DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.05.012

具有非线性扩散的趋化模型弱解的有界性

张婕燕[1]， 辛 巧[1]， 穆春来[2]

1. 伊犁师范大学 数学与统计学院，新疆 伊宁 835000；2. 重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要：研究间接信号产出的非线性扩散-趋化聚集模型，并给出具有非负且适当光滑的初值条件和相应的扩散系数. 通过能量估计方法，证明生物趋化模型弱解的全局有界性及唯一性.

关 键 词：Keller-Segel 模型；趋化；间接信号产出；全局有界性；唯一性

中图分类号：O175.26 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2021)05-0088-08

趋化行为是细胞沿化学物质浓度高的方向作的一种定向运动，其研究在胚胎发育、血管生成及种群动力学行为等方面具有重要意义. 文献[1]建立了经典的生物趋化模型，主要用于刻画细胞对趋化—交叉扩散产生的奇异性反应的集体行为. 在过去的几十年中，经典的 Keller-Segel 模型解的存在性、唯一性、爆破行为及渐近行为等问题的研究得到了越来越多学者的关注，取得了大量的研究成果[2-6]. 最简单的 Keller-Segel 模型(记作 KS 模型)如下：

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\nabla(u\nabla v) & x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t=\Delta v-v+u & x\in\Omega,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}=\dfrac{\partial v}{\partial \upsilon}=0 & x\in\partial\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

KS 模型解的性质(全局有界性或爆破行为)强依赖于空间维数：在空间维数 $d=1$ 时，文献[6]证明了 KS 模型解的全局有界性；在空间维数 $d=2$ 时，文献[7-9]证明了存在临界指数现象，若细胞的初始质量 $\int_\Omega u(x,0)\mathrm{d}x<4\pi$，则 KS 模型的解全局有界，若 $\int_\Omega u(x,0)\mathrm{d}x>4\pi$，则 KS 模型存在解在有限时间爆破；在空间维数 $d\geqslant 3$ 时，文献[10]证明了当初值 $\|u_0\|_{L^{\frac{2}{d}}}$ 足够小时，KS 模型的解全局有界，$\|u_0\|_{L^{\frac{2}{d}}}$ 足够大时，解在有限时间内爆破. 事实上，关于 KS 模型的研究到目前为止并不完善，还有很多需要解决的问题. 考虑到 KS 模型的临界指数现象，文献[11]考虑具有非线性扩散的 KS 模型($d\geqslant 2$)，在扩散函数足够大时，证明了生物趋化系统弱解的全局有界性，其研究的非线性扩散的生物趋化模型如下：

$$\begin{cases} u_t=\nabla(D(u)\nabla u)-\nabla(u\nabla v) & x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t=\Delta v-v+u & x\in\Omega,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}=\dfrac{\partial v}{\partial \upsilon}=0 & x\in\partial\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x) & x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

KS 模型中的化学物质由细胞直接产生，不同于该化学物质产生模式，文献[12]提出间接信号产出的

收稿日期：2019-05-28

基金项目：新疆维吾尔自治区自然科学基金面上项目(2018D01C004).

作者简介：张婕燕，硕士研究生，主要从事偏微分方程研究.

生物趋化模型，用于刻画山松甲壳虫的扩散和聚集行为. 关于间接信号产生的生物趋化模型，主要集中研究带有 Logistic 源的情形，具体结果可以参考文献[13-15]. 特别需要提到的是，文献[15] 考虑具有拟线性扩散的生物模型，其研究的拟线性扩散的生物趋化模型如下[15]：

$$\begin{cases} u_t = \nabla(D(u)\nabla u) - \nabla(u\nabla v) + \mu u(1-u) & x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t = \Delta v - v + w & x\in\Omega,\ t>0 \\ \tau w_t + \delta w = u & x\in\Omega,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \dfrac{\partial v}{\partial \upsilon} = 0 & x\in\partial\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ \tau w(x,0)=\tau w_0(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

文献[15] 证明了当 $d\geqslant 3$，$\mu>0$，$\delta>0$ 和 $\tau>0$ 且 $p>1-\dfrac{4}{d}$ 时，生物趋化模型整体解的一致有界性. 在上述研究的启发下，本文主要研究如下具有非线性扩散的间接信号产生的生物趋化模型(不带有 Logistic 源)：

$$\begin{cases} u_t = \nabla(D(u)\nabla u) - \nabla(u\nabla v) & x\in\Omega,\ t>0 \\ v_t = \Delta v - v + w & x\in\Omega,\ t>0 \\ w_t = u - w & x\in\Omega,\ t>0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \dfrac{\partial v}{\partial \upsilon} = 0 & x\in\partial\Omega,\ t>0 \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ w(x,0)=w_0(x) & x\in\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^d$(空间维数 $d\geqslant 2$) 表示光滑有界区域，υ 表示边界 $\partial\Omega$ 单位外法线方向；初值条件(u_0，v_0，w_0) 满足 $u_0\neq 0$，非负且适当光滑；扩散系数 $D(u)\geqslant D_0u^p$ 且 $p>2-\dfrac{4}{d}$，$D_0>0$；$u(x,t)$ 表示飞行的甲壳虫的密度，$v(x,t)$ 表示甲壳虫信息素的浓度，$w(x,t)$ 表示筑巢的甲壳虫密度，不同于经典的 KS 模型，甲虫信息素是由筑巢的甲壳虫产生，致使飞行中的甲壳虫产生趋化行为，该甲虫信息素对筑巢的甲壳虫无任何作用. 本文通过类似于文献[11] 中的方法来考虑不带有 Logistic 源的情形，主要得到以下结论：

定理 1　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$(空间维数 $d\geqslant 2$) 为具有 C^2 边界的有界开区域，初值条件 $u_0\in W^{1,\bar{p}}(\Omega)$，$v_0\in W^{1,\infty}(\Omega)$ 和 $w_0\in L^\infty(\Omega)$，其中 $\bar{p}>d$. 扩散系数 $D(u)$ 为具有 C^2 光滑性的非减函数，且对任意的 $u\geqslant 0$，有 $D(u)\geqslant D_0u^p$，其中 $D_0>0$，$p>2-\dfrac{4}{d}$. 那么，生物趋化模型(2) 存在非负弱解(u，v，w) 且一致有界.

注 1　关于生物趋化模型(2) 的弱解的定义可参考文献[11] 中定义 1 类似定义，本文略.

注 2　当山松甲壳虫的随机布朗运动足够强烈时，即山松甲壳虫的扩散强度超过甲虫信息素对其的趋化吸引作用，那么这个松林中山松甲壳虫不会存在大量聚集现象，不会对加拿大短叶松等松林造成了巨大的破坏. 如何增大山松甲壳虫的扩散运动，可能对于未来松林的保护具有重要的意义.

定理 2　设 $D(u)$ 是具有 C^2 光滑的非减函数，趋化模型(2) 存在弱解且 $v\in L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))$，则趋化模型(2) 的解必唯一.

1　趋化系统解的 L^∞ 估计

引理 1[16]　设 $v_0\in W^{1,\infty}$，对所有 $t\in(0,T)$，都有 $\|w(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C$，那么对任意 $t\in(0,T)$ 和 $q\in[1,d)$ 可得

$$\|v(t)\|_{W^{1,s}}\leqslant C \tag{3}$$

其中

$$s<\frac{dq}{d-q} \tag{4}$$

若 $q=d$，则对于任意的 $s<+\infty$，都有(3) 式成立；若 $q>d$，则有 $\|v(t)\|_{W^{1,\infty}}\leqslant C$.

此外，考虑到扩散系数 $D(u)$ 可能具有奇异性，先考虑其正则性的趋化模型：

$$\begin{cases}u_t=\nabla(D_\sigma(u)\nabla u)-\nabla(u\nabla v) & x\in\Omega,\ t>0\\ v_t=\Delta v-v+w & x\in\Omega,\ t>0\\ w_t=u-w & x\in\Omega,\ t>0\\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}=\dfrac{\partial v}{\partial \upsilon}=0 & x\in\partial\Omega,\ t>0\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ w(x,0)=w_0(x) & x\in\Omega\end{cases}\tag{5}$$

其中 $D_\sigma(u)=D(u+\sigma)$ 且 $\sigma>0$，利用文献[17] 中 Amann 理论容易证明其局部适定性. 接下来，先证明趋化系统(5) 的解的全局适定性，主要有如下引理.

引理 2 设 $d\geqslant 2$，$p>2-\dfrac{4}{d}$，若对 $\forall\, t\in(0,T)$，有

$$\|u(t)\|_{L^{q_0}}\leqslant C$$

其中 $q_0\in\left[\max(1,p),\min\left(p+\dfrac{2}{d},d\right)\right]$ 和 C 是常数，则有

(i) $\|w(t)\|_{L^{q_0}}\leqslant C$ 和 $\|\nabla v(t)\|_{L^{s_0}}\leqslant C$，其中 $s_0<\dfrac{dq_0}{d-q_0}$.

(ii) 若 $d>2$ 且 $p<d-2$，则对于任意的 $q<\dfrac{d}{d-2}p$，都有 $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(q)$.

(iii) 若 $d=2$ 或 $p>d-2$，则对于任意的 $q<\infty$，都有 $\|u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(q)$.

证 (i) 对趋化模型(5) 的第三个方程两边同乘 w^{q_0-1}，然后在 Ω 上积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^{q_0}\mathrm{d}x=-q_0\int_\Omega w^{q_0}\mathrm{d}x+q_0\int_\Omega w^{q_0-1}u\,\mathrm{d}x\tag{6}$$

进一步，对(6) 式的右端的最后一项用 Young 不等式可得

$$q_0\int_\Omega w^{q_0-1}u\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{q_0}{4}\int_\Omega w^{q_0}\mathrm{d}x+\frac{(4q_0-4)^{q_0-1}}{q_0^{q_0-1}}\int_\Omega u^{q_0}\mathrm{d}x\tag{7}$$

因为 u 的 L^{q_0} 范数有界，则联合(6) 和(7) 式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^{q_0}\mathrm{d}x+\frac{3q_0}{4}\int_\Omega w^{q_0}\mathrm{d}x\leqslant C\tag{8}$$

其中 C 是常数，即可知

$$\|w(t)\|_{L^{q_0}}\leqslant C$$

最后，利用引理 1 可知 $\|\nabla v(t)\|_{L^{s_0}}\leqslant C$ 成立.

(ii) 对于任意的 $q>q_0$，设 $u_\varepsilon=u+\varepsilon$，其中 $\varepsilon\in(0,\sigma]$，对趋化模型(5) 的第一个方程两边同乘 u_ε^{q-1}，然后在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x+(q-1)\int_\Omega D_\sigma(u)u_\varepsilon^{q-2}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x=$$
$$(q-1)\int_\Omega u_\varepsilon^{q-1}\nabla u_\varepsilon\nabla v\,\mathrm{d}x-\varepsilon(q-1)\int_\Omega u_\varepsilon^{q-2}\nabla u_\varepsilon\nabla v\,\mathrm{d}x$$

因为

$$D_\sigma(u)=D(u+\sigma)\geqslant D_0(u+\sigma)^p\geqslant D_0u_\varepsilon^p$$

那么由 Young 不等式可知

$$(q-1)\int_\Omega u_\varepsilon^{q-1}\nabla u_\varepsilon\nabla v\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{D_0(q-1)}{4}\int_\Omega u_\varepsilon^{p+q-2}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x+C\int_\Omega u_\varepsilon^{q-p}|\nabla v|^2\mathrm{d}x$$

和

$$-\varepsilon(q-1)\int_\Omega u_\varepsilon^{q-2}\nabla u_\varepsilon\nabla v\mathrm{d}x\leqslant\frac{D_0(q-1)}{4}\int_\Omega u_\varepsilon^{p+q-2}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x+C\int_\Omega\varepsilon^2u_\varepsilon^{q-p-2}|\nabla v|^2\mathrm{d}x$$

另一方面，对于 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon^2u_\varepsilon^{q-p-2}\leqslant u_\varepsilon^{q-p}$$

进而可知

$$\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x+\frac{D_0(q-1)}{2}\int_\Omega u_\varepsilon^{p+q-2}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega u_\varepsilon^{q-p}|\nabla v|^2\mathrm{d}x$$

现在，令 $g=u_\varepsilon^{\frac{p+q}{2}}$，则有

$$\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x+\frac{2D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega u_\varepsilon^{q-p}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\tag{9}$$

首先假设 $q<p+q_0$，则对(9) 式右边的积分用 Hölder 不等式可知

$$\int_\Omega u_\varepsilon^{q-p}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\leqslant C\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{q_0}\right)^{\frac{q-p}{q_0}}\left(\int_\Omega|\nabla v|^{\frac{2q_0}{p-q+q_0}}\right)^{\frac{q_0-q+p}{q_0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}x\tag{10}$$

进一步，取 $q_0<q<p+\frac{2}{d}q_0$，$1\leqslant s<\min\left(\frac{dq_0}{d-q_0},\frac{2q_0}{p-q+q_0}\right)$，因为 $d\geqslant 3$，可设 $s<\frac{2d}{d-2}$. 又因为 $\|\nabla v\|_{L^s(\Omega)}\leqslant C$，则由 Gagliardo-Nirenberg 不等式可知

$$\int_\Omega u_\varepsilon^{q-p}|\nabla v|^2\mathrm{d}x\leqslant C_1\|\nabla v\|^2_{L^{\frac{2q_0}{p-q+q_0}}(\Omega)}\leqslant C_2\|\nabla v\|^{2b}_{W^{1,2}(\Omega)}\|\nabla v\|^{2(1-b)}_{L^s(\Omega)}\leqslant C_3\|\nabla v\|^{2b}_{W^{1,2}(\Omega)}$$

其中 $b\in(0,1)$. 由于 $-\Delta$ 是 D 到 $L^2(\Omega)$ 的同构映射(证明见文献[16])，其中

$$D:=\left\{\varphi\in W^{2,2}(\Omega):\frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon}=0\text{ 且}\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x=0\right\}$$

那么，由 Young 不等式可知

$$C\|\nabla v\|^{2b}_{W^{1,2}(\Omega)}\leqslant C_1\|\Delta v\|^{2b}_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}+C$$

整理可得

$$\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x+\frac{2D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+C\tag{11}$$

其中 C 是常数.

接下来，对趋化系统(5) 的第二个方程两边同乘 $-\Delta v$，然后在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x=-\int_\Omega w\Delta v\mathrm{d}x$$

由 Young 不等式可知

$$-\int_\Omega w\Delta v\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x$$

最后，整理可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x\tag{12}$$

对趋化模型(5) 的第三个方程两边同乘 w，然后在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\int_\Omega w^2\mathrm{d}x=\int_\Omega uw\mathrm{d}x$$

由 Young 不等式可得

$$\int_\Omega uw\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$$

整理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\frac{3}{4}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x \tag{13}$$

联合不等式(11)—(13)可知

$$\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{4}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x+\frac{2D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x+C \tag{14}$$

接下来，关键之处在于处理$\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x$. 下面分为两种情况进行讨论：

1) 在 $p+q>2$ 时，由 Poincare 不等式得

$$\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x=\int_\Omega g^{\frac{4}{p+q}}\mathrm{d}x\leqslant\lambda\int_\Omega g^2\mathrm{d}x+C_1(\lambda)\leqslant C_2\lambda\int_\Omega|g|^2\mathrm{d}x+C_3\leqslant\frac{D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x+C_3$$

2) 若 $p+q\leqslant 2$，选取 $n\in\left(\frac{2d}{p+q}-d,\ \min\left(\frac{2q_0}{p+q},\ \frac{4}{p+q}\right)\right)$. 因为 $d\geqslant 3$，可设 $n<\frac{2d}{d-2}$. 则由 Gagliardo-Nirenberg 不等式可知

$$C\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x=C\|g\|_{L^{\frac{4}{p+q}}}^{\frac{4}{p+q}}\leqslant C_1\|g\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{\frac{4a}{p+q}}\cdot\|g\|_{L^n(\Omega)}^{\frac{4(1-a)}{p+q}}$$

其中 $a=\dfrac{\frac{d}{n}-\frac{d(p+q)}{4}}{1-\frac{d}{2}+\frac{d}{n}}<\dfrac{p+q}{2}$ 等价于 $n>\dfrac{2d}{p+q}-d$.

进一步，因为 $\|g\|_{L^n(\Omega)}$ 有界和$\frac{4a}{p+q}<2$，则由 Poincare 不等式可得

$$C\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x+C_4$$

综上所述可得

$$C\int_\Omega u_\varepsilon^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x+C_4 \tag{15}$$

现在，联合不等式(14)和(15)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{q}u_\varepsilon^q+\frac{1}{2}|\nabla v|^2+\frac{1}{2}w^2\right)\mathrm{d}x+\frac{D_0(q-1)}{(p+q)^2}\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{1}{4}\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\Omega w^2\mathrm{d}x\leqslant C(q)$$

其中 $C(q)$ 表示仅依赖于 q 的常数. 此外，还有

$$\int_\Omega|\nabla g|^2\mathrm{d}x\geqslant C_1\left(\int_\Omega g^2\mathrm{d}x-1\right)=C_1\left(\int_\Omega u_\varepsilon^{p+q}\mathrm{d}x-1\right)\geqslant C_1\int_\Omega u_\varepsilon^q\mathrm{d}x-C_2 \tag{16}$$

和

$$\int_\Omega|\Delta v|^2\mathrm{d}x\geqslant C_3\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x$$

这样就可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(\frac{1}{q}u_\varepsilon^q+\frac{1}{2}|\nabla v|^2+\frac{1}{2}w^2\right)\mathrm{d}x+\overline{C}\int_\Omega\left(\frac{1}{q}u_\varepsilon^q+\frac{1}{2}|\nabla v|^2+\frac{1}{2}w^2\right)\mathrm{d}x\leqslant\hat{C}$$

其中 $\overline{C}$ 和 $\hat{C}$ 是常数. 那么，对所有的 $t\in(0,T)$，由 Gronwall 不等式可知

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(q) \tag{17}$$

其中 C 表示仅依赖于 q 的常数与时间无关.

综合上述过程，在 $q_0\in\left[\max(1,\ p),\ \min\left(p+\frac{2}{d},\ d\right)\right]$ 和 $p>2-\frac{4}{d}$ 满足时，则对

$$q_1 = q \in \left(q_0,\ p + q_0 \frac{2}{d}\right)$$

可知(17)式成立.

当 $q_1 \geqslant d$，则由引理 1 可知，对于任意的 $l < +\infty$，都有 $\|\nabla v(t)\|_{L^l} \leqslant C$，易知(9)式右边有界和(16)式成立，那么对所有的 $q = q_2 < p + q_1$，亦可知(16)式成立. 然后，用 q_2 替换(10)中的 q_0，对所有的 $q < 2p + q_1$，都有(17)式成立. 重复上述过程 k 次，可知对于任意大的 k，对所有的 $q < kp + q_1$，使得(17)式成立. 因此，若 $q_1 \geqslant d$，对所有的 $q < +\infty$，可得(17)式成立.

如果 $q_1 < d$，用 q_1 替换(10)中 q_0，则有 $q_2 \in \left(q_1,\ p + q_1 \frac{2}{d}\right)$ 都有(17)式成立，依次类推，可知对所有 $q_k \in \left(q_{k-1},\ p + q_{k-1} \frac{2}{d}\right)$，可得(17)式成立. 最后，若存在某个 k 使得 $q_k \geqslant d$，那么根据上述证明可知，对所有的 $q < +\infty$，有(17)式成立. 如若不然，则对所有 k 都有 $q_k < d$ 成立. 则序列 $\{q_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 必存在上极限 $\bar{q} = \dfrac{dp}{d-2}(d \geqslant 3)$. 因此，对每个 $\bar{q} < d$ 都有(17)式成立. 因为 $\bar{q} < d$，所以 $p < d - 2$.

(iii) 从上述证明可知，若 $d = 2$ 或 $p > d - 2$，对所有的 $q < +\infty$，可得(17)式成立.

接下来，可以利用文献[11]引理 3 证明得到引理 3，利用文献[18]引理 4.1 证明得到引理 4.

引理 3[11]　假设定理 1 中所有条件成立，则

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C \tag{18}$$

引理 4[18]　设 $\Omega \subset R^d(d \geqslant 1)$ 是具有 C^1 边界的有界的开区域，假设 $m > 0$，$u_m > 0$，对 $\forall u \geqslant u_m$，使得 $D(u) \geqslant m$. 如果 $0 < t < T$，$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_1$，对 $0 < t < T$，可得

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_2 \qquad \|w(t)\|_{L^\infty} \leqslant C_3 \tag{19}$$

其中 C_1，C_2 和 C_3 都是正数.

最后，类似于文献[11]的证明方法，由 σ 的任意性，可知解的收敛性. 此外，上述推导出的所有估计值均不依赖于 T，因此趋化系统(2)弱解有界性是全局的，可知定理 1 成立.

2　解的唯一性

本节利用能量方法来证明定理 2 即生物趋化模型(2)解的唯一性，主要证明过程如下.

定理 2 证明　设方程(2)有两个满足初边值条件的解 (u_1, v_1, w_1) 和 (u_2, v_2, w_2)，现令 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2)$ 和 ψ 满足

$$\begin{cases} -\Delta\psi(t) = \bar{u}(t) \\ \nabla\psi(t) = 0 & t \in \partial\Omega \end{cases} \tag{20}$$

则可知

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \Delta(X(u_1) - X(u_2)) - \nabla(u_1 \nabla\bar{v} + \bar{u}\nabla v_2) & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \bar{v}_t = \Delta\bar{v} - \bar{v} + \bar{w} & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \bar{w}_t = \bar{u} - \bar{w} & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\upsilon} = \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\upsilon} = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ \bar{u}(0, x) = 0,\ \bar{v}(0, x) = 0,\ \bar{w}(0, x) = 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{21}$$

其中 $X'(\bar{u}) = D(\bar{u})$. 对模型(21)的前两个方程分别乘 ψ，$\bar{v}$ 并在 Ω_T 上积分得

$$\int_{\Omega_T}(\bar{u}_t\psi + \bar{v}_t\bar{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\Omega_T}(X(u_1) - X(u_2))\Delta\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\Omega_T} u_1\nabla\bar{v}\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\Omega_T}\bar{u}\nabla v_2\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{\Omega_T}(\Delta\bar{v}\,\bar{v} + \bar{w}\,\bar{v} - \bar{v}\,\bar{v})\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{22}$$

进而可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_T}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}(X(u_1)-X(u_2))(u_1-u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\int_{\Omega_T}u_1\nabla\bar{v}\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}\bar{u}\nabla v_2\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{23}$$

接下来，对(23)的右边用 Cauchy 不等式得

$$\int_{\Omega_T}u_1\nabla\bar{v}\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\|\bar{u}\|_{L^\infty(\Omega_T)}\int_{\Omega_T}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

和

$$\int_{\Omega_T}\bar{u}\nabla v_2\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\|v_2\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}\int_{\Omega_T}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

此外可知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_T}\bar{v}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}\bar{v}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}|\nabla\bar{v}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\Omega_T}\bar{w}\,\bar{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

其中

$$\bar{w}(x,t)=\bar{w}_0\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\bar{u}(x,\tau)\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau$$

进一步由方程(20)可知 $\|\nabla\psi(0)\|_{L^2(\Omega)}=0$. 进而可得：

$$\int_{\Omega_T}\bar{w}\,\bar{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\Omega_T}\int_0^t\bar{u}(x,\tau)\bar{v}(x,t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\Omega_T}\int_0^t\nabla\psi(x,\tau)\nabla\bar{v}(x,t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^t\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla\psi(\tau)|^2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla\bar{v}(t)|^2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla\bar{v}(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}|\nabla\psi(\tau)|^2\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\mathrm{e}^{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\psi(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_T}|\nabla\bar{v}(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}|\nabla\psi(t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

最后可得

$$\int_{\Omega_T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\nabla\psi|^2+\bar{v}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\left(\int_{\Omega_T}|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega_T}\bar{v}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \tag{24}$$

其中 C 是常数. 因此，方程(24)等价于

$$\int_{\Omega}(|\nabla\psi|^2+\bar{v}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C\int_{\Omega_T}(|\nabla\psi|^2+\bar{v}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

则由 Gronwall's 不等式可知，对所有 $t\in(0,T)$ 且 $T>0$，$\psi(t)=\bar{u}(t)=\bar{v}(t)=0$，进而有 $\bar{w}(t)=0$，即唯一性得证.

参考文献：

[1] KELLER E F, SEGEL L A. Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed asan Instability [J]. Journal of Theoretical Biology, 1970, 26(3): 399-415.

[2] PAINTER K J, HILLEN T. Volume-Filling and Quorum-Sensing in Models for Chemosensitive Movement [J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2002, 10(4): 501-543.

[3] 张 颖，赵志新，张优佳，等. 一类拟线性抛物-椭圆趋化增长系统解的全局有界性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(1): 34-39.

[4] CIEŚLAK T. Global Existence of Solutions to a Chemotaxis System with Volume Filling Effect [J]. Colloquium Mathematicum, 2008, 111(1): 117-134.

[5] LIUD M, TAO Y S. Global Boundedness in a Fully Parabolic Attraction-Repulsion Chemotaxis Model [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(12): 2537-2546.

[6] OSAKI K, YAGI A. Finite Dimensional Attractors for One-Dimensional Keller-Segel Equations [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 2001, 44(3): 441-469.

[7] NAGAI T. Blow-up of Radially Symmtetric Solutions to a Chemotaxis Systems [J]. Advances in Applied Mathematics, 1995, 5(2): 581-601.

[8] NAGAI T. Blowup of Nonradial Solutions to Parabolic - Elliptic Systems Modeling Chemotaxis in Two-Dimensional Domains [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2001, 2001(1): 970292.

[9] NAGAI T, SENBA T, YOSHIDA K. Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1997, 40(3): 411-433.

[10] CORRIAS L, PERTHAME B, ZAAG H. Global Solutions ofsome Chemotaxis and Angiogenesis Systems in High Space Dimensions [J]. Milan Journal of Mathematics, 2004, 72(1): 1-28.

[11] KOWALCZYK R, SZYMAŃSKA Z. On the Global Existence of Solutions to an Aggregation Model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 343(1): 379-398.

[12] STROHM S, TYSON R C, POWELL J A. Pattern Formation in a Model for Mountain Pine Beetle Dispersal: Linking Model Predictions to Data [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2013, 75(10): 1778-1797.

[13] 王笑丹，陶有山．具间接信号产出的二维趋向性模型古典解的整体存在性和有界性 [J]．东华大学学报(自然科学版)，2016，42(6)：922-930.

[14] TELLO J I, WINKLER M. A Chemotaxis System with Logistic Source [J]. Communications in Partial Differential Equations, 2007, 32(6): 849-877.

[15] QIUS Y, MU C L, WANG L C. Boundedness in the Higher-Dimensional Quasilinear Chemotaxis-Growth System with Indirect Attractant Production [J]. Computers & Mathematics With Applications, 2018, 75(9): 3213-3223.

[16] HORSTMANN D, WINKLER M. BoundednessVs. Blow-up in a Chemotaxis System [J]. Journal of Differential Equations, 2005, 215(1): 52-107.

[17] LAURENCOT P, WRZOSEK D. A Chemotaxis Model with Threshold Density and Degenerate Diffusion [M] // CHIPOT M, ESCHER J. Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems. Berlin: Birkhäuser Basel, 2006.

[18] KOWALCZYK R. Preventing Blow-up in a Chemotaxis Model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 305(2): 566-588.

Boundedness of the Weak Solutions to the Chemotaxis Model with Nonlinear Diffusion

ZHANG Jie-yan[1], XIN Qiao[1], MU Chun-lai[2]

1. *College of Mathematics and Statistics, Xinjiang Yili Normal Unviersity, Yining Xinjiang 835000, China;*
2. *College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China*

Abstract: This paper deals with the nonlinear diffusion-chemotaxis aggregation model with indirect signal production, and gives the nonnegative and suitably smooth initial data and the corresponding diffusion function. The global boundedness and uniqueness of the weak solution of the chemotaxis model are proved with the energy estimation method.

Key words: Keller-Segel model; chemotaxis; indirect signal production; global boundedness; uniqueness

责任编辑　张　枸