第 43 卷第 6 期 西 南 大 学 学 报（自然科学版） 2021 年 6 月
Vol. 43 No. 6 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jun. 2021

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2021.06.013

模糊度量空间中的伪度量结构及等距同构

杨 浩[1,2]， 吴健荣[1]

1. 苏州科技大学 数学科学学院，江苏 苏州 215009；2. 南通理工学院，基础教学学院，江苏 南通 226002

摘要：由于模糊度量在彩色图像滤波等方面的成功应用，近年来该领域的研究引起了人们的重视. 在将经典度量空间中的重要结论推广到模糊度量空间中的同时，研究方法上的创新显得特别重要. 其中，将模糊度量分解为一族经典度量，建立模糊度量的分解定理无疑是十分有意义的. 已有的分解定理主要是针对取小算子的模糊度量展开的，在应用上具有很大的局限性. 本文引入了星伪度量族的概念作为对伪度量族概念的推广，利用这一概念，建立了针对取一般连续 t-模的模糊度量的分解定理. 同时，本文给出了模糊度量空间与伪度量族空间等距同构的充分条件和必要条件，由此建构起模糊度量与伪度量族之间的联系，为一般意义下的模糊度量的研究提供了一种新的有效途径.

关 键 词：模糊集；模糊度量；伪度量；分解；等距同构

中图分类号：O189.13 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2021)06-0095-06

为描述两点距离的不确定性，文献[1]给出了模糊度量(简称为 KM 模糊度量)的概念，文献[2]对 KM 模糊度量进行了改进，提出了现在被称之为 GV 模糊度量的新概念. 文献[3]对 KM 模糊度量和 GV 模糊度量进行了推广，引入了(L, M)模糊度量的概念. 到目前为止，许多经典度量空间的重要结果被推广到了模糊度量空间中[4-10]，同时，模糊度量已经被广泛地应用在彩色图像处理和算法分析中[11-17]. 为研究模糊度量与分明度量之间的关系，文献[7]给出了伪度量族空间的概念，建立了两个分解定理. 然而正如文献[7]中所指出的，这两个定理成立需要对模糊度量定义中的 t-模进行严格的限制.

本文引入了星伪度量族的概念，利用这一概念，建立了具有一般 t-模的模糊度量的分解定理. 此外，在引入模糊度量空间与伪度量族空间等距同构的概念之后，给出了模糊度量空间与伪度量族空间等距同构的充分条件和必要条件.

1 预备知识

本文约定 $\mathbb{R}_+=[0, \infty)$，$\mathbb{N}$ 为自然数集，$\varnothing$ 为空集.

定义 1[18] 设二元算子 $*$：$[0, 1]\times[0, 1]\longrightarrow[0, 1]$ 满足：$\forall a, b, c, d \in [0, 1]$，

(a) $*$ 对结合律和交换律成立；

(b) $*$ 是连续的；

(c) $a * 1 = a$，$\forall a \in [0, 1]$；

(d) 当 $a \leqslant c$ 和 $b \leqslant d$ 时，$a * b \leqslant c * d$.

则称 $*$ 是连续 t-模，常用的连续 t-模包括以下 3 个算子：$\forall a, b \in [0, 1]$，$a * b = a \wedge b$，$a * b = \max\{a + b - 1, 0\}$，$a * b = a \cdot b$.

收稿日期：2020-05-17

基金项目：国家自然科学基金项目(11971343).

作者简介：杨 浩，助教，硕士，主要从事模糊拓扑学的研究.

通信作者：吴健荣，教授.

性质 1[9]　设 $*$ 是连续 t-模,

(i) 若 $0 < r_2 < r_1 < 1$, 则存在 $r_3 \in (0, 1)$, 使得 $r_1 * r_3 > r_2$;

(ii) $\forall r_4 \in (0, 1)$, 存在 $r_5 \in (r_4, 1)$, 使得 $r_5 * r_5 > r_4$.

定义 2　设 X 是一非空集合, $*$ 是连续 t-模, X 上的映射 $M: X^2 \times (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ 满足条件: 对任意的 $x, y, z \in X$,

(M1) $\forall t > 0$, $M(x, y, t) > 0$;

(M2) $\forall t > 0$, $M(x, y, t) = 1$ 当且仅当 $x = y$;

(M3) $\forall t > 0$, $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(M4) $\forall t, s > 0$, $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leqslant M(x, z, t + s)$;

(M5) $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$ 是左连续的;

(M6) $\lim\limits_{t \to \infty} M(x, y, t) = 1$.

则称$(M, *)$(简写成 M) 是 X 上的模糊度量, 称$(X, M, *)$为模糊度量空间.

注 1　如果将定义 2 中的(M2),(M5) 分别改为:

(M2)′ $M(x, y, t) = 1$ 当且仅当 $x = y$;

(M5)′ $M(x, y, \cdot)$ 是连续的.

则$(X, M, *)$为 GV 模糊度量空间[2].

若$(X, M, *)$是模糊度量空间, 设 $x \in X$, $r \in (0, 1)$, $t > 0$, 称

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X: M(x, y, t) > 1 - r\} \tag{1}$$

是以 x 为心, r 为半径的开球. 定理 1 的证明可参见文献[2] 中相应结论的证明.

定理 1　设$(X, M, *)$是模糊度量空间. 如果

$$\tau_M = \{A \subseteq X: \forall x \in A, \text{存在 } t > 0, 0 < r < 1, \text{使得 } B_M(x, r, t) \subseteq A\} \tag{2}$$

则 τ_M 是 X 上的第一可数的拓扑, $\left\{B_M\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right): n \in \mathbb{N}\right\}$ 是点 x 的可数邻域基.

2　星伪度量族

本节引入星伪度量族的概念, 并给出模糊度量的星伪度量族分解定理.

定义 3　设 X 是一非空集合, $*$ 是连续 t-模, $\{d_r: r \in (0, 1)\}$ 是 $X \times X$ 到 $\mathbb{R}_+$ 中的一族映射. 若对任意的 $x, y, z \in X$, 都有:

(SPM1) $\forall t > 0$, 存在 $r \in (0, 1)$, 使得 $d_r(x, y) \leqslant t$;

(SPM2) $\forall r \in (0, 1)$, $d_r(x, x) = 0$;

(SPM3) $\forall r \in (0, 1)$, $d_r(x, y) = d_r(y, x)$;

(SPM4) 对固定的 $x, y \in X$, 关于 $r \in (0, 1)$ 的函数 $d_r(x, y)$ 是单调递增的;

(SPM5) 对任意的 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $d_{\alpha * \beta}(x, z) \leqslant d_\alpha(x, y) + d_\beta(y, z)$;

(SPM6) 若 $x \neq y$, 则 $\sup\limits_{r \in (0, 1)} d_r(x, y) > 0$.

则称$\{d_r: r \in (0, 1)\}$是 X 上的星伪度量族, 称$(X, d_r: r \in (0, 1))$为星伪度量族空间.

注 2　当 $* = \wedge$ 时, 星伪度量族即为伪度量族. 对于一般的连续 t-模 $*$, 星伪度量族中的元素未必为伪度量, 但为方便起见, 我们仍称其为星伪度量族.

为与星伪度量族空间作区分, 我们将由 X 上的一族伪度量$\{d_r: r \in (0, 1)\}$构成的空间$(X, d_r: r \in (0, 1))$称为伪度量族空间.

定理 2　设 X 是一非空集合, $D = \{d_r: r \in (0, 1)\}$ 是 X 上的星伪度量族, 对任意的 $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $r_1, r_2, \cdots, r_n \in (0, 1)$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$V_x(r_1, r_2, \cdots, r_n; \varepsilon) = \{y \in X: d_{r_i}(x, y) < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

则 X 存在唯一的拓扑 τ_D, 使得对任意的 $x \in X$,

$$\mathcal{V}_x = \{V_x(r_1, r_2, \cdots, r_n; \varepsilon): n \in \mathbb{N}, r_1, r_2, \cdots, r_n \in (0, 1), \varepsilon > 0\}$$

恰好是 x 关于 τ_D 的邻域基，且 τ_D 为 X 上的 Hausdorff 拓扑.

证　前半部分的证明是常规的，这里仅给出 τ_D 是 Hausdorff 拓扑的证明.

事实上，对任意的不同的点 $x, y \in X$，由条件(SPM6)，存在 $r \in (0, 1)$，使得 $d_r(x, y) = \varepsilon > 0$. 由性质 1(ⅱ)，存在 $s \in (r, 1)$，使得 $s * s > r$，从而 $V_x\left(s; \frac{\varepsilon}{2}\right) \in V_x$ 以及 $V_y\left(s; \frac{\varepsilon}{2}\right) \in V_y$. 利用条件(SPM4)和(SPM5)可验证 $V_x\left(s; \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap V_y\left(s; \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$. 因此 τ_D 是 Hausdorff 的.

引理 1　设$(X, M, *)$为模糊度量空间，$x, y \in X$，$r \in (0, 1)$. 则：

(ⅰ) $\sup\{t > 0: M(x, y, t) \leqslant r\} = \inf\{t > 0: M(x, y, t) > r\}$；

(ⅱ) $\sup\{t > 0: M(x, y, t) < r\} = \inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant r\}$；

(ⅲ) $\inf\{t > 0: M(x, y, t) > r\} = \inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant r\}$ 当且仅当 $M(x, y, \cdot)$ 是严格单调增的.

定理 3　设$(X, M, *)$为模糊度量空间，$x, y \in X$，$r \in (0, 1)$. 令

$$d_r(x, y) = \inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant r\} \tag{3}$$

则 $D_M = \{d_r: r \in (0, 1)\}$ 是星伪度量族.

证　只要证 D_M 满足条件(SPM1)－(SPM6)即可.(SPM2)和(SPM3)是显然的.

(SPM1)：$\forall x, y \in X$，$t > 0$，由 $M(x, y, t) > 0$，则存在 $r_0 \in (0, 1)$ 使得 $M(x, y, t) > r_0 > 0$. 由(3)式得 $d_{r_0}(x, y) \leqslant t$.

(SPM4)：任取 $r_1, r_2 \in (0, 1)$，$r_1 > r_2$. 因为 $M(x, y, \cdot)$ 是单调增的，所以

$$\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant r_1\} \subseteq \{t > 0: M(x, y, t) \geqslant r_2\}$$

所以 $d_{r_1}(x, y) \geqslant d_{r_2}(x, y)$. 因此 $d_r(x, y)$ 关于 $r \in (0, 1)$ 是单调增的.

(SPM5)：对任意的 $x, y, z \in X$，$\alpha, \beta \in (0, 1)$，任取 $t_1 > d_\alpha(x, z)$ 及 $t_2 > d_\beta(z, y)$. 由(3)式知，存在 $t_1^*, t_2^* > 0$，使得 $t_1^* < t_1$，$t_2^* < t_2$，且 $M(x, z, t_1^*) \geqslant \alpha$，$M(z, y, t_2^*) \geqslant \beta$. 因此

$$M(x, y, t_1^* + t_2^*) \geqslant M(x, y, t_1^*) * M(x, y, t_2^*) \geqslant \alpha * \beta$$

从而 $d_{\alpha * \beta}(x, y) \leqslant t_1^* + t_2^* < t_1 + t_2$. 根据 t_1 和 t_1 的任意性得 $d_{\alpha * \beta}(x, y) \leqslant d_\alpha(x, z) + d_\beta(z, y)$.

(SPM6)：$\forall x, y \in X$，$x \neq y$，由定义 2，存在 $t_0 > 0$ 使得 $M(x, y, t_0) < 1$. 取 $r_0 \in (0, 1)$ 满足 $M(x, y, t_0) < r_0 < 1$，由引理 1 得

$$d_r(x, y) = \sup\{t > 0: M(x, y, t) < r\}$$

因此 $d_{r_0}(x, y) \geqslant r_0 > 0$，从而 $\sup\limits_{r \in (0, 1)} d_r(x, y) > 0$.

注 3　称上述 $D = \{d_r: r \in (0, 1)\}$ 为由模糊度量 M 导出的星伪度量族.

定理 4　设 $D = \{d_r: r \in (0, 1)\}$ 为 X 上的星伪度量族，对 $x, y \in X$，$t > 0$，设

$$M_D(x, y, t) = \sup\{r \in (0, 1): d_r(x, y) < t\} \tag{4}$$

则$(X, M_D, *)$是一个模糊度量空间.

证　以下证明 M_D 满足条件(M1)－(M6).(M3)显然成立.

(M1)：对任意的 $t > 0$，取 $0 < t' < t$. 由条件(SPM1)，存在 $r_0 \in (0, 1)$，使得 $d_{r_0}(x, y) \leqslant t' < t$. 因此 $M_D(x, y, t) \geqslant r_0 > 0$.

(M2)：令 $x = y$. 由条件(SPM2)，对任意的 $r \in (0, 1)$，$t > 0$，有 $t > d_r(x, y) = 0$. 因此

$$M_D(x, y, t) = \sup\{r: r \in (0, 1)\} = 1$$

相反地，假设对任意的 $t > 0$，有 $M_D(x, y, t) = 1$，则对任意的 $r \in (0, 1)$，$M_D(x, y, t) > r$. 由(4)式知，存在 $1 > r' > r$，使得 $d_{r'}(x, y) < t$. 由条件(SPM4)得 $d_r(x, y) < t$. 再由 t 的任意性知 $d_r(x, y) = 0$. 根据 r 的任意性和条件(SPM6)知 $x = y$.

(M4)：任取 $x, y, z \in X$，$t, s > 0$，令 $M_D(x, y, t) = \beta$，$M_D(y, z, s) = \gamma$. 对任意的 $\varepsilon > 0$ 且 $\varepsilon < \min\{\beta, \gamma\}$，由(4)式知，存在 $r', r'' \in (0, 1)$，使得 $r' > \beta - \varepsilon$，$r'' > \gamma - \varepsilon$，$d_{r'}(x, y) < t$ 和 $d_{r''}(y, z) < s$. 因此 $d_{\beta-\varepsilon}(x, y) < t$，$d_{\gamma-\varepsilon}(y, z) < s$. 不失一般性，假设 $\beta \geqslant \gamma$，则

$$d_{\gamma-\varepsilon}(x, y) < t \qquad d_{\gamma-\varepsilon}(x, z) \leqslant d_{\gamma-\varepsilon}(x, y) + d_{\gamma-\varepsilon}(y, z) < t+s$$

因此 $M_D(x, z, t+s) \geqslant \gamma-\varepsilon$. 由 ε 的任意性和 $*$ 算子的连续性可得

$$M_D(x, z, t+s) \geqslant \gamma = 1*\gamma \geqslant \beta*\gamma = M_D(x, y, t)*M_D(y, z, s)$$

(M5):对任意的 $x, y \in X$, $t_0 > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 有 $M_D(x, y, t_0) - \varepsilon < M_D(x, y, t_0)$. 由(4)式知,存在 $r_0 \in (0, 1)$, 使得 $d_{r_0}(x, y) < t_0$ 且 $r_0 > M_D(x, y, t_0) - \varepsilon$, 即 $M_D(x, y, t_0) - r_0 < \varepsilon$. 当 $d_{r_0}(x, y) < t < t_0$ 时,由(4)式知 $M_D(x, y, t) \geqslant r_0$, 因此

$$M_D(x, y, t_0) - M_D(x, y, t) \leqslant M_D(x, y, t_0) - r_0 < \varepsilon$$

也就是说 $M_D(x, y, \cdot)$ 在 t_0 处是左连续的. 再由 t_0 的任意性知 $M_D(x, y, \cdot)$ 是左连续的.

(M6):$\forall x, y \in X$, $t_0 > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 取 $r_0 \in (0, 1)$, 使得 $1 - r_0 < \varepsilon$. 由(4)式,当 $t > d_{r_0}(x, y)$ 时,$M_D(x, y, t) \geqslant r_0 > 1-\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{t\to\infty} M_D(x, y, t) = 1$.

3 模糊度量空间中的等距同构

在本节中,我们将研究模糊度量和伪度量族之间的等距同构关系.

定义 4 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间,$(X', d'_r, r \in (0, 1))$ 是星伪度量族空间. 若存在 X 到 X' 上的一一映射 Φ, 使得 $\forall x, y \in X$, $t > 0$, $\forall r \in (0, 1)$, 都有

$$\inf\{t > 0: M(x, y, t) \geqslant r\} = d'_r(\Phi(x), \Phi(y)) \tag{5}$$

则称 Φ 是 $(X, M, *)$ 到 $(X', d'_r, r \in (0, 1))$ 上的等距同构映射,称模糊度量空间 $(X, M, *)$ 等距同构于星伪度量族空间 $(X', d'_r, r \in (0, 1))$.

定理 5 若 Φ 是从模糊度量空间 $(X, M, *)$ 到星伪度量族空间 $(X', d'_r, r \in (0, 1))$ 上的等距同构映射,则 Φ 是从 (X, τ_M) 的到 (X', τ_D) 的同胚映射,其中 τ_M 如(2)式定义,τ_D 是由星伪度量族 $\{d'_r: r \in (0, 1)\}$ 导出的拓扑.

证 只需证 Φ 和 Φ 的逆映射 Φ^{-1} 都是连续的,只要证明:

(a) 对任意的 $x \in X$, $t > 0$ 和 $r \in (0, 1)$, $\Phi\left(B_M\left(x, 1-r, \dfrac{t}{2}\right)\right) \subseteq V_{\Phi(x)}(t, r)$;

(b) 对任意的 $x' \in X'$, $t > 0$ 及 $r \in (0, 1)$, $\Phi^{-1}\left(V_{x'}\left(t, 1-\dfrac{r}{2}\right)\right) \subseteq B_M(\Phi^{-1}(x'), r, t)$.

具体证明过程是常规的.

推论 1 设 $(X, M, *)$ 为模糊度量空间,$D_M = \{d_r: r \in (0, 1)\}$ 为由 M 生成的星伪度量族,则由 M 诱导的拓扑 τ_M 与其对应的由星伪度量族所诱导的拓扑 τ_{D_M} 是一致的.

定义 5 设 $(X, M, *)$ 和 $(X', M', *')$ 是两个模糊度量空间,若存在 X 到 X' 上的一一映射 ψ, 使得 $\forall x, y \in X$, $t > 0$, 都有 $M(x, y, t) = M(\psi(x), \psi(y), t)$, 则称 ψ 是 $(X, M, *)$ 到 $(X', M', *')$ 上的等距同构映射,称模糊度量空间 $(X, M, *)$ 等距同构于模糊度量空间 $(X', M', *')$.

定理 6 若模糊度量空间 $(X', M', *')$ 由星伪度量族空间 $(X', d'_r, r \in (0, 1))$ 导出,模糊度量空间 $(X, M, *)$ 等距同构于 $(X', d'_r, r \in (0, 1))$, 那么 $(X, M, *)$ 也等距同构于 $(X', M', *')$.

证 设 Φ 是模糊度量空间 $(X, M, *)$ 到伪度量族空间 $(X', d'_r, r \in (0, 1))$ 的等距同构映射,那么,$\forall x, y \in X$, $r \in (0, 1)$, 都有(5)式成立. 由(4)式知:$\forall t > 0$, 有

$$M'(\Phi(x), \Phi(y), t) = \sup\{r \in (0, 1): d'_r(\Phi(x), \Phi(y)) < t\} \tag{6}$$

若 $d'_r(\Phi(x), \Phi(y)) < t$, 则由(5)式可知,存在 $0 < t' < t$, 使得 $M(x, y, t') \geqslant r$. 再由 $M(x, y, \cdot)$ 单调增可得 $M(x, y, t) \geqslant r$. 所以

$$\sup\{r \in (0, 1): d'_r(\Phi(x), \Phi(y)) < t\} \leqslant M(x, y, t) \tag{7}$$

对任意给定的 $0 < r < M(x, y, t)$, 由 $M(x, y, \cdot)$ 的左连续性知,存在 $0 < t' < t$, 使得 $M(x, y, t') > r$. 由(5)式得 $d'_r(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant t' < t$. 于是

$$\sup\{r \in (0, 1): d'_r(\Phi(x), \Phi(y)) < t\} \geqslant r$$

由 r 的任意性知

$$\sup\{r \in (0,1): d'_r(\Phi(x),\Phi(y)) < t\} \geqslant M(x,y,t) \tag{8}$$

由(7)式和(8)式知

$$\sup\{r \in (0,1): d'_r(\Phi(x),\Phi(y)) < t\} = M(x,y,t)$$

由(6)式知

$$M(x,y,t) = M'(\Phi(x),\Phi(y),t)$$

从而$(X, M, *)$等距同构于$(X', M', *')$.

推论 2　设$(X, M, *)$为模糊度量空间，$D_M=\{d_r: r \in (0,1)\}$为由 M 生成的星伪度量族，M_{D_M} 为由 $D_M=\{d_r: r\in(0,1)\}$导出的模糊度量，则$(X, M, *)$等距同构于$(X, M_{D_M}, *)$. 因此，由 M 和M_{D_M} 导出的拓扑是一致的.

定理 7　设$(X, M, *)$为模糊度量空间，若$(X, M, *)$满足条件：对任意的 $x,y,z \in X$，$s,t > 0$，有

$$M(x,y,s+t) \geqslant M(x,z,s) \wedge M(z,y,t) \tag{9}$$

则$(X, M, *)$等距同构于某个伪度量族空间$(X', d'_r, r \in (0,1))$.

证　取 $X=X'$，$\Phi(x)=x(\forall x \in X)$. 设 $d_r(x,y)$由(3)式定义，则由定理 3 知 $d_r(x,y)$为 X 上的分离的星伪度量族.

下证$\{d_r: r\in(0,1)\}$为伪度量族. 只需证每个 d_r 满足三角不等式. 为此任取 $x,y,z \in X$ 及 $r \in (0,1)$. 对任意的 $t_1 > d_r(x,z)$，$t_2 > d_r(z,y)$，由(3)式，存在 $t_1^*, t_2^* > 0$，使得 $t_1^* < t_1$，$t_2^* < t_2$ 且 $M(x,z,t_1^*) \geqslant r$，$M(z,y,t_2^*) \geqslant r$. 由(9)式知

$$M(x,y,t_1^*+t_2^*) \geqslant M(x,z,t_1^*) \wedge M(z,y,t_2^*) \geqslant r \wedge r = r$$

于是由(3)式知

$$d_r(x,y) \leqslant t_1^* + t_2^* < t_1 + t_2$$

再由 t_1,t_2 的任意性得

$$d_r(x,y) \leqslant d_r(x,z) + d_r(z,y)$$

最后，由 $d_r(x,y)$的定义即知$(X, M, *)$与$(X', d_r, r \in (0,1))$等距同构.

推论 3　每个模糊度量$(X, M, \wedge)$都可以被分解成 X 上的一族伪度量.

容易证明，若 $M(x,y,\cdot)$是连续的，则定理 7 的逆定理也成立，即：

定理 8　设模糊度量空间$(X, M, *)$满足条件：对任意的 $x,y \in X$，函数 $M(x,y,\cdot)$连续. 若$(X, M, *)$等距同构于某个伪度量族空间$(X', d'_r, r \in (0,1))$，则不等式(9)成立.

参考文献：

[1]　KRAMOSIL I, MICHALEK J. Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces [J]. Kybernetika, 1975, 11(5): 336-344.

[2]　GEORGE A, VEERAMANI P. On Some Results in Fuzzy Metric Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(3): 395-399.

[3]　SHI F G. (L, M)-Fuzzy Metric Spaces [J]. Indian Journal of Mathematics, 2010, 52(2): 231-250.

[4]　GAO Y, ZHOU X N. The Relationships Between KM-Fuzzy Quasi-Metric Spaces and the Associated Posets of Formal Balls [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2017, 333: 17-29.

[5]　GREGORI V, ROMAGUERA S. On Completion of Fuzzy Metric Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(3): 399-404.

[6]　GREGORI V, ROMAGUERA S. Characterizing Completable Fuzzy Metric Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 144(3): 411-420.

[7]　RANO G, BAG T, SAMANTA K S. Fuzzy Metric Space and Generating Space of Quasi-Metric Family [J]. Ann Fuzzy Math Inform, 2016, 11(2): 183-195.

[8]　SANCHEZ I, SANCHIS M. Fuzzy Quasi-Pseudometrics on Algebraic Structures [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 330: 79-86.

[9]　杨　洋，吴健荣. 关于模糊拟度量诱导的双拓扑空间的一些性质 [J]. 苏州科技大学学报(自然科学版)，2017，34(4)：

14-19.

[10] 杨 浩，吴健荣. 模糊度量空间中的有界集 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(10)：45-50.

[11] GREGORI V，MORILLAS S，SAPENA A. Examples of Fuzzy Metrics and Applications [J]. Fuzzy Sets and Systems，2011，170(1)：95-111.

[12] MORILLAS S，GREGORI V，PERIS-FAJARNES G，et al. A New Vector Median Filter Based on Fuzzy Metrics [C] // Image Analysis and Recognition：Second International Conference. Toronto：Mohamed Kamel Aurélio Campilho，2005：81-90.

[13] MORILLAS S，GREGORI V，PERIS-FAJARNES G，et al. A Fast Impulsive Noise Color Image Filter Using Fuzzy Metrics [J]. Real-Time Imaging，2005，11(5-6)：417-428.

[14] ROMAGUERA S，SAPENA A，TIRADO P. The Banach Fixed Point Theorem in Fuzzy Quasi-Metric Spaces with Application to the Domain of Words [J]. Topology and Its Applications，2007，154(10)：2196-2203.

[15] WU J R，JIN Z Y. A Note on Ulam Stability of Some Fuzzy Number-Valued Functional Equations [J]. Fuzzy Sets and Systems，2019，375：191-195.

[16] 张振荣，赵 凯. 非齐度量测度空间上广义分数次积分算子交换子的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(8)：88-96.

[17] 张韩雨，陈守全. Brinbaum-Sauders 分布的极值收敛速度 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(1)：19-24.

[18] SCHWEIZER B，SKLAR A. Statistical Metric Spaces [J]. Pacific J Math，1960，10(1)：313-334.

Pseudo-Metric Structure and Isometrical Isomorphism in Fuzzy Metric Spaces

YANG Hao[1,2]， WU Jian-rong[1]

1. School of Mathematical Sciences，Suzhou University of Science and Technology，Suzhou Jiangsu 215009，China；

2. Department of Radical Education，Nantong Institute of Technology，Nantong Jiangsu 226002，China

Abstract：Due to the successful applications in such fields as color image filtering，the research about fuzzy metrics has attracted more and more attention in recent years. While many important results of classical metric spaces are generalized to fuzzy metric spaces，the innovation of research methodsis becoming increasingly important. No doubt，decomposition of fuzzy metrics into a family of classical metrics and establishment of decomposition theorems of fuzzy metrics are of great significance. The existing decomposition theorems，however，are mainly focused on fuzzy metrics with the minimum operator，and thus have great limitations in application. In this paper，the concept of family of star pseudo-metrics is introduced as a generalization of the family of pseudo-metrics. In addition，the sufficient and necessary conditions of isometric isomorphism between a fuzzy metric space and a family of pseudo-metric spaces are given，and the relationship between them is constructed，which provides a new and effective approach to the study of fuzzy metrics in the general sense.

Key words：fuzzy set；fuzzy metric；pseudo-metric；decomposition；isometrical isomorphism

责任编辑 廖 坤