)$. 其中 $u(t)$ 是方程(6)的解，$z(\theta_t\omega)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{r}\theta_t\omega(r)\mathrm{d}r$ 是方程 $\mathrm{d}z+z\mathrm{d}t=\mathrm{d}\omega(t)$ 的解. 由文献[9-10]可知，对任意 $\omega\in\Omega$，$z(\theta_t\omega)$ 关于 $t$ 连续，且满足

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|z(\theta_t\omega)|}{|t|}=0\qquad\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|\omega(t)|}{|t|}=0\qquad\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_0^t z(\theta_s\omega)\mathrm{d}s=0\tag{7}$$

因此方程(6)可转化为关于 $v$ 的随机微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_t\omega)}Av+(\alpha z(\theta_t\omega)-\lambda)v-\lambda\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_t\omega)}|v|^{p-2}v+\\ \qquad\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_t\omega)}f(\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_t\omega)}v)+\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_t\omega)}g\\ v(\tau)=v_0\end{cases}\tag{8}$$

由文献[8]可知，对任意 $T>0$，$v_0\in\ell^2$，$\omega\in\Omega$，方程(8)存在唯一的解 $v(\cdot,\tau,\omega,v_0)\in C([\tau,+\infty),\ell^2)$，且依赖初值 $v_0$ 连续. 因此方程(8)在$(\Omega,\mathscr{F},P,\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$上能生成一个连续的随机动力系统$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$，即对 $v_0\in\ell^2$，$t\geqslant 0$，$\tau\in\mathbb{R}$，和 $\omega\in\Omega$，有

$$\Phi(t,\tau,\omega,v_0)=v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,v_0)$$

在下文中，设 $\mathbb{D}_0$ 是 $X$ 中所有缓增集构成的集合，$\mathbb{D}$ 是 $X$ 中所有后向缓增集构成的集合. 若集合 $\mathscr{D}_0$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\gamma t}\|\mathscr{D}_0(\tau-t,\theta_{-t}\omega)\|_X^2=0\qquad\forall\gamma>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega\tag{9}$$

则称集合 $\mathscr{D}_0$ 为缓增集；若集合 $\mathscr{D}$ 满足

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{s\leqslant\tau}\|\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)\|_X^2=0\qquad\forall\gamma>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega\tag{10}$$

则称集合 $\mathscr{D}$ 为后向缓增集.

假设集合 $\mathbb{D}_0$ 与 $\mathbb{D}$ 是包含封闭的. 若集合 $\mathbb{D}$ 满足 $\mathscr{A}\subset\widetilde{\mathscr{A}}$ 且 $\widetilde{\mathscr{A}}\in\mathbb{D}$，有 $\mathscr{A}\in\mathbb{D}$ 成立，则称集合 $\mathbb{D}$ 是包含封闭的.

## 3 解的估计

**引理 1** 若假设(F1),(F2)成立，那么有：

(i) 对任意缓增集 $\mathscr{D}_0\in\mathbb{D}_0$，任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$v_{\tau-t}\in\mathscr{D}_0(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，存在 $T_0=T_0(\mathscr{D}_0,\tau,\omega)\geqslant 1$，使得

$$\sup_{t\geqslant T_0}\|v(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,v_{\tau-t})\|^2\leqslant 1+R_0(\tau,\omega)\tag{11}$$

其中 $R_0(\tau,\omega)$ 是可测函数，定义为

$$R_0(\tau,\omega)=\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\lambda r-2\alpha z(\theta_r\omega)+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+\tau)\|^2\mathrm{d}r\tag{12}$$

(ii) 对任意后向缓增集 $\mathscr{D}\in\mathbb{D}$，任意的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$v_{s-t}\in\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)$，存在 $T=T(\mathscr{D},\tau,\omega)\geqslant 1$，使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sup_{t\geqslant T}\|v(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\|^2\leqslant 1+R(\tau,\omega)\tag{13}$$

其中

$$R(\tau,\omega)=\sup_{s\leqslant\tau}R_0(s,\omega)<+\infty\tag{14}$$

**证** 对任意固定的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$v_{s-t}\in\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)$，令 $v(r)=v(r,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})$，其中 $s\leqslant\tau$. $v(r)$ 与方程(8)作内积可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v(r)\|^2={}&-2\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}(Av,v)+2(\alpha z(\theta_{r-s}\omega)-\lambda)\|v(r)\|^2-2\lambda\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}\|v(r)\|^p+\\&2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}f(\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}v),v)+2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_r\omega)}g,v)\end{aligned}\tag{15}$$

利用(2),(5)式整理(15)式，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v(r)\|^2+2\lambda\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}\|v(r)\|^p+2\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}\|Bv\|_p^p\leqslant\\&\qquad(2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)-2\lambda)\|v\|^2+2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}g,v)\end{aligned}\tag{16}$$

利用 Hölder 不等式及 Young 不等式，有

$$2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}g,v)\leqslant\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s})\omega}\|g(r)\|^2+\lambda\|v(r)\|^2\tag{17}$$

代入(16)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v(r)\|^2+2\lambda\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}\|v(r)\|^p\leqslant(2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)-\lambda)\|v\|^2+\frac{1}{\lambda}\|g(r)\|^2\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\tag{18}$$

对(18) 式利用 Gronwall 不等式，计算可得

$$
\begin{aligned}
\|v(s)\|^2 \leqslant & e^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^{0} z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}\|v_{s-t}\|^2+\frac{1}{\lambda}\int_{s-t}^{s} e^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)+\lambda(r-s)+2\alpha\int_r^s z(\theta_{\sigma-s}\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r)\|^2\mathrm{d}r= \\
& e^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^{0} z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}\|v_{s-t}\|^2+\frac{1}{\lambda}\int_{-t}^{0} e^{-2\alpha z(\theta_r\omega)+\lambda r+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant \\
& e^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^{0} z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}\|v_{s-t}\|^2+\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{-2\alpha z(\theta_r\omega)+\lambda r+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r= \\
& e^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^{0} z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}\|v_{s-t}\|^2+R_0(s,\omega)
\end{aligned}\tag{19}
$$

再由(7) 式、(9) 式可知，存在 $T_0(\mathscr{D}_0,s,\omega)\geqslant 1$，使得当 $t\geqslant T_0$ 时，有

$$
e^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^{0} z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}\|v_{s-t}\|^2\leqslant e^{-\frac{\lambda}{2}t}\|\mathscr{D}_0\|^2\leqslant 1 \tag{20}
$$

因此(11) 式得证.

对(19) 式关于 $s\in(-\infty,\tau]$ 取上确界，由于 $v_{s-t}\in\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)(s\leqslant\tau)$，结合(7) 式、(10) 式可知，存在 $T=T(s,\omega,\mathscr{D})\geqslant 1$，使得当 $t\geqslant T$ 时，有

$$
\sup_{s\leqslant\tau} e^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^{0} z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r}\|v_{s-t}\|^2\leqslant e^{-\frac{\lambda}{2}t}\sup_{s\leqslant\tau}\|\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2\leqslant 1 \tag{21}
$$

因此可以得到

$$
\sup_{s\leqslant\tau}\|v(s)\|^2\leqslant 1+\sup_{s\leqslant\tau}R_0(s,\omega)=1+R(\tau,\omega) \tag{22}
$$

即(13) 式得证.

**引理 2**　若假设(F1),(F2) 成立，则有如下结论：

(i) 协循环 $\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在 $\mathbb{D}_0$-拉回随机吸收集 $\mathscr{K}_0\in\mathbb{D}_0$，其中

$$
\mathscr{K}_0(\tau,\omega)=\{w\in l^2:\|w\|^2\leqslant 1+R_0(\tau,\omega)\}\qquad \forall\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega \tag{23}
$$

(ii) 协循环 $\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在 $\mathbb{D}$-拉回后向一致吸收集 $\mathscr{K}\in\mathbb{D}$，其中

$$
\mathscr{K}(\tau,\omega)=\{w\in l^2:\|w\|^2\leqslant 1+R(\tau,\omega)\}=\overline{\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{K}_0(s,\omega)}\qquad \forall\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega \tag{24}
$$

**证**　由(11) 式可知 $\mathscr{K}_0$ 是吸收集. 又因为函数 $\omega\longrightarrow R_0$ 是随机变量的积分，因此 $R_0(\tau,\omega)$ 是可测的，进而可知 $\mathscr{K}_0$ 也是可测的. 下证 $\mathscr{K}_0\in\mathbb{D}_0$.

首先证明 $R(\tau,\omega)$ 是有限的. 根据(7) 式可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C=C(\varepsilon,\omega)>0$，使得

$$
|z(\theta_r\omega)|+\left|\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant-\varepsilon r+C(\varepsilon,\omega)\qquad\forall r<0 \tag{25}
$$

因此，在(25) 式中令 $\varepsilon<\frac{\lambda}{4\alpha}$，结合(3) 式可得

$$
\begin{aligned}
R(\tau,\omega)=&\sup_{s\leqslant\tau}R_0(s,\omega)= \\
&\frac{1}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r-2\alpha z(\theta_r\omega)+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant \\
&\frac{1}{\lambda}e^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\lambda}{2}r}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r<+\infty
\end{aligned}\tag{26}
$$

再证 $\mathscr{K}\in\mathbb{D}_0$. 令 $\alpha_1=\min\left\{\lambda,\frac{\gamma}{2}\right\}$，在(25) 式中令 $\varepsilon=\frac{\alpha_1}{4\alpha}$，结合(3) 式可知，对任意的 $\gamma\in\mathbb{R}$，有

$$
\begin{aligned}
e^{-\gamma t}R(\tau-t,\theta_{-t}\omega)=&e^{-\gamma t}\sup_{s\leqslant\tau}R_0(s-t,\theta_{-t}\omega)= \\
&\frac{1}{\lambda}e^{-\gamma t}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r-2\alpha z(\theta_{r-t}\omega)+2\alpha\int_r^0 z(\theta_{\sigma-t}\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+s-t)\|^2\mathrm{d}r\leqslant
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha_1 r-2\alpha z(\theta_{r-t}\omega)+2\alpha\int_r^0 z(\theta_{\sigma-t}\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+s-t)\|^2\mathrm{d}r=$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\alpha_1 t}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\alpha_1 r-2\alpha z(\theta_r\omega)+2\alpha\int_r^{-t} z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-(\gamma-\alpha_1)t}\mathrm{e}^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{\alpha_1}{2}r}\|g(r+s)\|^2\mathrm{d}r\to 0 \tag{27}$$

所以 $\mathcal{K}\in\mathbb{D}_0$. 又由于 $\mathcal{K}_0\subset\mathcal{K}$, 因此 $\mathcal{K}_0\in\mathbb{D}_0$.

最后证明 $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$. 根据(24)式, 易知集合 $\mathcal{K}$ 是递增的, 即

$$\mathcal{K}(\tau_1,\omega)\subset\mathcal{K}(\tau_2,\omega)\qquad\forall\,\tau_1<\tau_2$$

因此, 结合 $\mathcal{K}\in\mathbb{D}_0$ 可知, 对任意 $\gamma>0$, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{s\leqslant\tau}\|\mathcal{K}(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\gamma t}\|\mathcal{K}(\tau-t,\theta_{-t}\omega)\|^2=0 \tag{28}$$

即证得 $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$. 再由(13)式可知, $\mathcal{K}$ 在任意集合 $\mathcal{D}\in\mathbb{D}$ 上是后向一致吸收的.

**引理 3** 若假设(F1),(F2)成立, 则对 $\forall\,\varepsilon>0$, $(\tau,\omega,\mathcal{D})\in(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{D})$, $v_{s-t}\in\mathcal{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)$, 存在 $T(\varepsilon,\tau,\omega,\mathcal{D})>0$, $N(\varepsilon,\tau,\omega,\mathcal{D})\geqslant 1$, 使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>N}|v_i(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})|^2<\varepsilon^2\qquad\forall\,t>T$$

**证** 构造光滑函数 $\rho$, 满足 $0\leqslant\rho\leqslant 1$, 且当 $|s|\leqslant 1$ 时, $\rho=0$; 当 $|s|\geqslant 2$ 时, $\rho=1$. 并假设存在常数 $c_0$, 使得对任意 $s\in\mathbb{R}$, 有 $|\rho'(s)|\leqslant c_0$. 令 $N$ 是一个固定的整数, 设

$$x=\left(\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)v_i(r,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\right)_{i\in\mathbb{Z}}$$

$x$ 与(8)式作内积可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)|v_i|^2+2\lambda\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)|v_i|_p^p=$$

$$-2\mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)}(Av,x)-2(\lambda-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)|v_i|^2+$$

$$2\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)f_i(\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}v_i)(\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}v_i)+$$

$$2\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)g_iv_i$$

其中

$$(Av,x)\geqslant\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\rho\left(\frac{|i+1|}{N}\right)-\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)\right)|v_{i+1}-v_i|^{p-2}(v_{i+1}-v_i)v_{i+1} \tag{29}$$

由于 $|\rho'(s)|\leqslant c_0$, 因此

$$\left|\left(\rho\left(\frac{|i+1|}{N}\right)-\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)\right)|v_{i+1}-v_i|^{p-2}(v_{i+1}-v_i)v_{i+1}\right|\leqslant$$

$$\frac{c_0}{N}\sum_i|v_{i+1}-v_i|^{p-1}|v_{i+1}|\leqslant\frac{2^{p-1}c_0}{N}\|v\|_p^p \tag{30}$$

故由(29)式、(30)式可得

$$(Av,x)\geqslant-\frac{2^{p-1}}{N}\|v\|_p^p \tag{31}$$

由假设(F1)可知

$$2\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\sum_i\rho\left(\frac{|i|}{N}\right)f_i(\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}v_i)(\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}v_i)\leqslant 0 \tag{32}$$

由 Young 不等式可知

$$\sum_i \rho\left(\frac{|i|}{N}\right) g_i v_i = \sum_{|i|\geqslant N} \rho\left(\frac{|i|}{N}\right) g_i v_i \leqslant \frac{\lambda}{2}\sum_{|i|\geqslant N} |v_i|^2 + \frac{1}{2\lambda}\sum_{|i|\geqslant N} |g_i|^2 \tag{33}$$

结合(31)－(33)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_i \rho\left(\frac{|i|}{N}\right)|v_i|^2 + (\lambda - 2\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\sum_i \rho\left(\frac{|i|}{N}\right)|v_i|^2 \leqslant$$

$$\frac{2^p c_0}{N} \mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_{r-s}\omega)} \| v \|_p^p + \frac{1}{\lambda}\sum_{|i|\geqslant N} |g_i|^2 \mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)} \tag{34}$$

对(34)式运用 Gronwall 引理，计算整理可得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_i \rho\left(\frac{|i|}{N}\right)|v(s)|^2 \leqslant \sup_{s\leqslant\tau}\|v_0\|^2 \mathrm{e}^{-\lambda t + 2\alpha\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma} +$$

$$\frac{2^p c_0}{N}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_r\omega)+\lambda r+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|v(r+s)\|_p^p \mathrm{d}r +$$

$$\frac{1}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>N}\int_{-t}^0 |g_i(r+s)|^2 \mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)+\lambda r+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}r \tag{35}$$

由于 $v_{s-t}\in\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)(s\leqslant\tau)$，结合(7)，(10)式可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-\lambda t+2\alpha\int_{-t}^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|v_{s-t}\|^2 \leqslant \lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda t}{2}}\|\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2 = 0 \tag{36}$$

在(25)式中令 $\varepsilon < \min\left\{\frac{\lambda}{2\alpha(p-2)}, \frac{\lambda}{4\alpha}\right\}$，由引理 1 与假设(F2)可知，存在 $T>0$，当 $t>T$ 时，有

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{2^p c_0}{N}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{\alpha(p-2)z(\theta_r\omega)+\lambda r+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}\|v(r+s)\|_p^p\mathrm{d}r \leqslant$$

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{2^p c_0}{N}\mathrm{e}^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{\frac{\lambda r}{2}}\|v(r+s)\|_p^p\mathrm{d}r = 0 \tag{37}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>N}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)+\lambda r+2\alpha\int_r^0 z(\theta_\sigma\omega)\mathrm{d}\sigma}|g_i(r+s)|^2\mathrm{d}r \leqslant$$

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{C(\omega)}\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>N}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{\frac{\lambda r}{2}}|g_i(r+s)|^2\mathrm{d}r = 0 \tag{38}$$

因此，结合(36)－(38)式可得，对任意的 $\varepsilon>0$，$(\tau,\omega,\mathscr{D})\in(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{D})$，$v_{s-t}\in\mathscr{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)$，存在 $T(\varepsilon,\tau,\omega,\mathscr{D})>0$，$N(\varepsilon,\tau,\omega,\mathscr{D})\geqslant 1$，使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|>N}|v_i(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})|^2 < \varepsilon^2 \qquad \forall t>T$$

**引理 4**　若假设(F1)，(F2)成立，则协循环 $\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在吸收集 $\mathscr{K}\in\mathscr{D}$ 上是后向渐近紧的.

**证**　对任意固定的 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，取任意序列 $\{\tau_k\}\leqslant\tau$，$\{t_k\}\to+\infty(k\to+\infty)$，及任意的 $v_0\in\mathscr{K}(\tau_k-t_k,\theta_{-t_k}\omega)$. 定义 $v_k=\Phi(t_k,\tau_k-t_k,\theta_{-t_k}\omega,v_0)=v(\tau_k,\tau_k-t_k,\theta_{-\tau_k}\omega,v_0)$，下证 $\{v_k: k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\ell^2$ 中是预紧的.

由引理 1 可知 $\{v_k\}$ 在 $\ell^2$ 中有界，故存在 $\tilde{v}\in\ell^2$，使得

$$v_k \rightharpoonup \tilde{v}\in\ell^2 \tag{39}$$

下面只需证明该弱收敛实际上是强收敛，即只需证明：

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T>0$ 和 $K\geqslant 1$，使得当 $k>K$ 时，有

$$\|v_k-\tilde{v}\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \qquad \forall t_k>T \tag{40}$$

注意到

$$\|v_k-\tilde{v}\|^2 = \sum_{|i|>K}|v_{k,i}-\tilde{v}_i|^2 + \sum_{|i|\leqslant K}|v_{k,i}-\tilde{v}_i|^2 \leqslant$$

$$2\sum_{|i|>K}|v_{k,i}|^2+\sum_{|i|\leqslant K}|v_{k,i}-\tilde{v}_i|^2 \tag{41}$$

一方面，由引理3可知，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T_1>0$，$N_1,K_1\geqslant 1$，使得当 $k>K_1$ 时，有

$$\sum_{|i|>N_1}|v_{k,i}|^2<\frac{\varepsilon^2}{2} \qquad \forall\, t_k>T_1 \tag{42}$$

另一方面，由于在 $l^2$ 中，有 $v_k \rightharpoonup \tilde{v}$，因此，当 $|i|\leqslant N$ 时，在 $\mathbb{R}^{2N+1}$ 中有 $v_k\to\tilde{v}$. 故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T_2>0$，$N_2,K_2\geqslant 1$，使得当 $k>K_2$ 时，有

$$\sum_{|i|\leqslant N_2}|v_{k,i}-\tilde{v}_i|^2<\varepsilon^2 \qquad \forall\, t_k>T_2 \tag{43}$$

由(42)－(44)式可知，令

$$\overline{T}=\max\{T_1,\ T_2\} \qquad \overline{K}=\max\{K_1,\ K_2\} \qquad N=\max\{N_1,\ N_2\}$$

则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T\geqslant\overline{T}$ 和 $K\geqslant\overline{K}$，使得当 $k>K$ 时，有

$$\|v_k-\tilde{v}\|^2\leqslant\varepsilon^2 \qquad \forall\, t_k>T$$

即证得协循环 $\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在吸收集 $K$ 上是后向渐近紧的.

## 4 后向紧随机吸引子

**定理1** 若假设(F1),(F2)成立，则方程(1)生成的动力系统存在后向紧随机吸引子.

**证** 引理2和引理4的结论满足了文献[11]的定理3.9中拉回吸引子的存在性条件，因此方程(8)生成的非自治随机动力系统 $\Phi(t)$ 存在唯一的后向紧 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$，和唯一的可测 $\mathscr{D}_0$-拉回吸引子 $\mathscr{A}_0\in\mathscr{D}_0$. 再由文献[9]的定理6.1知 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$，故吸引子 $\mathscr{A}$ 也是随机的，即 $\Phi(t)$ 存在唯一的后向紧 $\mathscr{D}$-拉回随机吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$. 再由文献[12-13]知方程(1)与方程(8)生成的随机动力系统共轭，进而可知方程(1)存在后向紧随机吸引子.

**参考文献：**


[1] LI Y R, WANG R H, YIN J Y. Backward Compact Attractors for Non-Autonomous Benjamin-Bona-Mahony Equations on Unbounded Channels [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems(Series B), 2017, 22(7): 2569-2586.

[2] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 253(5): 1544-1583.

[3] WANG J H, GU A H. Existence of Backwards-Compact Pullback Attractors for Non-Autonomous Lattice Dynamical Systems [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2016, 22(12): 1906-1911.

[4] WANG B X. Asymptotic Behavior of Non-Autonomous Lattice Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331(1): 121-136.

[5] 王凤玲，吴柯楠，李扬荣. 非线性随机 Ginzburg-Landau 方程的 Wong-Zakai 逼近 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(9): 87-92.

[6] 吴柯楠，王凤玲，李扬荣. 非自治随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程的 Wong-Zakai 逼近 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(1): 31-36.

[7] GU A H, KLOEDEN P E. Asymptotic Behavior of a Nonautonomous $p$-Laplacian Lattice System [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2016, 26(10): 1650174.

[8] GU A H, LI Y R. Dynamic Behavior of Stochastic $p$-Laplacian-Type Lattice Equations [J]. Stochastics and Dynamics, 2017, 17(5): 1750040.

[9] DAMASCELLI L. Comparison Theorems for Some Quasilinear Degenerate Elliptic Operators and Applications to Symmetry and Monotonicity Results [J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré (Analyse Linéaire), 1998, 15(4): 493-516.

[10] BATES P W, LISEI H, LU K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems [J]. Stochastics and Dynamics,

2006，6(1)：1-21.

[11] WANG S L，LI Y R. Longtime Robustness of Pullback Random Attractors for Stochastic Magneto-Hydrodynamics Equations [J]. Physica D-Nonlinear Phenomena，2018，382：46-57.

[12] CARABALLO T，LU K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems with a Multiplicative Noise [J]. Frontiers of Mathematics in China，2008，3(3)：317-335.

[13] DUAN J Q，LU K N，SCHMALFUSS B. Invariant Manifolds for Stochastic Partial Differential Equations [J]. The Annals of Probability，2003，31(4)：2109-2135.

# Backward Compact Random Attractors for Non-Autonomous Stochastic $p$-Laplacian-Type Lattice Equation

SONG Li，LI Yang-rong

*School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China*

**Abstract**：When the external force is backward tempered，it is proved that the nonautonomous random $p$-Laplacian lattice equation has a backward uniform absorbing set on the space $\ell^2$ and the equation is backward asymptotically compact on the absorbing set by estimating the solution. By using the existence theorem of the attractor，it is proved that the nonautonomous random $p$-Laplacian lattice equation has a backward compact random attractor on the space $\ell^2$.

**Key words**：random dynamical system；non-autonomous $p$-Laplacian lattice equation；backward compact random attractor

责任编辑　廖　坤