DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.06.010

半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群

袁　月，　赵　平

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：设 $\mathscr{T}_n$ 是有限集 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的全变换半群. 对 $1\leqslant m\leqslant n-1$，记 $X_m=\{1,2,\cdots,m\}$ 且 $X_{n-m}=X_n\backslash X_m$. 令

$$\mathscr{T}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathscr{T}_n: X_m\alpha=X_m\}$$
$$\mathscr{H}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathscr{T}_{(n,m)}: X_{n-m}\alpha\subseteq X_{n-m}\}$$

则 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 和 $\mathscr{T}_{(n,m)}$ 都是全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的子半群，且 $\mathscr{H}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}_{(n,m)}$. 设 $\mathscr{T}$是半群 $\mathscr{S}$的子半群，如果对任意 $\alpha\in\mathscr{S}$，$n\in\mathbb{N}_+$，由 $\alpha^n\in\mathscr{T}$可推出 $\alpha\in\mathscr{T}$，则称 $\mathscr{T}$为 $\mathscr{S}$的独立子半群. 考虑半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群 $\mathscr{T}$，由于独立子半群 $\mathscr{T}$可表示为一些包含幂等元的子集的并集，通过分析 $\mathscr{T}$的幂等元集 $E(\mathscr{T})$ 与半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 中元素的关系，根据其定义及半群的封闭性进行构造，对幂等元及幂等元的生成元作运算，发现：若 $\mathscr{T}$包含 $\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$ 中的某些幂等元，则可推出奇异变换半群 $\mathrm{Sing}_{(n,m)}$ 必被包含于 $\mathscr{T}$的结论；若 $\mathscr{T}$包含 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的顶端 $\mathscr{G}_{(n,m)}$ 的某些元素，可推出 $\mathscr{G}_{(n,m)}$ 必被包含于 $\mathscr{T}$的结论. 由此，对 $E(\mathscr{T})$ 分情况讨论，通过所得结论推出独立子半群的结构特征，进而获得 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群的完全分类.

关　键　词：全变换半群；幂等元；独立子半群

中图分类号：O152.7　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2021)06-0074-08

设 $\mathscr{S}_n$ 和 $\mathscr{T}_n$ 分别是有限集 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称群和全变换半群. 对 $1\leqslant m\leqslant n-1$，记 $X_m=\{1,2,\cdots,m\}$ 且 $X_{n-m}=X_n\backslash X_m$. 令

$$\mathscr{T}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathscr{T}_n: X_m\alpha=X_m\}$$
$$\mathscr{G}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathscr{T}_{(n,m)}: X_{n-m}\alpha=X_{n-m}\}=\mathscr{T}_{(n,m)}\cap\mathscr{S}_n$$
$$\mathscr{H}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathscr{T}_{(n,m)}: X_{n-m}\alpha\subseteq X_{n-m}\}$$

则易证得 $\mathscr{G}_{(n,m)}$，$\mathscr{H}_{(n,m)}$ 和 $\mathscr{T}_{(n,m)}$ 都是全变换半群 $\mathscr{T}_n$ 的子半群，且 $\mathscr{G}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{H}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}_{(n,m)}$.

设 $\mathscr{T}$是半群 $\mathscr{S}$的子半群，如果对任意 $\alpha\in\mathscr{S}$，$n\in\mathbb{N}_+$，由 $\alpha^n\in\mathscr{T}$可推出 $\alpha\in\mathscr{T}$，则称 $\mathscr{T}$为 $\mathscr{S}$的独立子半群. 半群理论是群理论的一般推广，变换半群的结构及其子结构同群的结构一样重要，目前已有许多研究成果[1-13]. 在变换半群理论中，对半群的结构的研究十分广泛，其中变换半群的极大正则子半群和极大子半群的研究一直都是热点问题，研究成果十分丰富[3-13]. 独立子半群作为一类特别的子半群，由于其构造存在一定的难度，目前对变换半群的独立子半群的研究比较少，仅有少数半群能够得到其独立子半群的完全分类. 文献[14]得到了：半群 $\mathscr{S}$的子半群 $\mathscr{T}$的补集 $\overline{\mathscr{T}}=\mathscr{S}\backslash\mathscr{T}$如果仍为 $\mathscr{S}$的子半群，则 $\mathscr{T}$和 $\overline{\mathscr{T}}$都是 $\mathscr{S}$的独立子半群，且半群 $\mathscr{S}$本身为自己的独立子半群. 文献[14]还刻画了全变换半群的独立子半群的完全分类. 文

收稿日期：2020-05-13

基金项目：国家自然科学基金项目(11461014)；贵州师范大学 2019 年博士科研启动项目(GZNUD[2019]13).

作者简介：袁　月，硕士研究生，主要从事半群理论的研究.

通信作者：赵　平，教授，博士生导师.

献[15]通过研究 $\mathscr{T}_{(n,m)}$ 的子半群 $\mathscr{G}_{(n,m)}$ 的生成集与秩，得到了 $\mathscr{T}_{(n,m)}$ 的生成集与秩．本文将研究半群 $\mathscr{T}_{(n,m)}$ 的子半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$，并得到半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群的完全分类．

设 S 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子集．通常，用 $E(S)$ 表示 S 中的所有幂等元组成的集合．本文未定义的术语及符号请参见文献[16]．

为了叙述上的方便，在 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 上引入以下的二元关系：对任意 $\alpha,\beta\in\mathscr{H}_{(n,m)}$，定义

$$\alpha\mathscr{L}^{\circ}\beta\Leftrightarrow\operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\beta)\qquad \alpha\mathscr{R}^{\circ}\beta\Leftrightarrow\ker(\alpha)=\ker(\beta)$$

$$\alpha\mathscr{J}^{\circ}\beta\Leftrightarrow|\operatorname{im}(\alpha)|=|\operatorname{im}(\beta)|\qquad \alpha\mathscr{H}^{\circ}\beta\Leftrightarrow\operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\beta),\ \ker(\alpha)=\ker(\beta)$$

则 $\mathscr{L}^{\circ},\mathscr{R}^{\circ},\mathscr{J}^{\circ}$ 与 $\mathscr{H}^{\circ}$ 都是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 上的等价关系．

易得 $\mathscr{L}^{\circ}\subseteq\mathscr{J}^{\circ}$，$\mathscr{R}^{\circ}\subseteq\mathscr{J}^{\circ}$ 且 $\mathscr{H}^{\circ}=\mathscr{R}^{\circ}\cap\mathscr{L}^{\circ}$．对 $r\in\mathbb{N}_+$ 且 $2\leqslant m+1\leqslant r\leqslant n$，记

$$\mathscr{J}^{\circ}_r=\{\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}:|\operatorname{im}(\alpha)|=r\}$$

则 $\mathscr{J}^{\circ}$-类 $\mathscr{J}^{\circ}_n,\mathscr{J}^{\circ}_{n-1},\cdots,\mathscr{J}^{\circ}_{m+1}$ 恰好是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的 $n-m$ 个 $\mathscr{J}^{\circ}$-类．显然 $\mathscr{G}_{(n,m)}=\mathscr{J}^{\circ}_n$．

约定：设 $1\leqslant m\leqslant n-1$，令 $\mathscr{S}_{n-m},\mathscr{T}_{n-m}$ 分别表示 X_{n-m} 上的对称群和全变换半群，$\mathscr{S}_m$ 表示 X_m 上的对称群．

引理 1　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$，则 $\mathscr{H}_{(n,m)}=\left\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle$．

证　由文献[15]可知

$$\mathscr{G}_{(n,m)}=\langle(12),(12\cdots n),((m+1)(m+2)),((m+1)(m+2)\cdots n)\rangle\cong\mathscr{S}_m\times\mathscr{S}_{n-m}$$

当 $m=1$ 时，显然 $\mathscr{H}_{(n,1)}\cong\mathscr{T}_{n-1}$，则 $\mathscr{H}_{(n,1)}=\left\langle(23),(23\cdots n),\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\mathscr{G}_{(n,1)},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$．

当 $2\leqslant m\leqslant n-3$ 时，任意取 $\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}$，定义 $\beta_\alpha,\lambda_\alpha\in\mathscr{T}_n$ 为

$$i\beta_\alpha=\begin{cases}i\alpha & i\leqslant m\\ i & i>m\end{cases}\qquad i\lambda_\alpha=\begin{cases}i & i\alpha\leqslant m\\ i\alpha & i\alpha>m\end{cases}$$

显然 $\beta_\alpha,\lambda_\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}$ 且 $\beta_\alpha\in\mathscr{G}_{(n,m)}$．任意取 $i\in X_n$，若 $1\leqslant i\leqslant m$，则 $i\beta_\alpha=i\alpha\in X_m$，于是 $(i\alpha)\alpha\leqslant m$，从而 $i(\beta_\alpha\lambda_\alpha)=(i\beta_\alpha)\lambda_\alpha=(i\alpha)\lambda_\alpha=i\alpha$；若 $m+1\leqslant i\leqslant n$，则由 $\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}$ 可得 $i\beta_\alpha=i\in X_{n-m}$ 且 $i\alpha>m$，从而 $i(\beta_\alpha\lambda_\alpha)=(i\beta_\alpha)\lambda_\alpha=i\lambda_\alpha=i\alpha$．因此 $\alpha=\beta_\alpha\lambda_\alpha$．易知

$$\beta_\alpha\in\langle(12),(12\cdots m)\rangle\cong\mathscr{S}_m$$

$$\lambda_\alpha\in\left\langle((m+1)(m+2)),((m+1)(m+2)\cdots n),\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle(\cong\mathscr{T}_{n-m})\subseteq\left\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle$$

从而 $\alpha=\beta_\alpha\lambda_\alpha\in\left\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle$．由 α 的任意性可得 $\mathscr{H}_{(n,m)}\subseteq\left\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle$．再由 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的定义知，$\mathscr{G}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{H}_{(n,m)}$ 且 $\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\in\mathscr{H}_{(n,m)}$，则 $\left\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle\subseteq\mathscr{H}_{(n,m)}$，从而 $\mathscr{H}_{(n,m)}=\left\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\begin{pmatrix}m+1\\m+2\end{pmatrix}\right\rangle$．

为方便起见，我们用符号 $\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_r\\ a_1 & \cdots & a_r\end{bmatrix}$ 表示半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 中满足如下条件的元素 α：

$$A_k\alpha=a_k\qquad 1\leqslant k\leqslant r$$

$$\text{且 } x\alpha=x\qquad x\in X_n\backslash(A_1\cup\cdots\cup A_r)$$

引理 2　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$，任意取 $\alpha\in\mathscr{J}^{\circ}_{n-1}$，则 $\mathscr{H}_{(n,m)}=\langle\mathscr{G}_{(n,m)},\alpha\rangle$．

证　设

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

其中 $X_m=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 且 $\{a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_n\}\subset X_{n-m}$．令

$$\mu_\alpha=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & m+1 & m+2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & m+2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

则 $\mu_\alpha \in \mathscr{G}_{(n,m)}$，且

$$\alpha^* = \alpha\mu_\alpha = \begin{bmatrix} m+1 & m+2 & \cdots & n \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathscr{J}^{\diamond}_{n-1}$$

于是 $\alpha^* = \alpha\mu_\alpha \in \langle \mathscr{G}_{(n,m)}, \alpha \rangle$，且

$$\langle ((m+1)(m+2)), ((m+1)(m+2)\cdots n), \alpha^* \rangle =$$
$$\left\langle ((m+1)(m+2)), ((m+1)(m+2)\cdots n), \begin{pmatrix} m+1 \\ m+2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

从而

$$\begin{pmatrix} m+1 \\ m+2 \end{pmatrix} \in \langle ((m+1)(m+2)), ((m+1)(m+2)\cdots n), \alpha^* \rangle \subseteq \langle \mathscr{G}_{(n,m)}, \alpha^* \rangle \subseteq \langle \mathscr{G}_{(n,m)}, \alpha \rangle$$

再由引理 1 可得 $\mathscr{H}_{(n,m)} = \langle \mathscr{G}_{(n,m)}, \alpha \rangle$.

引理 3　设 $1 \leqslant m \leqslant n-3$，$\mathscr{T}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群. 若 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2) \neq \varnothing$，则 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{J}^{\diamond}_{m+1} \neq \varnothing$.

证　令 $k=\min\{|\operatorname{im}(\varepsilon)|: \varepsilon \in E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)\}$，则 $m+1 \leqslant k \leqslant n-2$. 假设 $m+2 \leqslant k \leqslant n-2$. 任意取

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_k \end{bmatrix} \in E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$$

其中 $X_{n-m} = A_{m+1} \cup A_{m+2} \cup \cdots \cup A_k$，且 $a_i \in A_i (m+1 \leqslant i \leqslant k)$. 由 $|\operatorname{im}(\varepsilon)| = k \leqslant n-2$ 可知，存在 $t \in \{m+1, m+2, \cdots, k\}$，使得 $|A_t| \geqslant 3$，或者存在 $p, q \in \{m+1, m+2, \cdots, k\}$ 且 $p \neq q$，使得 $|A_p| = |A_q| = 2$. 以下分两种情形：

情形 1　$|A_t| \geqslant 3$. 取 $b, c \in A_t \backslash \{a_t\}$ 且 $b \neq c$. 令

$$\alpha = \begin{bmatrix} A_{m+1} & \cdots & A_{t-1} & A_t\backslash\{b\} & b & A_{t+1} & \cdots & A_k & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & \cdots & a_{t-1} & a_t & c & a_{t+1} & \cdots & a_k & b & a_{i+1} & & a_k \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} A_{m+1} & \cdots & A_{t-1} & A_t\backslash\{c\} & c & A_{t+1} & \cdots & A_k & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & \cdots & a_{t-1} & a_t & b & a_{t+1} & \cdots & a_k & c & a_{i+1} & & a_k \end{bmatrix}$$

则 $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon$，从而 $\alpha, \beta \in \mathscr{T}$. 由 $|\operatorname{im}(\varepsilon)| = k \geqslant m+2$ 可知，存在 $i \in \{m+1, m+2, \cdots, k\}$，使得 $A_i \cap A_t = \varnothing$. 不失一般性，不妨设 $i > t$. 令

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} A_{m+1} & \cdots & A_{t-1} & A_t\backslash\{b\} & b & A_{t+1} & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & \cdots & a_{t-1} & a_t & a_i & a_{t+1} & \cdots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

$$\beta^* = \begin{bmatrix} A_{m+1} & \cdots & A_{t-1} & A_t\backslash\{c\} & c & A_{t+1} & \cdots & A_{i-1} & A_i & A_{i+1} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & \cdots & a_{t-1} & a_t & a_i & a_{t+1} & \cdots & a_{i-1} & c & a_{i+1} & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

则 $(\alpha^*)^2 = \alpha\beta \in \mathscr{T}$ 且 $(\beta^*)^2 = \beta\alpha \in \mathscr{T}$，从而 $\alpha^*, \beta^* \in \mathscr{T}$. 易验证

$$\alpha^*\beta^*\alpha = \begin{bmatrix} A_{m+1} & \cdots & A_{t-1} & A_t \cup A_i & A_{t+1} & \cdots & A_{i-1} & A_{i+1} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & \cdots & a_{t-1} & a_t & a_{t+1} & \cdots & a_{i-1} & a_{i+1} & \cdots & a_k \end{bmatrix} \in \mathscr{T}$$

显然 $\alpha^*\beta^*\alpha \in E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$，且 $|\operatorname{im}(\alpha^*\beta^*\alpha)| = k-1$，与 k 的极小性矛盾.

情形 2　$|A_p| = |A_q| = 2$. 设 $A_p = \{a_p, a_p^*\}$ 且 $A_q = \{a_q, a_q^*\}$，其中 $a_j \neq a_j^*$，$j = p, q$. 令

$$\alpha = \begin{bmatrix} A_{m+1} & \cdots & A_{p-1} & a_p & a_p^* & A_{p+1} & \cdots & A_{q-1} & a_q & a_q^* & A_{q+1} & \cdots & A_k \\ a_{m+1} & \cdots & a_{p-1} & a_q & a_q^* & a_{p+1} & \cdots & a_{q-1} & a_p & a_p & a_{q+1} & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

$$\beta=\begin{bmatrix}A_{m+1} & \cdots & A_{p-1} & a_p & a_p^* & A_{p+1} & \cdots & A_{q-1} & a_q & a_q^* & A_{q+1} & \cdots & A_k\\ a_{m+1} & \cdots & a_{p-1} & a_q & a_q & a_{p+1} & \cdots & a_{q-1} & a_p & a_p^* & a_{q+1} & \cdots & a_k\end{bmatrix}$$

则 $\alpha^2=\beta^2=\varepsilon$，从而 $\alpha,\beta\in\mathscr{T}$，因此 $\alpha\beta,\beta\alpha\in\mathscr{T}$. 令

$$\alpha^*=\begin{bmatrix}A_{m+1} & \cdots & A_{p-1} & A_p & A_{p+1} & \cdots & A_{q-1} & a_q & a_q^* & A_{q+1} & \cdots & A_k\\ a_{m+1} & \cdots & a_{p-1} & a_q & a_{p+1} & \cdots & a_{q-1} & a_p & a_q^* & a_{q+1} & \cdots & a_k\end{bmatrix}$$

$$\beta^*=\begin{bmatrix}A_{m+1} & \cdots & A_{p-1} & a_p & a_p^* & A_{p+1} & \cdots & A_{q-1} & A_q & A_{q+1} & \cdots & A_k\\ a_{m+1} & \cdots & a_{p-1} & a_q & a_p^* & a_{p+1} & \cdots & a_{q-1} & a_p & a_{q+1} & \cdots & a_k\end{bmatrix}$$

$$\gamma^*=\begin{bmatrix}A_{m+1} & \cdots & A_{p-1} & A_p & A_{p+1} & \cdots & A_{q-1} & a_q & a_q^* & A_{q+1} & \cdots & A_k\\ a_{m+1} & \cdots & a_{p-1} & a_q^* & a_{p+1} & \cdots & a_{q-1} & a_p & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_k\end{bmatrix}$$

则$(\alpha^*)^2=(\gamma^*)^3=\beta\alpha\in\mathscr{T}$，$(\beta^*)^2=\alpha\beta\in\mathscr{T}$，从而 $\alpha^*,\beta^*,\gamma^*\in\mathscr{T}$. 易验证

$$(\alpha^*\beta^*\gamma^*)^2=\begin{bmatrix}A_{m+1} & \cdots & A_{p-1} & A_p\cup A_q & A_{p+1} & \cdots & A_{q-1} & A_{q+1} & \cdots & A_k\\ a_{m+1} & \cdots & a_{p-1} & a_q^* & a_{p+1} & \cdots & a_{q-1} & a_{q+1} & \cdots & a_k\end{bmatrix}\in\mathscr{T}$$

显然$(\alpha^*\beta^*\gamma^*)^2\in E(\mathscr{T})\cap\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$，且 $|\operatorname{im}((\alpha^*\beta^*\gamma^*)^2)|=k-1$，与 k 的极小性矛盾.

综上所述，$k=m+1$. 因此 $E(\mathscr{T})\cap\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\neq\varnothing$.

引理 4　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$，$\mathscr{T}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群. 若 $E(\mathscr{T})\cap\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\neq\varnothing$，则 $\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\subseteq\mathscr{T}$.

证　任意取

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \cdots & m & X_{n-m}\\ a_1 & \cdots & a_m & a\end{pmatrix}\in\mathscr{J}^\diamond_{m+1}$$

其中 $X_m=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 且 $a\in X_{n-m}$，则显然存在 $t\in\mathbb{N}_+$，使得 $\alpha^t=\begin{bmatrix}X_{n-m}\\ a\end{bmatrix}$. 任意取

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}X_{n-m}\\ b\end{bmatrix}\in E(\mathscr{T})\cap\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\subseteq\mathscr{T}$$

其中 $b\in X_{n-m}$. 若 $a=b$，则 $\alpha^t=\varepsilon\in\mathscr{T}$，从而 $\alpha\in\mathscr{T}$；若 $a\neq b$，令

$$\beta=\begin{bmatrix}X_{n-m}\setminus\{a\} & a\\ b & c\end{bmatrix}\qquad\gamma=\begin{bmatrix}X_{n-m}\setminus\{c\} & c\\ b & a\end{bmatrix}$$

其中 $a,b,c\in X_{n-m}$ 且 a,b,c 互不相同，则 $\beta^2=\gamma^2=\varepsilon$，从而 $\beta,\gamma\in\mathscr{T}$. 令

$$\eta=\begin{bmatrix}X_{n-m}\setminus\{a\} & a\\ a & b\end{bmatrix}$$

则

$$\eta^2=\begin{bmatrix}X_{n-m}\setminus\{a\} & a\\ b & a\end{bmatrix}=\beta\gamma\in\mathscr{T}$$

从而 $\eta\in\mathscr{T}$. 易验证 $\alpha^t=\varepsilon\eta\in\mathscr{T}$，从而 $\alpha\in\mathscr{T}$. 由 α 的任意性可得 $\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\subseteq\mathscr{T}$.

对 $r\in\mathbb{N}_+$ 且 $2\leqslant m+1\leqslant r\leqslant n$，记

$$\mathscr{H}_{(n,m)}(r)=\{\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}:|\operatorname{im}(\alpha)|\leqslant r\}=\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\cup\mathscr{J}^\diamond_{m+2}\cup\cdots\cup\mathscr{J}^\diamond_r$$

$$\operatorname{Sing}_{(n,m)}=\{\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}:|\operatorname{im}(\alpha)|\leqslant n-1\}$$

则 $\mathscr{H}_{(n,m)}(r)$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的理想，且 $\operatorname{Sing}_{(n,m)}=\mathscr{H}_{(n,m)}(n-1)$.

引理 5　设 $1\leqslant m\leqslant n-2$，$\mathscr{T}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群. 若 $\mathscr{J}^\diamond_{m+1}\subseteq\mathscr{T}$，则 $\operatorname{Sing}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$.

证　当 $m=n-2$ 时，结论显然成立. 假设 $1\leqslant m\leqslant n-3$. 任意取 $\varepsilon\in E(\mathscr{J}^\diamond_r)(m+1\leqslant r\leqslant n-1)$，假设

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_r\\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_r\end{bmatrix}$$

其中 $X_{n-m}=A_{m+1}\cup A_{m+2}\cup\cdots\cup A_r$ 且 $a_i\in A_i(m+1\leqslant i\leqslant r)$. 由 $r\leqslant n-1$ 可知, 存在 $t\in\{m+1, m+2, \cdots, r\}$, 使得 $|A_t|\geqslant 2$. 不失一般性, 不妨设 $|A_{m+1}|\geqslant 2$. 若 $r=m+1$, 显然 $\varepsilon\in\mathscr{J}^{\circ}_{m+1}\subseteq\mathscr{T}$; 若 $m+2\leqslant r\leqslant n-1$, 设

$$\alpha_s=\begin{bmatrix}A_{m+1}\cup A_{m+2}\cup\cdots\cup A_{m+s} & A_{m+s+1} & A_{m+s+2} & \cdots & A_r\\ a_{m+1} & a^{*}_{m+1} & a_{m+s+2} & \cdots & a_r\end{bmatrix}$$

$$\beta_s=\begin{bmatrix}(A_{m+1}\cup A_{m+2}\cup\cdots\cup A_{m+s+1})\backslash\{a^{*}_{m+1}\} & a^{*}_{m+1} & A_{m+s+2} & \cdots & A_r\\ a_{m+1} & a_{m+s+1} & a_{m+s+2} & \cdots & a_r\end{bmatrix}$$

其中 $1\leqslant s\leqslant r-m-1$, $a^{*}_{m+1}\in A_{m+1}\backslash\{a_{m+1}\}$, 则显然 $\varepsilon=\alpha_1\beta_1$, 且

$$\gamma_s=\alpha_s^2=\beta_s^2=\begin{bmatrix}A_{m+1}\cup A_{m+2}\cup\cdots\cup A_{m+s+1} & A_{m+s+2} & \cdots & A_r\\ a_{m+1} & a_{m+s+2} & \cdots & a_r\end{bmatrix}$$

易验证 $\alpha_s\beta_s=\gamma_{s-1}$. 注意到

$$\gamma_{r-m-1}=\alpha^2_{r-m-1}=\beta^2_{r-m-1}=\begin{bmatrix}X_{n-m}\\ a_{m+1}\end{bmatrix}\in\mathscr{J}^{\circ}_{m+1}\subseteq\mathscr{T}$$

由 $\mathscr{T}$ 是独立子半群, 易得 $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s\in\mathscr{T}(1\leqslant s\leqslant r-m-1)$, 从而 $\varepsilon=\alpha_1\beta_1\in\mathscr{T}$. 由 ε 的任意性可知, $E(\mathscr{J}^{\circ}_r)\subseteq\mathscr{T}$, $m+1\leqslant r\leqslant n-1$. 现在, 任意取 $\alpha\in\mathrm{Sing}_{(n,m)}$, 则 $|\mathrm{im}(\alpha)|\leqslant n-1$. 由半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的有限性可知, 存在 $t\in\mathbb{N}_+$ 且 $m+1\leqslant r\leqslant n-1$, 使得 $\alpha^t\in E(\mathscr{J}^{\circ}_r)$. 由 $E(\mathscr{J}^{\circ}_r)\subseteq\mathscr{T}$ 可得 $\alpha^t\in\mathscr{T}$, 从而 $\alpha\in\mathscr{T}$. 由 α 的任意性可得 $\mathrm{Sing}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$.

由半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的定义知 $\mathscr{J}^{\circ}_{n-1}$ 中的幂等元为如下形式:

$$\lambda_{(t,k)}=\begin{bmatrix}\{t, k\}\\ k\end{bmatrix}\qquad t, k\in X_{n-m}\text{ 且 }t\neq k$$

任意取 $\lambda_{(t,k)}\in E(\mathscr{J}^{\circ}_{n-1})$, 令

$$\sqrt{\lambda_{(t,k)}}=\{\alpha\in\mathscr{H}_{(n,m)}: \alpha^i=\lambda_{(t,k)}, i\in\mathbb{N}_+\}$$

设 $\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$ 为 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 中包含幂等元 $\lambda_{(t,k)}$ 的 $\mathscr{H}^{\circ}$-类, 则

$$\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}=\{\alpha\in\mathscr{J}^{\circ}_{n-1}: \ker(\alpha)=\ker(\lambda_{(t,k)}), \text{且 }\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})\}$$

易证得 $\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的(有限)子群.

引理 6　设 $1\leqslant m\leqslant n-2$, $\lambda_{(t,k)}\in E(\mathscr{J}^{\circ}_{n-1})$, 则 $\sqrt{\lambda_{(t,k)}}=\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$.

证　任意取 $\alpha\in\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$, 则存在 $i\in\mathbb{N}_+$, 使得 $\alpha^i=\lambda_{(t,k)}$. 显然 $n-1=|\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})|\leqslant|\mathrm{im}(\alpha)|$. 若 $|\mathrm{im}(\alpha)|=n$, 则 α 是 X_n 上的置换, 从而 $|\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})|=|\mathrm{im}(\alpha^i)|=n$, 与 $\lambda_{(t,k)}\in E(\mathscr{J}^{\circ}_{n-1})$ 矛盾. 因此, $|\mathrm{im}(\alpha)|=n-1$. 由 $|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})|=n-1$ 及 $\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})=\mathrm{im}(\alpha^i)\subseteq\mathrm{im}(\alpha)$ 可得 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})$. 显然 $\{t, k\}$ 是 $\lambda_{(t,k)}$ 唯一的非单点核类. 若 $t\alpha\neq k\alpha$, 则由 $|\mathrm{im}(\alpha)|=n-1$ 可知, 存在 $u, v\in X_n$ 且 $\{u, v\}\neq\{t, k\}$, 使得 $u\alpha=v\alpha$, 从而 $u\lambda_{(t,k)}=u\alpha^i=v\alpha^i=v\lambda_{(t,k)}$, 与 $\{t, k\}$ 是 $\lambda_{(t,k)}$ 唯一的非单点核类矛盾. 因此, $t\alpha=k\alpha$. 再由 $|\mathrm{im}(\alpha)|=n-1$ 可得 $\ker(\alpha)=\ker(\lambda_{(t,k)})$. 由 α 的任意性可得 $\sqrt{\lambda_{(t,k)}}\subseteq\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$. 任意取 $\alpha\in\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$, 则由 $\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的有限子群且 $|\mathrm{im}(\alpha)|=n-1$ 可知, 存在 $i\in\mathbb{N}_+$, 使得 $\alpha^i=\lambda_{(t,k)}$, 从而 $\alpha\in\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$. 由 α 的任意性可得 $\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}\subseteq\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$. 因此 $\sqrt{\lambda_{(t,k)}}=\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$.

引理 7　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$, 且 $\mathscr{S}=\sqrt{\lambda_{(t,k)}}\cup\sqrt{\lambda_{(k,t)}}$, 其中 $t, k\in X_{n-m}$ 且 $t\neq k$, 则 $\mathscr{S}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群.

证　由引理 6 可知 $\sqrt{\lambda_{(t,k)}}=\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$ 且 $\sqrt{\lambda_{(k,t)}}=\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(k,t)}}$, 从而 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的两个子群的并集. 任取 $\alpha\in\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$, $\beta\in\sqrt{\lambda_{(k,t)}}$, 则 $\ker(\alpha)=\ker(\lambda_{(t,k)})=\ker(\lambda_{(k,t)})=\ker(\beta)$, 且 $\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})=X_n\backslash\{t\}$. 进而易得 $\ker(\alpha\beta)=\ker(\alpha)=\ker(\beta)=\ker(\lambda_{(k,t)})$, 且 $\mathrm{im}(\alpha\beta)=\mathrm{im}(\beta)=\mathrm{im}(\lambda_{(k,t)})$, 则 $\alpha\beta\in$

$\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(k,t)}}=\sqrt{\lambda_{(k,t)}}\subset\mathscr{S}$. 同理可得 $\beta\alpha\in\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}=\sqrt{\lambda_{(t,k)}}\subset\mathscr{S}$. 从而易证得 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群. 假设存在 $\eta\in\mathscr{H}_{(n,m)}\backslash\mathscr{S}$，且 $n\in\mathbb{N}_+$，使得 $\eta^n\in\mathscr{S}$，则由 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群且 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 为有限半群可知，存在 $t\in\mathbb{N}_+$ 且 $\varepsilon\in\{\lambda_{(k,t)},\lambda_{(t,k)}\}$，使得 $(\eta^n)^t=\eta^{nt}=\varepsilon\in\mathscr{S}$，则 $\eta\in\mathscr{S}$，与假设矛盾. 因此，$\mathscr{S}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群.

引理 8　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$ 且 $\mathscr{S}=\bigcup\limits_{k\in M}\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$，其中 $t\in X_{n-m}$ 且 $\varnothing\neq M\subseteq X_{n-m}\backslash\{t\}$，则 $\mathscr{S}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群.

证　由引理 6 可知，$\sqrt{\lambda_{(t,k)}}=\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k)}}$，$k\in M$，从而 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的一些子群的并集. 注意到 $\mathrm{im}(\lambda_{(t,k)})=X_{n-m}\backslash\{t\}$. 任取 $k_1,k_2\in M$，对 $\alpha\in\sqrt{\lambda_{(t,k_1)}}$，$\beta\in\sqrt{\lambda_{(t,k_2)}}$，显然 $\mathrm{im}(\alpha)=X_{n-m}\backslash\{t\}=\mathrm{im}(\beta)$，$\ker(\alpha)=\ker(\lambda_{(t,k_1)})$ 且 $\ker(\beta)=\ker(\lambda_{(t,k_2)})$. 进而易得 $\ker(\alpha\beta)=\ker(\alpha)=\ker(\lambda_{(t,k_1)})$，且 $\mathrm{im}(\alpha\beta)=\mathrm{im}(\beta)=\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\lambda_{(t,k_1)})$，则 $\alpha\beta\in\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k_1)}}=\sqrt{\lambda_{(t,k_1)}}\subset\mathscr{S}$. 同理可得 $\beta\alpha\in\mathscr{H}^{\circ}_{\lambda_{(t,k_2)}}=\sqrt{\lambda_{(t,k_2)}}\subset\mathscr{S}$. 从而易证得 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群. 假设存在 $\eta\in\mathscr{H}_{(n,m)}\backslash\mathscr{S}$ 且 $n\in\mathbb{N}_+$，使得 $\eta^n\in\mathscr{S}$. 由 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群且 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 为有限半群可知，存在 $t\in\mathbb{N}_+$ 且 $\varepsilon\in\bigcup\limits_{k\in M}\{\lambda_{(t,k)}\}$，使得 $(\eta^n)^t=\eta^{nt}=\varepsilon\in\mathscr{S}$，则 $\eta\in\mathscr{S}$，与假设矛盾. 因此，$\mathscr{S}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群.

引理 9　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$，$\mathscr{T}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群，若 $\mathscr{T}\cap\mathscr{G}_{(n,m)}\neq\varnothing$，则 $\mathscr{G}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$.

证　由 $\mathscr{T}\cap\mathscr{G}_{(n,m)}\neq\varnothing$ 可知，存在 $\alpha\in\mathscr{T}\cap\mathscr{G}_{(n,m)}$，于是 $1_{X_n}=\alpha^{n!}\in\mathscr{T}$，其中 1_{X_n} 是 X_n 上的恒等变换. 任取 $\beta\in\mathscr{G}_{(n,m)}$，则 $\beta^{n!}=1_{X_n}\in\mathscr{T}$，从而 $\beta\in\mathscr{T}$. 由 β 的任意性可得 $\mathscr{G}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$.

引理 10[14]　设 $\mathscr{S}$ 是有限半群. 若 $\mathscr{T}$ 是 $\mathscr{S}$ 的独立子半群，则 $\mathscr{T}=\bigcup\limits_{\varepsilon\in E(\mathscr{T})}\sqrt{\varepsilon}$.

定理 1　设 $1\leqslant m\leqslant n-3$，则半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群有且仅有以下 5 类：

(i) $\mathscr{H}_{(n,m)}$；

(ii) $\mathscr{G}_{(n,m)}$；

(iii) $\mathrm{Sing}_{(n,m)}$；

(iv) $\sqrt{\lambda_{(t,k)}}\cup\sqrt{\lambda_{(k,t)}}$，其中 $t,k\in X_{n-m}$ 且 $t\neq k$；

(v) $\bigcup\limits_{k\in M}\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$，其中 $t\in X_{n-m}$ 且 $\varnothing\neq M\subseteq X_{n-m}\backslash\{t\}$.

证　注意到 $\mathscr{G}_{(n,m)}$，$\mathrm{Sing}_{(n,m)}$ 都是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群，$\mathscr{G}_{(n,m)}\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}=\varnothing$ 且 $\mathscr{H}_{(n,m)}=\mathscr{G}_{(n,m)}\cup\mathrm{Sing}_{(n,m)}$，则由文献[14]可知，$\mathscr{G}_{(n,m)}$，$\mathrm{Sing}_{(n,m)}$ 和 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 都是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群. 由引理 7、引理 8 可知，类型(iv)，(v)都是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群.

反之，由引理 7、引理 8 可知，类型(iv)，(v)都是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群. 注意到 $\mathscr{G}_{(n,m)}$，$\mathrm{Sing}_{(n,m)}$ 都是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的子半群，且 $\mathscr{H}_{(n,m)}=\mathscr{G}_{(n,m)}\cup\mathrm{Sing}_{(n,m)}$. 设 $\mathscr{T}$ 是半群 $\mathscr{H}_{(n,m)}$ 的独立子半群，则由引理 10 可得 $\mathscr{T}=\bigcup\limits_{\varepsilon\in E(\mathscr{T})}\sqrt{\varepsilon}$. 以下分 3 种情形讨论：

情形 1　$E(\mathscr{T})\cap\mathscr{G}_{(n,m)}\neq\varnothing$ 且 $E(\mathscr{T})\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}=\varnothing$. 由引理 9 可得 $\mathscr{G}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$. 我们断言 $\mathscr{T}\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}=\varnothing$. 假设 $\alpha\in\mathscr{T}\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}$，则存在 $n\in\mathbb{N}_+$，使得 $\alpha^n\in E(\mathscr{T})\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}$，与 $E(\mathscr{T})\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}=\varnothing$ 矛盾. 因此 $\mathscr{T}=\mathscr{G}_{(n,m)}$.

情形 2　$E(\mathscr{T})\cap\mathscr{G}_{(n,m)}\neq\varnothing$ 且 $E(\mathscr{T})\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}\neq\varnothing$. 由引理 9 可得 $\mathscr{G}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$. 注意到 $\mathrm{Sing}_{(n,m)}=\mathscr{J}^{\circ}_{n-1}\cup\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$. 以下分子情形讨论：

情形 2.1　$E(\mathscr{T})\cap\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)\neq\varnothing$. 由引理 3、引理 4、引理 5 可得 $\mathrm{Sing}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$，从而 $\mathscr{T}=\mathscr{H}_{(n,m)}$.

情形 2.2　$E(\mathscr{T})\cap\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)=\varnothing$. 由 $E(\mathscr{T})\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}\neq\varnothing$ 可得 $E(\mathscr{T})\cap\mathscr{J}^{\circ}_{n-1}\neq\varnothing$. 由引理 2 可得 $\mathscr{T}=\mathscr{H}_{(n,m)}$.

情形 3　$E(\mathscr{T})\cap\mathscr{G}_{(n,m)}=\varnothing$ 且 $E(\mathscr{T})\cap\mathrm{Sing}_{(n,m)}\neq\varnothing$. 考虑到 $\mathrm{Sing}_{(n,m)}=\mathscr{J}^{\circ}_{n-1}\cup\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$. 以下分子情形讨论：

情形 3.1　$E(\mathscr{T})\cap\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)\neq\varnothing$. 由引理 3、引理 4、引理 5 可得 $\mathrm{Sing}_{(n,m)}\subseteq\mathscr{T}$，从而 $\mathscr{T}=\mathrm{Sing}_{(n,m)}$.

情形 3.2 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)=\varnothing$. 显然 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{J}^{\circ}_{n-1} \neq \varnothing$. 注意到 $E(\mathscr{J}^{\circ}_{n-1})=\{\lambda_{(t,k)}: t,k \in X_{n-m}$ 且 $t \neq k\}$. 令

$$\Gamma_{\mathscr{T}}=\{x \in X_{n-m}: 存在\ k \in X_{n-m},\ 使得\ \lambda_{(x,k)} \in E(\mathscr{T})\}$$

假设 $|\Gamma_{\mathscr{T}}| \geqslant 3$, 则存在 $t_1, t_2, t_3, k_1, k_2, k_3 \in X_{n-m}$, $t_i \neq k_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ 且 t_1, t_2, t_3 互不相同, 使得 $\lambda_{(t_1,k_1)}$, $\lambda_{(t_2,k_2)}$, $\lambda_{(t_3,k_3)} \in E(\mathscr{T})$. 显然存在 $i \in \{2, 3\}$, 使得 $t_1 \neq k_i$. 若 $t_i = k_1$, 则 $k_1 \neq k_i$, 从而

$$\lambda_{(t_1,k_1)}\lambda_{(t_i,k_i)}=\begin{bmatrix}\{t_1, k_1, t_i\} \\ k_1\end{bmatrix} \in E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$$

这与 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)=\varnothing$ 矛盾. 若 $t_i \neq k_1$ 且 $k_i = k_1$, 则

$$\lambda_{(t_1,k_1)}\lambda_{(t_i,k_i)}=\begin{bmatrix}\{t_1, k_1, t_i\} \\ k_1\end{bmatrix} \in E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$$

这与 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)=\varnothing$ 矛盾. 若 $t_i \neq k_1$ 且 $k_i \neq k_1$, 则

$$\lambda_{(t_1,k_1)}\lambda_{(t_i,k_i)}=\begin{bmatrix}\{t_1, k_1\} & \{t_i, k_i\} \\ k_1 & k_i\end{bmatrix} \in E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$$

这与 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)=\varnothing$ 矛盾. 综上所述, $1 \leqslant |\Gamma_{\mathscr{T}}| \leqslant 2$. 若 $|\Gamma_{\mathscr{T}}|=1$, 则存在 $t \in X_{n-m}$, 使得 $\Gamma_{\mathscr{T}}=\{t\}$. 再由 $\Gamma_{\mathscr{T}}$ 的定义可知, 存在 $\varnothing \neq M \subseteq X_{n-m} \backslash \{t\}$, 使得 $E(\mathscr{T})=\bigcup\limits_{k \in M}\{\lambda_{(t,k)}\}$, 从而

$$\mathscr{T}=\bigcup_{\varepsilon \in E(\mathscr{T})}\sqrt{\varepsilon}=\bigcup_{k \in M}\sqrt{\lambda_{(t,k)}}$$

若 $|\Gamma_{\mathscr{T}}|=2$, 则存在 $t,k \in X_{n-m}$ 且 $t \neq k$, 使得 $\Gamma_{\mathscr{T}}=\{k, t\}$. 由 $\Gamma_{\mathscr{T}}$ 的定义可知, 存在 $\varnothing \neq M \subseteq X_{n-m} \backslash \{t\}$, $\varnothing \neq N \subseteq X_{n-m} \backslash \{k\}$, 使得 $E(\mathscr{T})=\bigcup\limits_{m \in M}\{\lambda_{(t,m)}\} \cup \bigcup\limits_{n \in N}\{\lambda_{(k,n)}\}$. 由 $E(\mathscr{T}) \cap \mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)=\varnothing$ 可得 $\lambda_{(t,m)}\lambda_{(k,n)}$, $\lambda_{(k,n)}\lambda_{(t,m)} \in \mathscr{J}^{\circ}_{n-1}$, 从而 $t \in \{k, n\}$ 且 $k \in \{t, m\}$. 注意到 $t \neq k$, 则 $t=n$ 且 $k=m$. 由 m,n 的任意性可得, $M=\{k\}$ 且 $N=\{t\}$, 于是 $E(\mathscr{T})=\bigcup\limits_{m \in M}\{\lambda_{(t,m)}\} \cup \bigcup\limits_{n \in N}\{\lambda_{(k,n)}\}=\{\lambda_{(t,k)}\} \cup \{\lambda_{(k,t)}\}$, 从而

$$\mathscr{T}=\bigcup_{\varepsilon \in E(\mathscr{T})}\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\lambda_{(t,k)}} \cup \sqrt{\lambda_{(k,t)}}$$

注 1 易知半群 $\mathscr{H}_{(n,n-1)}$ 唯一的独立子半群是它本身, $\mathscr{H}_{(n,n-2)}$ 的所有独立子半群为半群 $\mathscr{H}_{(n,n-2)}$, $\mathscr{G}_{(n,n-2)}$, $\mathrm{Sing}_{(n,n-2)}$, $\{\lambda_{(m+1,m+2)}\}$ 和 $\{\lambda_{(m+2,m+1)}\}$.

参考文献:

[1] 于晓丹, 孔祥智. Vague 软 Clifford 半群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(6): 46-53.

[2] 张前滔, 赵 平, 罗永贵. 半群 $\mathrm{TOP}_n(k)$ 的格林(星)关系及富足性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(6): 9-15.

[3] YANG X L. Maximal Subsemigroups of the Finite Singular Transformation Semigroup [J]. Communications in Algebra, 2001, 29(3): 1175-1182.

[4] YOU T J. Maximal Regular Subsemigroups of Certain Semigroups of Transformations [J]. Semigroup Forum, 2002, 64(3): 391-396.

[5] YOU T J, YANG X L. A Classification of the Maximal Idempotent Generated Subsemigroups of Finite Singular Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2002, 64(2): 236-242.

[6] YANG H B, YANG X L. Maximal Subsemigroups of Finite Transformation Semigroups $K(n, r)$ [J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 20(3): 475-482.

[7] YANG X L, YANG H B. Maximal Regular Subsemibands of Sing_n [J]. Semigroup Forum, 2006, 72(1): 75-93.

[8] ZHAO P, BO X, MEI Y. Locally Maximal Idempotent Generated Subsemigroups of Singular Orientation-Preserving Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2008, 77(2): 187-195.

[9] ZHAO P. A Classification of Maximal Idempotent Generated Subsemigroups of Singular Orientation-Preserving Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2009, 79(2): 377-384.

[10] ZHAO P. Maximal Regular Subsemibands of SOP_n [J]. Semigroup Forum, 2010, 80(3): 477-483.

[11] ZHAO P, HU H B, YOU T J. A Note on Maximal Regular Subsemigroups of the Finite Transformation Semigroups $\mathscr{T}(n, r)$ [J]. Semigroup Forum, 2014, 88(2): 324-332.
[12] ZHAO P, HU H B. Locally Maximal Regular Subsemibands of the Finite Transformation Semigroups $\mathscr{T}(n, r)$ [J]. Semigroup Forum, 2019, 98(1): 172-183.
[13] 袁　月，赵　平. 半群 $\mathscr{H}^{*}_{(n,m)}(r)$ 的极大子半群与极大正则子半群 [J]. 山东大学学报(理学版)，2020，55(12)：19-24.
[14] GANYUSHKIN O, MAZORCHUK V. Classical Finite Transformation Semigroups: an Introduction [M]. London: Springer, 2009.
[15] TOKER K, AYIK H. On the Rank of Transformation Semigroup $\mathscr{T}_{(n,m)}$ [J]. Turk J Math, 2018, 42(4): 1970-1977.
[16] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford: Oxford Press, 1995: 1-154.

Isolated Subsemigroups of the Semigroup $\mathscr{H}_{(n,m)}$

YUAN Yue, ZHAO Ping

School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China

Abstract: Let $\mathscr{T}_n$ be a full transformation semigroup on the finite set $X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. For $1 \leqslant m \leqslant n-1$, let $X_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ and $X_{n-m} = X_n \backslash X_m$. Let

$$\mathscr{T}_{(n,m)} = \{\alpha \in \mathscr{T}_n : X_m \alpha = X_m\}$$
$$\mathscr{H}_{(n,m)} = \{\alpha \in \mathscr{T}_{(n,m)} : X_{n-m}\alpha \subseteq X_{n-m}\}$$

then both $\mathscr{H}_{(n,m)}$ and $\mathscr{T}_{(n,m)}$ are subsemigroups of the full transformation semigroup $\mathscr{T}_n$ and $\mathscr{H}_{(n,m)} \subseteq \mathscr{T}_{(n,m)}$. Let $\mathscr{T}$ be a subsemigroup of the semigroup $\mathscr{S}$, and if $\alpha^n \in \mathscr{T}$ implies $\alpha \in \mathscr{T}$ for all $\alpha \in \mathscr{S}$ and $n \in \mathbb{N}_+$, then $\mathscr{T}$ is an isolated subsemigroup of the semigroup $\mathscr{S}$. In this paper, we consider the isolated subsemigroup $\mathscr{T}$ of the semigroup $\mathscr{H}_{(n,m)}$. As the isolated subsemigroup $\mathscr{T}$ can be expressed as a union of subsets containing idempotents, we can, by analyzing the relationship between the set $E(\mathscr{T})$ of the idempotents of $\mathscr{T}$ and the elements in the semigroup $\mathscr{H}_{(n,m)}$, construct it according to its definition and the closure of the semigroup and calculate the idempotents and the generation elements of the idempotents. It is found that if $\mathscr{T}$ contains some idempotents in $\mathscr{H}_{(n,m)}(n-2)$, then it can be concluded that the singular transformation semigroup $\mathrm{Sing}_{(n,m)}$ must be included in $\mathscr{T}$, and that $\mathscr{G}_{(n,m)}$ must be included in $\mathscr{T}$ if $\mathscr{T}$ contains some elements at the top $\mathscr{G}_{(n,m)}$ of the semigroup $\mathscr{H}_{(n,m)}$. The structural characteristics of the isolated subsemigroup $\mathscr{T}$ are deduced by discussing different cases of $E(\mathscr{T})$, and then the complete classification of the isolated subsemigroup of $\mathscr{H}_{(n,m)}$ is obtained.

Key words: full transformation semigroup; idempotent; isolated subsemigroup

责任编辑　廖　坤