第 43 卷第 6 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2021 年 6 月
Vol. 43　No. 6　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jun.　2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.06.011

一类带有变指数增长的 Neumann 问题

蒙　璐，　储昌木，　雷　俊

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要：考虑一类带有变号位势和变指数的半线性 Neumann 边值问题，通过空间分解技术和变号位势函数的一些性质，证明了该类问题的泛函满足(PS)条件且具有山路几何结构，利用变分方法获得了该类问题两个非平凡解的存在性.

关 键 词：Neumann 边值问题；变指数增长；变号位势；变分方法

中图分类号：**O175.25**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2021)06-0082-07

考虑如下非线性 Neumann 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = Q(x)\,|u|^{p(x)-2}u + \lambda f(x, u) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ 是边界光滑的有界域，

$$2 < p^- = \min\{p(x): x \in \overline{\Omega}\} \leqslant p(x) \leqslant p^+ = \max\{p(x): x \in \overline{\Omega}\} < 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

λ 是正参数，$Q(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上满足

$$\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}\mathrm{d}x < 0 \qquad \mathrm{mes}(\Omega_1) > 0 \tag{2}$$

的连续变号函数，其中 $\Omega_1 = \{x : Q(x) \geqslant 0\}$，$\Omega_2 = \{x : Q(x) < 0\}$. $f: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(f_1) 存在常数 $a > 0$ 和 $0 < \sigma < 1$，使得对任意 $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$，$|f(x, s)| \leqslant a\,|s|^\sigma$；

(f_2) $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(x, s)}{s} = \infty$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立.

近年来，对具有 Neumann 边界的椭圆型偏微分方程的研究引起了许多学者的注意，也获得了一些新的成果(见文献[1-10]). 此外，文献[11] 研究了如下带有变号位势的 Neumann 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)\,u = a(x)u^p & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中光滑的有界域，$p > 1$，$a(x)$ 是 Ω 上变号的连续函数，并利用约束最大化方法探讨了半线性椭圆型问题正解的存在性.

文献[12] 研究了以下问题：

收稿日期：2020-09-03

基金项目：国家自然科学基金项目(11861021).

作者简介：蒙　璐，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：储昌木，教授.

$$\begin{cases} -\Delta u = Q(x)|u|^{2^*-2}u + \lambda f(x,u) & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为具有光滑边界的有界域，$\int_\Omega Q(x)\mathrm{d}x < 0$. 众所周知，与在 $H_0^1(\Omega)$ 空间上讨论的 Direchlet 边值问题不同，在 $H^1(\Omega)$ 空间上，范数 $\int_\Omega(|\nabla u|^2 + u^2)\mathrm{d}x$ 与 $\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 不等价. 因此，文献[10]通过空间分解和山路引理等临界点理论证明了该方程解的存在性. 随后，文献[13-15]对类似的 Neumann 问题进行了研究并推广到一些情形. 受上述研究的启发，本文讨论此类带有变指数增长的问题(1)的可解性.

问题(1)对应的泛函为

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|u|^{p(x)}\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$$

其中 $u \in H^1(\Omega)$，

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$$

由文献[10]知，$H^1(\Omega)$ 可作直和分解

$$H^1(\Omega) = \mathbb{R} \oplus V$$

其中

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega): \int_\Omega v\mathrm{d}x = 0\right\}$$

对 $u \in H^1(\Omega)$，有 $u = t + v$，其中 $v \in V$，

$$t = \int_\Omega u\mathrm{d}\mu(x) \qquad \mathrm{d}\mu(x) = |\Omega|^{-1}\mathrm{d}x$$

在 $H^1(\Omega)$ 上，定义等价范数 $\|u\|_V^2 = t^2 + \|\nabla v\|_2^2$. 类似文献[11]，有如下引理：

引理 1 假设 $\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}\mathrm{d}x < 0$，则存在 $\eta > 0$，使得对 $\forall t \in \mathbb{R}$，$v \in V$，当

$$\left(\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \eta|t|$$

时，有

$$\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t+v|^{p(x)}\mathrm{d}x \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t|^{p^-}\mathrm{d}x, \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t|^{p^+}\mathrm{d}x\right\}$$

证 若不然，则对 $\forall n \in \mathbb{N}$，存在 $t_n \in \mathbb{R}$，$v_n \in V$，使得当

$$\left(\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n}|t_n|$$

时，有

$$\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t_n+v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t_n|^{p^-}\mathrm{d}x \tag{3}$$

或

$$\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t_n+v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}|t_n|^{p^+}\mathrm{d}x \tag{4}$$

令 $\omega_n = |t_n|^{-1}v_n$，由 $\left(\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n}|t_n|$ 知，当 $n \to \infty$ 时，在 $L^2(\Omega)$ 上 $\nabla\omega_n \to 0$. 由嵌入定理知，当 $n \to \infty$ 时，在 $L^{p^-}(\Omega)$ 和 $L^{p^+}(\Omega)$ 上 $\omega_n \to 0$.

当 $|t_n| \geqslant 1$ 时，对 $\forall x \in \Omega$，$1 \leqslant |t_n|^{p(x)-p^-} \leqslant |t_n|^{p^+-p^-}$. (3)式两边同时除以 $|t_n|^{p^-}$，注意到 $\int_\Omega \frac{Q(x)}{p(x)}\mathrm{d}x < 0$，可得

$$\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |1+\omega_n|^{p(x)} \mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |1+\omega_n|^{p(x)} |t_n|^{p(x)-p^-} \mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

由 ω_n 在 $L^{p^-}(\Omega)$ 和 $L^{p^+}(\Omega)$ 上均趋于 0 知

$$\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

此与 $\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x < 0$ 矛盾.

当 $|t_n| \leqslant 1$ 时，对 $\forall x \in \Omega$，$|t_n|^{p^+-p^-} \leqslant |t_n|^{p(x)-p^-} \leqslant 1$. (4) 式两边同时除以 $|t_n|^{p^-}$，可得

$$|t_n|^{p^+-p^-} \int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |1+\omega_n|^{p(x)} \mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |1+\omega_n|^{p(x)} |t_n|^{p(x)-p^-} \mathrm{d}x > \frac{|t_n|^{p^+-p^-}}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

即

$$\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |1+\omega_n|^{p(x)} \mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

同样，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

亦与 $\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x < 0$ 矛盾.

综上所述，引理 1 的结论成立.

引理 2 假设条件(f_1),(f_2)和(2)式成立，则存在 $\lambda^*, \beta, \rho > 0$，使得对任意 $\lambda \in (0, \lambda^*)$，有：

(i) 当 $\|u\|_V = \rho$ 时，$J_\lambda(u) \geqslant \beta$；

(ii) $\inf\limits_{\|u\|_V \leqslant \rho} J_\lambda(u) < 0$；

(iii) 存在 $\omega \in H^1(\Omega)$，使得 $\|\omega\| \geqslant \rho$，$J_\lambda(\omega) \leqslant 0$.

证 (i) 当 $|t| \leqslant 1$ 时，对某一固定的 $\eta > 0$，若 $\|\nabla v\|_2 \leqslant \eta |t|$，则 $t^2 \geqslant \frac{\rho^2}{1+\eta^2}$. 由引理 1 可知

$$\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |t+v|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |t|^{p^-} \mathrm{d}x = -A|t|^{p^-}$$

其中

$$A = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x > 0$$

因此

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \int_{\Omega} \frac{Q(x)}{p(x)} |u|^{p(x)} \mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x \geqslant A|t|^{p^-} - \lambda\int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x \geqslant \frac{A\rho^{p^-}}{(1+\eta^2)^{\frac{p^-}{2}}} - \lambda\int_{\Omega} F(x, u)\mathrm{d}x \tag{5}$$

若 $\|\nabla v\|_2 > \eta |t|$，由 $\|u\|_V^2 = t^2 + \|\nabla v\|_2^2$ 知

$$\|u\|_V \leqslant \|\nabla v\|_2 \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

由 Sobolev 不等式知，当 $\|u\|_V = \rho < 1$ 时，存在常数 $C_1 > 0$，使得

$$\left|\int_{\Omega} Q(x) |u|^{p(x)} \mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{x \in \overline{\Omega}}\{|Q(x)|\}\int_{\Omega} |u|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant \max_{x \in \overline{\Omega}}\{|Q(x)|\}\int_{\Omega} (|u|^{p^-} + |u|^{p^+})\mathrm{d}x \leqslant$$

$$C_1(\|u\|_V^{p^-}+\|u\|_V^{p^+})\leqslant 2C_1\|u\|_V^{p^-}\leqslant$$

$$2C_1\|\nabla v\|_2^{p^-}\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{p^-}{2}}$$

故当 $\|u\|_V=\rho<1$ 时，

$$J_\lambda(u)\geqslant\frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2-\frac{2C_1}{p^-}\|\nabla v\|_2^{p^-}\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{p^-}{2}}-\lambda\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$$

取

$$\|\nabla v\|_2\leqslant\rho\leqslant\min\left\{1,\left(\frac{p^-}{8C_1\left(1+\frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{p^-}{2}}}\right)^{\frac{1}{p^--2}}\right\}$$

就有

$$J_\lambda(u)\geqslant\frac{1}{4}\|\nabla v\|_2^2-\lambda\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$$

由 $\|u\|_V=\rho$ 和(6)式，有

$$J_\lambda(u)\geqslant\frac{\rho^2\eta^2}{4(1+\eta^2)}-\lambda\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \tag{7}$$

由条件(f_1)知，存在常数 $C(\rho)>0$，使得

$$\int_\Omega|F(x,u)|\mathrm{d}x\leqslant C(\rho)$$

因而，对 $\|u\|_V=\rho$，存在 $\lambda^*>0$，当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时，有

$$J_\lambda(u)\geqslant\min\left\{\frac{\rho^2\eta^2}{4(1+\eta^2)},\frac{A\rho^{p^-}}{(1+\eta^2)^{\frac{p^-}{2}}}\right\}-\lambda C(\rho)\geqslant\frac{1}{2}\min\left\{\frac{\rho^2\eta^2}{4(1+\eta^2)},\frac{A\rho^{p^-}}{(1+\eta^2)^{\frac{p^-}{2}}}\right\}=\beta$$

(ⅱ) 由条件(f_2)知，对任一给定的 $M>0$，存在 $t_0\in(0,1)$，当 $0<t<t_0$ 时，$F(x,t)\geqslant\frac{t^2M}{2}$. 故

$$J_\lambda(t)\leqslant-\int_\Omega\frac{Q(x)|t|^{p(x)}}{p(x)}\mathrm{d}x-\frac{t^2}{2}\lambda M|\Omega|\leqslant$$

$$-\frac{|t|^{p^+}}{p^+}\int_{\Omega_1}Q(x)\mathrm{d}x-\frac{|t|^{p^-}}{p^-}\int_{\Omega_2}Q(x)\mathrm{d}x-\frac{t^2}{2}\lambda M|\Omega|\leqslant$$

$$-\frac{|t|^{p^-}}{p^-}\int_{\Omega_2}Q(x)\mathrm{d}x-\frac{t^2}{2}\lambda M|\Omega|$$

由 $p^->2$ 知，当 t_0 充分小时，$J_\lambda(t)<0$，从而 $\inf\limits_{\|u\|_V\leqslant\rho}J_\lambda(u)<0$.

(ⅲ) 令 $v_0\in\mathrm{supp}\{\Omega_1\}(v_0\neq0)$，当 $t>1$ 时，

$$J_\lambda(tv_0)=\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla v_0|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{Q(x)t^{p(x)}|v_0|^{p(x)}}{p(x)}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega F(x,tv_0)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla v_0|^2\mathrm{d}x-\int_{\Omega_1}\frac{Q(x)t^{p(x)}|v_0|^{p(x)}}{p(x)}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega F(x,tv_0)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla v_0|^2\mathrm{d}x-\frac{|t|^{p^-}}{p^+}\int_{\Omega_1}Q(x)|v_0|^{p(x)}\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega F(x,tv_0)\mathrm{d}x$$

由 $\mathrm{mes}(\Omega_1)>0$，则

$$\int_{\Omega_1}Q(x)|v_0|^{p(x)}\mathrm{d}x>0$$

注意到 $p^->2$，当 $t\to\infty$ 时，$J_\lambda(tv_0)\to-\infty$. 取 t_1 充分大，使得 $\omega=t_1v_0$ 满足 $\|\omega\|\geqslant\rho$，则 $J_\lambda(\omega)<0$.

引理 3 假设条件(f_1),(f_2)和(2)式成立，则存在$\Lambda^*>0$，使得$0<\lambda<\Lambda^*$时，J_λ满足(PS)条件.

证 设$\{u_n\}$是$H^1(\Omega)$中的任一(PS)序列，则存在$c>0$，使得当$n\to\infty$时，有

$$J_\lambda(u_n)\to c \qquad J'_\lambda(u_n)\to 0 \tag{8}$$

下证$\{u_n\}$有界. 假设$\|u_n\|\to\infty$，令$v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，则有$\|v_n\|=1$. 故存在$v\in H^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} v_n\rightharpoonup v & x\in H^1(\Omega) \\ v_n\to v & x\in L^q(\Omega)(1\leqslant q<2^*) \\ v_n(x)\to v(x) & \text{a. e. } x\in\Omega \end{cases}$$

由(8)式可得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{Q(x)}{p(x)}\|u_n\|^{p(x)-2}|v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x-\lambda\|u_n\|^{-2}\int_\Omega F(x,v_n\|u_n\|)\mathrm{d}x=o(1) \tag{9}$$

$$\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega Q(x)\|u_n\|^{p(x)-2}|v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x-\lambda\|u_n\|^{-1}\int_\Omega f(x,v_n\|u_n\|)v_n\mathrm{d}x=o(1) \tag{10}$$

由条件(f_1)知

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{F(x,v_n\|u_n\|)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{\int_0^{u_n}f(x,s)\mathrm{d}s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\leqslant \\ \int_\Omega\frac{a\int_0^{u_n}|s|^\sigma\mathrm{d}s}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{a|u_n|^{\sigma+1}}{(\sigma+1)\|u_n\|^2}\mathrm{d}x= \\ \int_\Omega\frac{a\|v_n\|^{\sigma+1}}{(\sigma+1)\|u_n\|^{1-\sigma}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于$\|v_n\|=1$，则存在$C\geqslant 0$，使得

$$\int_\Omega\frac{a\|v_n\|^{\sigma+1}}{(\sigma+1)}\mathrm{d}x\leqslant C$$

故当$n\to\infty$时，

$$\int_\Omega\frac{F(x,v_n\|u_n\|)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x\to 0$$

类似地可以推出，当$n\to\infty$时，

$$\int_\Omega\frac{f(x,v_n\|u_n\|)v_n}{\|u_n\|}\mathrm{d}x\to 0$$

由此，

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{Q(x)}{p(x)}\|u_n\|^{p(x)-2}|v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x=o(1)$$

$$\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega Q(x)\|u_n\|^{p(x)-2}|v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x=o(1)$$

则当$n\to\infty$时，可得

$$\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\to 0 \qquad \int_\Omega Q(x)\|u_n\|^{p(x)-2}|v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\to 0$$

由$\int_\Omega|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\to 0$知，$v=l$($l$为常数)，由$\int_\Omega Q(x)\|u_n\|^{p(x)-2}|v_n|^{p(x)}\mathrm{d}x\to 0$知，$\int_\Omega Q(x)|l|^{p(x)}=0$. 故可得$l=0$和$v_n\to 0$，与$\|v_n\|=1$矛盾，故$\{u_n\}$在$H^1(\Omega)$上有界. 故存在一个收敛子列(仍记为$\{u_n\}$)和$u\in H^1(\Omega)$，使得当$n\to\infty$时，有

$$\begin{cases} u_n\rightharpoonup u & x\in H^1(\Omega) \\ u_n\to u & x\in L^q(\Omega)(1\leqslant q<2^*) \\ u_n(x)\to u(x) & \text{a. e. } x\in\Omega \end{cases}$$

取任意的 $i,j \in \mathbb{N}$，就有

$$\begin{aligned}\| u_i - u_j \|^2 = &\int_\Omega (u_i - u_j)^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega (\nabla u_i - \nabla u_j)^2 \mathrm{d}x = \\ &\langle J_\lambda'(u_i) - J_\lambda'(u_j),\ u_i - u_j \rangle + \int_\Omega (u_i - u_j)^2 \mathrm{d}x + \\ &\int_\Omega Q(x)(| u_i |^{p(x)-1} - | u_j |^{p(x)-1})(u_i - u_j) \mathrm{d}x + \\ &\lambda \int_\Omega (f(x,\ u_i) - f(x,\ u_j))(u_i - u_j) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

又因为

$$\langle J_\lambda'(u_i) - J_\lambda'(u_j),\ u_i - u_j \rangle \to 0 \qquad \int_\Omega (u_i - u_j)^2 \mathrm{d}x \to 0$$

$$\int_\Omega Q(x)(| u_i |^{p(x)-1} - | u_j |^{p(x)-1})(u_i - u_j) \mathrm{d}x \leqslant C \int_\Omega (| u_i |^{p(x)-1} - | u_j |^{p(x)-1})(u_i - u_j) \mathrm{d}x \to 0$$

$$\lambda \int_\Omega (f(x,\ u_i) - f(x,\ u_j))(u_i - u_j) \mathrm{d}x \leqslant a\lambda \int_\Omega (| u_i |^\sigma - | u_j |^\sigma)(u_i - u_j) \mathrm{d}x \to 0$$

所以当 $i,j \to \infty$ 时，$\| u_i - u_j \| \to 0$，故 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\Omega)$ 中存在强收敛的子列，引理 3 得证.

定理 1　假设条件(f_1)，(f_2) 和(2) 式成立，则存在 $\lambda^* > 0$，使得 $0 < \lambda < \lambda^*$，那么问题(1) 有两个非平凡解.

证　由引理 2 知

$$\widetilde{c_\lambda} = \inf_{\| u \| \leqslant \rho} J_\lambda(u) < 0 < \inf_{\| u \| = \rho} J_\lambda(u)$$

在 $\{u:\ \| u \|_V \leqslant \rho\}$ 上运用 Ekeland's 变分原理[16]，获得问题(1) 有一个解 u_1，满足 $J_\lambda(u_1) = \widetilde{c_\lambda} < 0$. 由引理 2 知，$J_\lambda(u)$ 具有山路几何结构. 由引理 3 知，当 $\lambda^* > 0$，$\lambda \in (0,\ \lambda^*)$ 时，$J_\lambda(u)$ 满足(PS) 条件. 令

$$\Gamma = \{g \in C[0,\ 1],\ H^1(\Omega):\ g(0) = 0,\ g(1) = \omega\} \qquad c_\lambda = \inf_{g \in \Gamma,\ t \in [0,\ 1]} \max J_\lambda(g(t))$$

由山路引理知，问题(1) 存在另一个解 u_2，满足 $J_\lambda(u_2) = c_\lambda > 0$. 由于

$$J_\lambda(u_1) < 0 = J_\lambda(0) < J_\lambda(u_2)$$

故 u_1 和 u_2 是问题(1) 的两个不同的非平凡解.

参考文献：

[1] GASIЙSKI L, PAPAGEORGIOU N S. Positive Solutions for the Neumann p-Laplacian with Superdiffusive Reaction [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2017, 40(4): 1711-1731.

[2] FARACI F. Multiplicity Results for a Neumann Problem Involving the p-Laplacian [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 277(1): 180-189.

[3] ANELLO G, CORDARO G. An Existence Theorem for the Neumann Problem Involving the p-Laplacian [J]. Journal of Convex Analysis, 2003, 10(1): 185-198.

[4] BARLETTA G, CHINNI A. Existence of Solutions for a Neumann Problem Involving the $p(x)$-Laplacian [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2013, 2013(158): 1-12.

[5] YAO J H, WANG X Y. On an Open Problem Involving the $p(x)$-Laplacian ——A Further Study on the Multiplicity of Weak Solutions to $p(x)$-Laplacian Equations [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(4): 1445-1453.

[6] DA SILVA J P P. On Some Multiple Solutions for a $p(x)$-Laplacian Equation with Critical Growth [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 436(2): 782-795.

[7] SAINTIER N, SILVA A. Local Existence Conditions for an Equations Involving the $p(x)$-Laplacian with Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Differentia Equations and Applications, 2017, 24(1): 1-36.

[8] FAN X L, HAN X Y. Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Analysis, 2004, 59(3): 173-188.

[9] 杨晓梅，路艳琼. 一类变系数二阶离散 Neumann 边值问题正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(11)：18-27.

[10] 冯 敏，周 军. 一类带有奇异项的非局部抛物方程解的爆破 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(7)：124-129.

[11] BERESTYCKI H，CAPUZZO D I，NIRENBERG L. Variational Methods for Indefinite Superlinear Homogeneous Elliptic Problems [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications，1995，2(4)：553-572.

[12] CHABROWSKI J. The Critical Neumann Problem for Semilinear Elliptic Equations with Concave Perturbations [J]. Ricerche Di Matematica，2007，56(2)：297-319.

[13] CHABROWSKI J. On the Neumann Problem with Singular and Superlinear Nonlinearities [J]. Communications in Applied Analysis，2009，13(3)，327-340.

[14] CHABROWSKI J，TINTAREV C. An Elliptic Problem with an Indefinite Nonlinearity and a Parameter in the Boundary Condition [J]. Nonlinear Differential Equations Applications，2014，21(4)：519-540.

[15] CHABROWSKI J. On the Neumann Problem with a Nonlinear Boundary Condition [J]. Annals of University of Bucharest，2011，2(Lx)：27-51.

[16] EKELAND I. On the Variational Principle [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1974，47(2)：324-353.

[17] RABINOWITZ P. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，1986：9-21.

A Class of Neumann Problems with Variable Exponential Growth

MENG Lu， CHU Chang-mu， LEI Jun

College of Data Science and Information Engineering，Guizhou Minzu University，Guiyang 550025，China

Abstract：In this paper，we consider a class of semilinear Neumann boundary value problems with variable sign potential function and variable exponent. Using the space decomposition technique and some properties of sign-changing potential function，we prove that the functional of such problems satisfies the (PS) conditions and has astructure of mountain pass geometry. With the variational method，we obtain the existence of two nontrivial solutions of these problems.

Key words：Neumann boundary value problem；variable exponential growth；sign-changing potential；variational method

责任编辑 廖 坤