DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.06.012

圆周上的小 Hankel 算子

李永宁[1,2]，　梁焕超[1]，　丁宣浩[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067

摘要：设 u 为非常值的内函数，单位圆周上的小 Hankel 算子是从 uH^2 到 $\overline{zH^2}$ 的线性算子，可视为由经典的 Hardy 空间上的 Hankel 算子在 uH^2 上的限制得到的算子，但其性质与 Hardy 空间上的 Hankel 算子的性质仍有一定的差别. 根据 Hardy 空间上经典的 Hankel 算子理论，完全刻画了 uH^2 上的小 Hankel 算子的有界性、有限秩性质以及两个小 Hankel 算子的乘积的有限秩性质.

关　键　词：小 Hankel 算子；有界性；有限秩；Hardy 空间

中图分类号：177.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2021)06-0089-06

记 $\mathbb{D}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开单位圆盘，$\partial\mathbb{D}$ 是单位圆周. 记 $\mathrm{d}\theta$ 为 $\partial\mathbb{D}$ 上的弧长测度，$L^p(\partial\mathbb{D})$ 表示由 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ 诱导的 Lebesgue 空间. Hardy 空间 $H^p(0<p<\infty)$ 是由 $\mathbb{D}$ 上满足条件

$$\|f\|_p^p=\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p\mathrm{d}\theta<\infty$$

的解析函数在 $\|\cdot\|_p$ 范数下构成的赋范线性空间. 当 $p=\infty$ 时，H^∞ 表示 $\mathbb{D}$ 上的有界解析函数空间，且 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{0<r<1}\{|f(z)|:z\in\mathbb{D}\}$. 根据 Fatou 定理与调和延拓定理[1]，$H^p$ 等距同构于 $L^p(\partial\mathbb{D})$ 的一个闭子空间. 在不加说明的情况下，本文将 H^2 视为 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 的一个闭子空间，并将 $L^p(\partial\mathbb{D})$ 简记为 L^p.

设 $P: L^2\longrightarrow H^2$ 为正交投影，对 $\varphi\in L^\infty$，$f\in H^2$，$T_\varphi f=P(\varphi f)$ 为 Hardy 空间 H^2 上以 φ 为符号的 Toeplitz 算子. 记 $P_-=I-P$，$H_\varphi f=P_-(\varphi f)$ 为 H^2 上以 φ 为符号的 Hankel 算子. 对 $g\in L^2$，$M_\varphi g=\varphi g$ 为 L^2 上以 φ 为符号的乘法算子. 对任意的 $h\in(H^2)^\perp$，$S_\varphi h=P_-(\varphi h)$ 为从 $(H^2)^\perp$ 到 $(H^2)^\perp$ 的以 φ 为符号的对偶 Toeplitz 算子. 则 M_φ 在 $L^2=H^2\oplus(H^2)^\perp$ 上有如下形式的表示：

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}T_\varphi & H_{\bar{\varphi}}^*\\ H_\varphi & S_\varphi\end{pmatrix}$$

设 u 为非常值的内函数，则 $K_u^2=H^2\ominus uH^2$ 为模型空间，正交补空间 $(K_u^2)^\perp=uH^2\oplus\overline{zH^2}$ 是一个调和函数 Hilbert 空间. 文献[2]类比了 Hardy 空间上经典 Toeplitz 算子的定义，引入了 $(K_u^2)^\perp$ 上的 Toeplitz

收稿日期：2020-03-24
基金项目：国家自然科学基金项目(11871122)；重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0595，cstc2020jcyj-msxmX0318)；重庆工商大学基金项目(2053010).
作者简介：李永宁，讲师，博士，主要从事函数空间上的算子理论的研究.
通信作者：丁宣浩，教授.

算子,并称其为对偶截断 Toeplitz 算子,该算子的定义如下:对任意的 $\varphi \in L^{\infty}$,$x \in (K_u^2)^{\perp}$,以 φ 为符号的对偶截断 Toeplitz 算子 D_{φ} 定义为 $D_{\varphi}x = Q_u(\varphi x)$,其中 $Q_u = M_u P M_{\bar{u}} + P_-: L^2 \longrightarrow (K_u^2)^{\perp}$ 为正交投影. 则在 $(K_u^2)^{\perp} = uH^2 \oplus \overline{zH^2}$ 上,D_{φ} 有如下的分解形式:

$$D_{\varphi} = \begin{pmatrix} t_{\varphi} & b_{\bar{\varphi}}^{*} \\ b_{\varphi} & S_{\varphi} \end{pmatrix}$$

其中,对任意的 $y \in uH^2$,$t_{\varphi}: uH^2 \longrightarrow uH^2$ 定义为 $t_{\varphi}y = uP(\bar{u}\varphi y)$,被称为小 Toeplitz 算子,$b_{\varphi}: uH^2 \longrightarrow \overline{zH^2}$ 定义为 $b_{\varphi}y = P_-(\varphi y)$,被称为小 Hankel 算子[3]. 一方面,小 Toeplitz 算子与小 Hankel 算子的引入使得 D_{φ} 在 $(K_u^2)^{\perp}$ 上的表示与 M_{φ} 在 L^2 上的表示在形式上一致;但另一方面,D_{φ} 与 M_{φ} 的性质差别却很大,例如:对任意的 $\varphi, \psi \in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$,总有 $M_{\varphi}M_{\psi} = M_{\varphi\psi} = M_{\psi}M_{\varphi}$,而 $D_{\varphi}D_{\psi} = D_{\varphi\psi}$ 和 $D_{\varphi}D_{\psi} = D_{\psi}D_{\varphi}$ 在一般情况下并不成立,反例的构造具体可见文献[4]. 经过分析,由于 $M_{\bar{u}}t_{\varphi}M_u = T_{\varphi}$,从而 t_{φ} 与 T_{φ} 是酉等价的,因此 t_{φ} 的基本性质和 T_{φ} 一致,则使得 D_{φ} 与 M_{φ} 的性质差别较大的原因在于小 Hankel 算子与 Hankel 算子的性质有一定差异. 对于小 Hankel 算子,易知 $b_{\varphi} = H_{\varphi}|_{uH^2}$,这表明小 Hankel 算子的某些性质可以直接由 Hankel 算子的性质得到. 但反过来,小 Hankel 算子具有的性质对于 Hankel 算子却不一定成立. 所以本文讨论小 Hankel 算子的一些基本性质是很有意义且必要的.

已知 $\{uz^n: n \geqslant 0\}$ 为 uH^2 的一组标准正交基,且 $\{\bar{z}^m: m \geqslant 1\}$ 为 $(H^2)^{\perp} = \overline{zH^2}$ 的一组标准正交基,则对任意的 $i \geqslant 1$,$j \geqslant 0$,通过简单计算可知

$$a_{ij} = \langle b_{\varphi}uz^j, \bar{z}^i \rangle = \langle P_- \varphi uz^j, \bar{z}^i \rangle = \langle \varphi uz^j, \bar{z}^i \rangle = \langle \varphi u, \bar{z}^{i+j} \rangle = \widehat{\varphi u}(-(i+j))$$

这里,$\widehat{\varphi u}(n)$ 为 φu 的 n 次傅里叶系数,因此,$b_{\varphi} = \langle a_{ij} \rangle$ 在一组标准正交基 $\{uz^n: n \geqslant 0\}$ 下的表示是 Hankel 矩阵形式,即该矩阵的每条斜对角线上的元素均为常值. Hankel 矩阵是由文献[5]引入的,而且文献[5]最先发现了有限维 Hankel 矩阵的行列式的一些有趣的代数性质. 由上述计算可知:Hankel 算子在其所在空间的一组规范正交基下的矩阵表示是一个 Hankel 矩阵. 文献[6]刻画了有限秩的 Hankel 矩阵,这是第一个有关 Hankel 矩阵的分析结果. 对于 Hardy 空间上的 Hankel 算子,一个非常重要的基本结果是 Nehari 定理[7],该定理完全刻画了 Hankel 算子的有界性. 由于 Hankel 算子与 Toeplitz 算子及乘法算子之间的紧密联系以及其在分析学、控制理论[8]、工程学等领域的重要应用,直到现在,关于不同的函数空间上的 Hankel 算子的研究仍十分活跃. 有关 Hankel 算子更全面的介绍和更深入的讨论,可以参考文献[9-17]. 受到 Hardy 空间上 Hankel 算子的研究结果的启发,本文中,我们主要研究了 uH^2 上的小 Hankel 算子的一些基本性质,例如:有界性、有限秩性质等.

1 预备知识

本节我们主要回顾经典的 Hardy 空间上 Hankel 算子的基本性质,例如有界性,有限秩性质等,这与我们下节中所要探讨的 uH^2 上的小 Hankel 算子的一些基本性质密切相关.

引理 1[7] 若 $\varphi \in L^2(\partial\mathbb{D})$,则 H_{φ} 是有界的当且仅当存在 $g \in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$ 使得 $H_{\varphi} = H_g$.

著名的 Kronecker 定理[6] 完全描述了有限秩的 Hankel 算子,该定理表明 Hankel 算子 T 是有限秩的当且仅当存在 $h \in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$ 及有限 Blaschke 积 u,使得 $T = H_{\overline{zug}}$. Kronecker 定理揭示了有限秩的 Hankel 算子与有理函数之间的关系. 在这里,本文引用另一版本的 Kronecker 定理如下:

引理 2[6] 若 $\varphi \in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$,则 H_{φ} 是有限秩的当且仅当存在一个非零的解析多项式 $a(z)$ 使得 $a\varphi \in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$.

2　小 Hankel 算子的基本性质

本节我们主要讨论 uH^2 上小 Hankel 算子的一些基本性质，例如有界性，有限秩性质等. 显然地，根据小 Hankel 算子的定义，通过标准的计算，我们可得：

命题 1　对任意的 $y \in zH^2$，$b_{\varphi}^{*}\overline{y} = uP\overline{u}\,\overline{\varphi}\,\overline{y} = M_u H_{u\varphi}^{*}\overline{y}$，且 $b_{\varphi}^{*} \neq b_{\overline{\varphi}}$.

命题 2　若 $\varphi \in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$，则 $b_{\varphi} = 0$.

从经典的 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子乘积与 Hankel 算子乘积的关系出发，我们得到了 uH^2 上的小 Toeplitz 算子乘积与小 Hankel 算子乘积之间的关系式. 该关系式在后面研究小 Hankel 算子的有限秩性质时发挥了重要作用.

命题 3　设 u 为非常数值的内函数，且 $\varphi, \psi \in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$，则

$$t_{\varphi\psi} - t_{\varphi\bar{u}} t_{u\psi} = b_{\bar{\varphi}}^{*} b_{\psi\bar{u}}$$

证　根据 Hardy 空间上 Toeplitz 算子与 Hankel 算子之间的关系

$$T_{\varphi\psi} - T_{\varphi} T_{\psi} = H_{\bar{\varphi}}^{*} H_{\psi} \tag{1}$$

则对任意的 $x \in H^2$，$ux \in uH^2$，将 ux 代入(1)式，可得

$$P\varphi\psi ux - P\varphi P\psi ux = P\varphi P_{-}\psi ux \tag{2}$$

现在，将算子 $PM_{\bar{u}}$ 作用在(2)式的两端，得到

$$P\bar{u}P\varphi\psi ux - P\bar{u}P\varphi P\psi ux = P\bar{u}P\varphi P_{-}\psi ux \tag{3}$$

注意到

$$P\bar{u}P\varphi\psi ux = P\bar{u}(I - P_{-})\varphi\psi ux = P\bar{u}\varphi\psi ux - P\bar{u}P_{-}\varphi\psi ux = P\bar{u}\varphi\psi ux \tag{4}$$

运用相同的技巧，可得

$$P\bar{u}P\varphi P\psi ux = P\bar{u}\varphi P\psi ux \tag{5}$$

$$P\bar{u}P\varphi P_{-}\psi ux = P\bar{u}\varphi P_{-}\psi ux \tag{6}$$

将等式(4)—(6)代入等式(3)中，则等式(3)可变形为

$$P\bar{u}\varphi\psi ux - P\bar{u}\varphi P\psi ux = P\bar{u}\varphi P_{-}\psi ux \tag{7}$$

现在将算子 M_u 作用在(7)式的两端，则可得

$$uP\bar{u}\varphi\psi ux - uP\bar{u}\varphi P\psi ux = uP\bar{u}\varphi P_{-}\psi ux$$

这意味着

$$t_{\varphi\psi}ux - t_{\varphi\bar{u}} t_{u\psi} ux = b_{\bar{\varphi}}^{*} b_{\psi\bar{u}} ux$$

因此，我们就得到了 uH^2 上的小 Toeplitz 算子与小 Hankel 算子之间的关系

$$t_{\varphi\psi} - t_{\varphi\bar{u}} t_{u\psi} = b_{\bar{\varphi}}^{*} b_{\psi\bar{u}} \tag{8}$$

证毕.

由 $M_{\varphi}M_{\psi} = M_{\varphi\psi} = M_{\psi}M_{\varphi}$ 以及乘法算子在 L^2 上的表示可知 $H_{\varphi\psi} = H_{\varphi}T_{\psi} + S_{\varphi}H_{\psi}$，从而当 $\varphi \in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$ 时，$H_{\varphi\psi} = H_{\psi}T_{\varphi} = S_{\varphi}H_{\psi}$. 虽然 $D_{\varphi}D_{\psi} = D_{\psi}D_{\varphi}$ 和 $D_{\varphi}D_{\psi} = D_{\varphi\psi}$ 在一般情况下并不成立，但通过直接计算，关于小 Toeplitz 算子和小 Hankel 算子，我们得到了类似的结果.

命题 4　若 $\varphi \in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$，则 $b_{\varphi\psi} = b_{\psi}t_{\varphi} = S_{\varphi}b_{\psi}$.

证　对任意的 $x \in H^2$，$ux \in uH^2$，由于 $b_{\varphi\psi}ux = P_{-}(\varphi\psi ux)$，而且

$$b_{\psi}t_{\varphi}ux = b_{\psi}uP\bar{u}\varphi ux = b_{\psi}uP\varphi x = P_{-}(\psi uP\varphi x) = P_{-}(\psi u(I - P_{-})\varphi x) = P_{-}(\psi u\varphi x) - P_{-}(\psi uP_{-}\varphi x)$$

又因为 $x \in H^2$，$\varphi \in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$，故 $\varphi x \in H^2$，从而 $P_{-}\varphi x = 0$，因此 $b_{\psi}t_{\varphi}ux = P_{-}(\psi u\varphi x)$，故 $b_{\psi}t_{\varphi} = b_{\varphi\psi}$.

类似地，因为

$$S_{\varphi}b_{\psi}ux=P_{-}(\varphi P_{-}(\psi ux))=P_{-}(\varphi(I-P)(\psi ux))=P_{-}(\varphi\psi ux)-P_{-}(\varphi P(\psi ux))$$

而且由 $\varphi\in H^{\infty}(\partial\mathbb{D})$ 知 $\varphi P(\psi ux)\in H^{2}$，故 $P_{-}(\varphi P(\psi ux))=0$. 从而 $S_{\varphi}b_{\psi}ux=P_{-}(\varphi\psi ux)=b_{\varphi\psi}ux$，因此 $S_{\varphi}b_{\psi}=b_{\varphi\psi}$. 则有 $b_{\varphi\psi}=b_{\psi}t_{\varphi}=S_{\varphi}b_{\psi}$.
故命题 4 得证.

算子的有界性是算子理论中非常基本且重要的问题，所以关于小 Hankel 算子在什么条件下是有界算子的问题是我们需要最先解决的问题. 下述定理给出了小 Hankel 算子的有界性的完全刻画：

定理 1 若 $\varphi\in L^{2}(\partial\mathbb{D})$，则 b_{φ} 是有界的当且仅当存在 $g\in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$ 使得 $H_{\varphi u}=H_{g}$.

证 由于

$$\begin{aligned}\|b_{\varphi}\|=&\sup\{\|b_{\varphi}x\|:\|x\|\leqslant 1,\ x\in uH^{2}\}=\\&\sup\{\|P_{-}\varphi x\|:\|x\|\leqslant 1,\ x\in uH^{2}\}=\\&\sup\{\|P_{-}\varphi ux\|:\|x\|\leqslant 1,\ x\in H^{2}\}=\\&\|H_{\varphi u}\|\end{aligned}$$

所以 b_{φ} 是有界的当且仅当 $H_{\varphi u}$ 是有界的，则由引理 1 知，b_{φ} 是有界算子充要条件为：存在 $g\in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$ 使得 $H_{\varphi u}=H_{g}$.

对于任意的 $\varphi,\psi\in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$，关于小 Hankel 算子，我们主要考虑以下两个问题：

问题 1 在什么条件下，b_{φ} 是有限秩算子?

问题 2 在什么条件下，$b_{\bar\varphi}^{*}b_{\psi}$ 是有限秩算子?

对于上述两个问题，根据 Hardy 空间上有限秩的 Hankel 算子的刻画以及 Hankel 算子与小 Hankel 算子之间的关系，我们得到如下结果：

定理 2 若 $\varphi\in L^{\infty}(\partial\mathbb{D})$，则 b_{φ} 是有限秩算子当且仅当存在解析多项式 $a(z)$，使得 $a(z)\varphi(z)u(z)\in H^{\infty}(\partial D)$.

证 对任意的 $x\in H^{2}$，有 $ux\in uH^{2}$，则

$$b_{\varphi}ux=P_{-}\varphi ux=H_{\varphi u}x$$

从而，b_{φ} 为有限秩算子当且仅当 $H_{\varphi u}$ 为有限秩算子. 因此，根据引理 2，b_{φ} 为有限秩算子当且仅当存在解析多项式 $a(z)$，使得 $a(z)\varphi(z)u(z)\in H^{\infty}(\partial D)$.

下述例 1 表明：存在 $\varphi\in L^{\infty}(\partial D)$，使得小 Hankel 算子 b_{φ} 是有限秩算子，但 Hankel 算子 H_{φ} 却不是有限秩的.

例 1 设 φ_{1} 为有理函数，u 是非有理函数的内函数. 令 $\varphi=\varphi_{1}\bar{u}$，根据定理 2，易知 b_{φ} 是有限秩算子. 但 H_{φ} 不是有限秩的.

定理 3 $b_{\bar\varphi}^{*}b_{\psi}$ 为有限秩算子当且仅当下述情况之一成立：

(i) 存在某个解析多项式 $a(z)$，使得 $a(z)\overline{\varphi}(z)u(z)\in H^{\infty}$；

(ii) 存在某个解析多项式 $b(z)$，使得 $b(z)u^{2}(z)\overline{\psi}(z)\in H^{\infty}$.

证 根据等式(8)，有 $b_{\bar\varphi}^{*}b_{\psi}=b_{\bar\varphi}^{*}b_{(\psi u)\bar u}=t_{\varphi\psi u}-t_{\varphi\bar u}t_{u^{2}\psi}$，从而 $b_{\bar\varphi}^{*}b_{\psi}$ 为有限秩算子当且仅当 $t_{\varphi\psi u}-t_{\varphi\bar u}t_{u^{2}\psi}$ 为有限秩算子. 对任意的 $x\in H^{2}$，$ux\in uH^{2}$，有

$$\begin{aligned}(t_{\varphi\psi u}-t_{\varphi\bar u}t_{u^{2}\psi})ux=&uP\bar{u}\varphi u\psi ux-uP\bar{u}\varphi\bar{u}uP\bar{u}u^{2}\psi ux=\\&uP\varphi\psi ux-uP\bar{u}\varphi Pu\psi ux=\\&(uP\varphi\psi u)x-(uP\bar{u}\varphi Pu^{2}\psi)x=\end{aligned}$$

$$M_u T_{u\varphi\psi}x - M_u T_{\bar{u}\varphi} T_{u^2\psi}x =$$
$$M_u(T_{u\varphi\psi}x - T_{\bar{u}\varphi} T_{u^2\psi})x$$

由于 M_u 是等距算子，若 $t_{\varphi\psi u} - t_{\bar{\varphi u}} t_{u^2\psi}$ 为有限秩算子，则 $T_{u\varphi\psi}x - T_{\bar{u}\varphi} T_{u^2\psi}$ 是有限秩的. 又因为

$$T_{u\varphi\psi}x - T_{\bar{u}\varphi} T_{u^2\psi} = T_{\bar{u}}(T_{u^2\varphi\psi} - T_{\varphi} T_{u^2\psi}) = T_{\bar{u}} H_{\bar{\varphi}}^* H_{u^2\psi} = H_{\bar{\varphi u}}^* H_{u^2\psi}$$

因此 $b_{\bar{\varphi}}^* b_\psi$ 为有限秩算子当且仅当 $H_{\bar{\varphi u}}^* H_{u^2\psi}$ 是有限秩的. 从而，$b_{\bar{\varphi}}^* b_\psi$ 为有限秩算子当且仅当 $H_{\bar{\varphi u}}$（或 $H_{u^2\psi}$）为有限秩的. 由引理 2 知，$b_{\bar{\varphi}}^* b_\psi$ 为有限秩算子当且仅当：要么存在某个解析多项式 $a(z)$ 使得 $a(z)\overline{\varphi}(z)u(z) \in H^\infty$，要么存在某个解析多项式 $b(z)$ 使得 $b(z)u^2(z)\overline{\psi}(z) \in H^\infty$. 证毕.

3　展　　望

Hardy 空间上可以定义不同类型的 Hankel 算子，而且这些算子在 Hardy 空间的一组规范正交基上的表示均是 Hankel 矩阵形式. 例如，文献[9,16-17]对任意的 $\varphi \in L^\infty$，$f \in H^2$，定义了 Hankel 算子 H_φ^U：$H^2 \longrightarrow H^2$ 为 $H_\varphi^U f = PU(\varphi f)$，这里 U：$L^2 \longrightarrow L^2$ 为酉算子且由 $Ug(z) = \bar{z}g(\bar{z})$ 给出. 根据计算可知：$H_\varphi^U = UH_\varphi$. 对于 H_φ^U，讨论其谱性质或 Hankel 算子的乘积仍为一个 Hankel 算子等问题均是有意义的. 类似地，我们可以引入从 uH^2 到 uH^2 的小 Hankel 算子：

定义 1　设 u 为非常值的内函数，对任意的 $\varphi \in L^\infty$，$x \in H^2$，$ux \in uH^2$，定义符号为 φ 的小 Hankel 算子 b_φ^U：$uH^2 \longrightarrow uH^2$ 为 $b_\varphi^U ux = M_u PUM_\varphi ux$.

注 1　根据标准计算，容易知道 b_φ^U 在 uH^2 的一组规范正交基$\{uz^n: n \geqslant 0\}$上的表示是一个 Hankel 矩阵形式. 因此，定义 1 是有意义的，而且 $b_\varphi^U = M_u U b_\varphi$.

我们将在后续的工作中继续讨论小 Hankel 算子 b_φ 的一些性质，例如紧性、Schatten 类性质，以及小 Hankel 算子 b_φ^U 的谱理论，及刻画两个甚至多个小 Hankel 算子的乘积为一个小 Hankel 算子等.

参考文献：

[1] ZHU K H. Operator Theory in Function Spaces [M]. 2th ed. New York: American Mathematical Soc, 1990.

[2] DING X H, SANG Y Q. Dual Truncated Toeplitz Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 461: 929-946.

[3] LI Y N, SANG Y Q, DING X H. The Commutant and Invariant Subspaces for Dual Truncated Toeplitz Operators [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2020, 15(1): 1-26.

[4] SANG Y Q, QIN Y S, DING X H. A Theorem of Brown-Halmos Type for Dual Truncated Toeplitz Operators [J]. Annals of Functional Analysis, 2020, 11(2): 271-284.

[5] HANKEL H. Üeber Eine Besondre Classe Der Symmetrishchen Determinanten [D]. Göttingen: Universitas Regiae Georgiae, 1861.

[6] KRONECKER L. Zur Theorie Der Elimination Einer Variablen Aus Zwei Algebraischen Gleichungen [J]. Monatsber Königl Preussischen Akad Wiss, 1881, 1881: 535-600.

[7] NEHARI Z. On Bounded Bilinear Forms [J]. The Annals of Mathematics, 1957, 65(1): 153-162.

[8] FRANCIS B A. A Course in H_∞ Control Theory [M]. Berlin: Springer, 1987.

[9] POWER S C. Hankel Operators on Hilbert Space [M]. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[10] HARTMAN P. On Completely Continuous Hankel Matrices [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1958, 9(6): 862-866.

[11] PELLER V V. Hankel Operators of Class C_p and Their Applications (Rational Approximation, Gaussian Processes, The Problem of Majarizing Operaotors) [J]. Math USSR Sbornik, 1982, 41(4): 443-479.

[12] PELLER V V. A Description of Hankel Operators of Class S_p for $p>0$, An Investigation of the Rate of Rational Approximation, and Other Applications [J]. Math USSR Sbornik, 1985, 50(2): 465-494.

[13] SEMMES S. Trace Ideal Criteria for Hankel Operators, and Applications to Besov Spaces [J]. Integr Equ Oper Theory, 1984, 7(2): 241-281.

[14] ROCHBERG R. Trace Ideal Criteria for Hankel Operators and Commutators [J]. Indiana Univ Math J, 1982, 31(6): 931-925.

[15] SARASON D. Function Theory on The Unit Circle [M]. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1979.

[16] PARTINGTON J R. An Introduction to Hankel Operators [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[17] PELLER V V. Hankel Operators and Their Applications [M]. Berlin: Springer, 2003.

The Little Hankel Operator on the Unit Circle

LI Yong-ning[1,2], LIANG Huan-chao[1], DING Xuan-hao[1,2]

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China

Abstract: Let u be a nonconstant inner function. The little Hankel operator on the unit circle is a linear operator from uH^2 to $\overline{zH^2}$, which can be viewed as the restriction of Hankel operator on the classical Hardy space to uH^2, but some of its properties are quite different from those of the Hankel operator on Hardy space. In this paper, based on the classical Hankel operator theory on Hardy space, we completely characterize the boundedness and the finite rank property of the little Hankel operator and describe the finite rank property of the product of two little Hankel operators.

Key words: little Hankel operator; boundedness; finite rank; Hardy space

责任编辑 廖 坤