第 43 卷第 7 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2021 年 7 月
Vol. 43　No. 7　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jul.　2021

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2021.07.012

一类随机偏微分方程的有效近似

李益军，　陈光淦

四川师范大学 数学科学学院，成都 610068

摘要： 在系统稳态改变的附近，运用时间尺度变换，得到一类随机偏微分方程系统的一个由系统算子核空间元素主导的有效近似系统，并精确给出其近似形式和收敛率.

关　键　词： 随机偏微分方程；时间尺度变换；有效近似

中图分类号：O175.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2021)07－0089－08

随机偏微分方程应用于物理学的众多领域，近年来在各数学分支的发展推动下，随机偏微分方程也得到相应发展和研究，如关于随机 Burgers 方程[1]、随机 Swift-Hohenberg 方程[2]等的研究.

在内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle$，范数为 $\|\cdot\|$ 的 Hilbert 空间$\mathscr{H}$中研究如下的非线性随机偏微分方程

$$\mathrm{d}u=[\mathscr{A}u+\varepsilon\mathscr{L}u+u^2]\mathrm{d}t+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}W \tag{1}$$

其中$u=u(t,x,\omega)$，$x\in$ 有界区域D. 小扰动项$\varepsilon\mathscr{L}u$表示与分支的距离. 算子$\mathscr{A}$假定为自伴随且非正的，噪声由一般的Q-维纳过程给出，详见第一节.

本文在稳态改变的附近，运用时间尺度变换来导出方程的有效近似系统. 值得指出的是，扰动强度与噪声强度对系统的有效近似有着重要影响，使得有效近似系统的近似形式和收敛率有着重要差异[3-7].

为导出方程(1)的有效近似，运用时间尺度变换，将解分解到两个互补空间. 利用截断、停时、Itô 公式，首先从形式上推导出方程(1)的有效近似形式. 再运用各种平均方法对解的各项进行估计，最终得到方程(1)的有效近似系统，进一步给出收敛率.

1　预备知识

假设 1　假设方程(1)中的$\mathscr{A}$是一个定义在 Hilbert 空间$\mathscr{H}$上的自伴随非正线性算子，其特征值$-\lambda_i$($i=1,2,3,\cdots$)满足$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots$且对所有较大的$k$，有$\lambda_k\geqslant Ck^m$. 相应的的特征向量为$\{\boldsymbol{g}_k\}_{k=1}^{\infty}$，且有$\mathscr{A}\boldsymbol{g}_k=-\lambda_k\boldsymbol{g}_k$.

用$\mathscr{N}:=ker\mathscr{A}$表示$\mathscr{A}$的核空间，$\mathscr{T}:=\mathscr{N}^{\perp}$表示$\mathscr{N}$在$\mathscr{H}$中的正交补空间. P_c为从$\mathscr{H}$到$\mathscr{N}$的投影，P_s为从$\mathscr{H}$到$\mathscr{T}$的投影. 假设P_c,P_s与$\mathscr{A}$可交换，$\mathscr{A}^{-1}\mathrm{d}W$存在，假设$\mathscr{N}$为$n$维，其标准正交基为$\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$.

分数阶 Sobolev 空间$\mathscr{H}^{\alpha}$定义如下

$$\mathscr{H}^{\alpha}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\boldsymbol{g}_k:\ \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2k^{2\alpha}<\infty\right\}$$

其中$\alpha\in\mathbb{R}$，$\{\boldsymbol{g}_k\}_{k=1}^{\infty}$是$\mathscr{H}$空间的完备标准正交基，范数定义为

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\boldsymbol{g}_k\right\|_{\alpha}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^2k^{2\alpha}$$

收稿日期：2019－09－21

基金项目：国家自然科学基金项目(11571245)；四川省科技厅项目(2018JY0486).

作者简介：李益军，硕士，主要从事随机偏微分方程研究.

定义算子 D^{α}：$D^{\alpha}\boldsymbol{g}_k=k^{\alpha}\boldsymbol{g}_k$，因此有 $\|u\|_{\alpha}=\|D^{\alpha}u\|$.

线性算子 $\mathscr{A}$ 生成解半群 $\mathrm{e}^{\mathscr{A}t}$ 满足

$$\mathrm{e}^{\mathscr{A}t}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\boldsymbol{g}_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_k t}\gamma_k\boldsymbol{g}_k \qquad \forall\, t\geqslant 0$$

引理1 在假设1下，存在常数 $M>0$，$K>0$，使得对所有的 $t>0$，$\beta\leqslant\alpha$，$u\in\mathscr{H}^{\beta}$ 有

$$\|\mathrm{e}^{t\mathscr{A}}P_s u\|_{\alpha}\leqslant Mt^{-\frac{\alpha-\beta}{m}}\mathrm{e}^{-Kt}\|P_s u\|_{\beta}$$

假设2 给定 $\alpha\in\mathbb{R}$，对某些 $\beta\in[0,m)$，$\mathscr{L}$：$\mathscr{H}^{\alpha}\longrightarrow\mathscr{H}^{\alpha-\beta}$ 是一个连续线性映射，且一般情况下与 P_c，P_s 不可交换.

假设3 B 是一个从 $\mathscr{H}^{\alpha}\times\mathscr{H}^{\alpha}$ 到 $\mathscr{H}^{\alpha-\beta}$ 的有界双线性算子，其中 α，β 由假设2给出. 不失一般性，可假设 B 是对称的，即 $B(u,v)=B(v,u)$，且满足 $P_cB(u,u)=0$，$u\in\mathscr{N}$. 本文中，取 $B(u,v)=uv$.

假设4 W 是定义在一个抽象概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$上的一个柱状维纳过程，同时满足 $P_cW=0$，其有界协方差算子 Q：$\mathscr{H}\longrightarrow\mathscr{H}$ 定义为 $Q\boldsymbol{f}_k=\alpha_k^{\,2}\boldsymbol{f}_k$，其中 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个有界实序列，$\{\boldsymbol{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的另一组正交基. 假设对某些 $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，有如下不等式

$$\sum_{l=n+1}^{\infty}l^{2\alpha}\lambda_l^{2\gamma-1}\|Q^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{g}_l\|^2<\infty$$

其中 $\{\boldsymbol{g}_l\}_{l=1}^{\infty}$ 是假设1中的正交基.

进一步，对 $t\geqslant 0$，$W(t)$ 分别以 $\{\boldsymbol{g}_l\}_{l=1}^{\infty}$，$\{\boldsymbol{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为基时，有如下两种不同表达形式：

$$W(t):=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k(t)\boldsymbol{f}_k=\sum_{l=1}^{\infty}\mathscr{B}_l(t)\boldsymbol{g}_l$$

其中：$\mathscr{B}_l:=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\langle\boldsymbol{f}_k,\boldsymbol{g}_l\rangle\beta_k$，$\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立的实值标准布朗运动.

定义1 定义随机卷积

$$W_{\mathscr{A}}(t):=\int_0^t\mathrm{e}^{(t-s)\mathscr{A}}\mathrm{d}W(s)=\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)\lambda_l}\,\mathrm{d}\mathscr{B}_l(s)\boldsymbol{g}_l$$

定义2 给定 $\mathscr{N}\times\mathscr{T}$—值的随机过程$(a,\psi)$，对于 $0<k<\frac{1}{12}$ 和某个时间 $T_0>0$，定义停时

$$\tau^*:=T_0\wedge\inf\{T>0\mid\|a(T)\|_{\alpha}>\varepsilon^{-k}\ \text{或}\ \|\psi(T)\|_{\alpha}>\varepsilon^{-2k}\}$$

定义3 对于一个实值的随机过程族 $\{X_{\varepsilon}(t)\}_{t\geqslant 0}$. 如果对每个 $p\geqslant 1$ 都存在一个常数 C_p 满足

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,\tau^*]}|X_{\varepsilon}(t)|^p\leqslant C_p f_{\varepsilon}^{\,p}$$

则我们称 $X_{\varepsilon}=\mathscr{O}(f_{\varepsilon})$.

最后指出，用字母 C 表示所有正常数，它依赖于 T_0，k，α，B，Q，$\mathscr{L}$，$\mathscr{A}$ 及其给出的数据. 同时规定如下简记符号：$B_s:=P_sB$，$B_c:=P_cB$. $\mathscr{L}_c$，$\mathscr{L}_s$，$\mathscr{A}_c$，$\mathscr{A}_s$，W_c，W_s 同理.

2 主要结论

对于方程(1)，将其解 $u(t)$ 分解为两部分

$$u(t)=\varepsilon a(\varepsilon t)+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\psi(\varepsilon t) \tag{2}$$

其中 $a\in\mathscr{N}$，$\psi\in\mathscr{T}$. 选取时间尺度变换为 $T=\varepsilon t$，将(2)式代入(1)式，并分别做 P_c，P_s 投射可得到

$$\mathrm{d}a=[\mathscr{L}_c a+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_c\psi+2\varepsilon^{\frac{1}{2}}B_c(a,\psi)+\varepsilon B_c(\psi,\psi)]\mathrm{d}T \tag{3}$$

和

$$\mathrm{d}\psi=[\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s\psi+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_s a+\mathscr{L}_s\psi+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}B_s(a,a)+2B_s(a,\psi)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}B_s(\psi,\psi)]\mathrm{d}T+\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\mathscr{A}_s\mathrm{d}\widetilde{W}_s \tag{4}$$

其中 $\widetilde{W}(T):=\varepsilon^{\frac{1}{2}}W(\varepsilon^{-1}T)$ 与 $W(t)$ 同分布.

对 $B_c(a, \mathscr{A}^{-1}\psi)$ 用 $\mathrm{It\hat{o}}$ 公式有

$$\begin{aligned}\int_0^T \varepsilon^{\frac{1}{2}} B_c(a, \psi)\mathrm{d}\tau =& \varepsilon^{\frac{3}{2}}[B_c(a(T), \mathscr{A}_s^{-1}\psi(T)) - B_c(a(0), \mathscr{A}_s^{-1}\psi(0))] - \\ & \varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^T B_c(\mathscr{L}_c a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}\psi(\tau))\mathrm{d}\tau - 2\varepsilon^2\int_0^T B_c(B_c(a(\tau), \psi(\tau)), \mathscr{A}_s^{-1}\psi(\tau))\mathrm{d}\tau - \\ & \varepsilon^2\int_0^T B_c(\mathscr{L}_c\psi(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}\psi(\tau))\mathrm{d}\tau - \varepsilon^{\frac{5}{2}}\int_0^T B_c(B_c(\psi(\tau), \psi(\tau)), \mathscr{A}_s^{-1}\psi(\tau))\mathrm{d}\tau - \\ & \varepsilon\int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}\mathscr{L}_s a(\tau))\mathrm{d}\tau - \varepsilon\int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}B_s(a(\tau), a(\tau)))\mathrm{d}\tau - \\ & \varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}\mathscr{L}_s\psi(\tau))\mathrm{d}\tau - \varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}B_s(a(\tau), \psi(\tau)))\mathrm{d}\tau - \\ & \varepsilon^2\int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}B_s(\psi(\tau), \psi(\tau)))\mathrm{d}\tau - \int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s(\tau)) = \\ & r(T) - \int_0^T B_c(a(\tau), \mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s(\tau))\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $r(T)$ 是 ε 的高阶项．忽略(5) 式中的小项，可以得到

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} B_c(a, \psi) \approx - B_c(a, \mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s)$$

因此

$$\mathrm{d}a \approx \mathscr{L}_c a\,\mathrm{d}T - 2B_c(a, \mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s)$$

令 $b(T)$ 满足方程

$$\mathrm{d}b = \mathscr{L}_c b\,\mathrm{d}T - 2B_c(b, \mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s) \tag{6}$$

则方程(6) 就是逼近随机偏微分方程(1) 的有效近似系统(也被称为振幅方程[10])．

进一步，由(3) 和(5) 式可得

$$a(T) = a(0) + \int_0^T \mathscr{L}_c a\,\mathrm{d}\tau - 2\int_0^T B_c(a, \mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s(\tau)) + R(T) \tag{7}$$

其中

$$R(T) := r(T) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\int_0^T \mathscr{L}_c\psi\,\mathrm{d}\tau + \varepsilon\int_0^T B_c(\psi, \psi)\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

下面给出本文主要结论．

定理 1　在假设 1,2,3,4 下，设 u 是形如(2) 式的方程(1) 的解，且有初始条件 $u(0) = \varepsilon a(0) + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\psi(0)$，其中 $a(0)$，$\psi(0)$ 是一阶的．假设 b 是有效近似系统(6) 的解．则对所有的 $p > 1$，$T_0 > 0$，都存在 $C > 0$ 使得

$$\mathscr{P}\Big(\sup_{t\in[0, \varepsilon^{-1}T_0]} \| u(t) - \varepsilon b(\varepsilon t) \|_\alpha > \varepsilon^{\frac{3}{2}-6k}\Big) \leqslant C\varepsilon^p \tag{9}$$

3　主要结论的证明

为证明本文主要定理 1，需要依次估计方程(2) 中的 $\psi(T)$，方程(8) 中的 $R(T)$ 以及方程(6) 中的 $b(T)$．

3.1　ψ 有界性的证明

引理 2　在假设 1,2,3,4 下，$T > 0$，$z(T)$ 是如下方程的解

$$\mathrm{d}z = \varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s z\,\mathrm{d}T + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\widetilde{W}_s \qquad z(0) = \psi(0) \tag{10}$$

则对 $\varepsilon \in (0, 1)$，$T \leqslant \tau^*$ 有

$$\| \psi(T) - z(T) - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T \mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}[B_s(a, a) + \mathscr{L}_s a]\mathrm{d}\tau \|_\alpha \leqslant C\varepsilon^{1-4k} \tag{11}$$

证　方程(4) 的温和形式为

$$\psi(T)=z(T)+\int_0^T \mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_s a+\mathscr{L}_s\psi+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}B_s(a+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\psi)]\mathrm{d}\tau$$

因此

$$\|\psi(T)-z(T)-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T \mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}[B_s(a,a)+\mathscr{L}_s a]\mathrm{d}\tau\|_\alpha \leqslant$$

$$\|\int_0^T \mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}\mathscr{L}_s\psi\mathrm{d}\tau\|_\alpha+\|\int_0^T \mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}2B_s(a,\psi)\mathrm{d}\tau\|_\alpha+\|\int_0^T \mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}\varepsilon^{\frac{1}{2}}B_s(\psi,\psi)\mathrm{d}\tau\|_\alpha=$$

$$I_1+I_2+I_3$$

下面依次估计 I_1,I_2,I_3.

由引理 1，$0\leqslant\beta<m$，对所有的 $T\leqslant\tau^*$

$$I_1\leqslant\int_0^T\|\mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}\mathscr{L}_s\psi\|_\alpha\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\int_0^T M[\varepsilon^{-1}(T-\tau)]^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{e}^{-K\varepsilon^{-1}(T-\tau)}\|\mathscr{L}_s\psi\|_{\alpha-\beta}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$C\int_0^T\varepsilon^{\frac{\beta}{m}}(T-\tau)^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{e}^{-K\varepsilon^{-1}(T-\tau)}\|\mathscr{L}_s\psi\|_\alpha\mathrm{d}\tau$$

令

$$\eta=\varepsilon^{-1}K(T-\tau)$$

则

$$I_1\leqslant C\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\frac{1}{K}^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{e}^{-\eta}\|\psi\|_\alpha\frac{\varepsilon}{K}\mathrm{d}\eta\leqslant C\varepsilon\|\psi\|_\alpha\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{d}\eta\leqslant C\varepsilon^{1-2k} \tag{12}$$

类似的，对所有的 $T\leqslant\tau^*$

$$I_2\leqslant C\varepsilon\sup_{\tau\in[0,\tau^*]}\|B_s(a,\psi)\|_{\alpha-\beta}\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{d}\eta\leqslant$$

$$C\varepsilon\sup_{\tau\in[0,\tau^*]}\|a(\tau)\|_\alpha\|\psi(\tau)\|_\alpha\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{d}\eta\leqslant$$

$$C\varepsilon^{1-3k} \tag{13}$$

进一步

$$I_3\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}}\sup_{\tau\in[0,\tau^*]}\|B_s(\psi,\psi)\|_{\alpha-\beta}\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{d}\eta\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}-4k} \tag{14}$$

结合(12)－(14)式，(11)式得证.

引理 3[8] 在假设 1,4 下，取方程(10)的初值 $z(0)$ 满足 $\|z(0)\|_\alpha=\mathscr{O}(1)$. 则对每一个 $k_0>0$，$p>1$ 和 $T>0$，存在常数 $C>0$ 使得

$$\mathbf{E}(\sup_{t\in[0,T]}\|z(t)\|_\alpha^{2p})\leqslant C\varepsilon^{-k_0} \tag{15}$$

证 这是一个标准的 OU－过程有界估计，其证明过程可参考文献[8]中引理 20 的证明，区别仅在于 ε 的指数不同.

引理 4 在假设 1,2 下，利用定义 2 中 τ^* 的定义，对所有的 $\varepsilon\in(0,1)$，

$$\mathbf{E}(\sup_{t\in[0,T]}\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T\mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}\mathscr{L}_s a\,\mathrm{d}\tau\|_\alpha^{2p})\leqslant C\varepsilon^{p-2pk} \tag{16}$$

证 利用引理 1 和假设 2，与引理 2 中 I_1 的证明类似，可得对 $T<\tau^*$

$$\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T\mathrm{e}^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}\mathscr{L}_s a\,\mathrm{d}\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\frac{1}{K}^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{e}^{-\eta}\|a\|_\alpha\frac{\varepsilon}{K}\mathrm{d}\eta\leqslant$$

$$C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|a\|_\alpha\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}\mathrm{e}^{-\eta}\eta^{-\frac{\beta}{m}}\mathrm{d}\eta\leqslant$$

$$C\varepsilon^{\frac{1}{2}-k}$$

引理 5 在假设 1 和假设 3 下，利用定义 2 中 τ^* 的定义，对所有的 $\varepsilon\in(0,1)$，

$$\mathbf{E}(\sup_{t\in[0,T]}\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T e^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}B_s(a,a)d\tau\|_\alpha^{2p})\leqslant C\varepsilon^{p-4pk} \tag{17}$$

证 利用引理 1 和假设 2，与引理 2 中 I_2 的证明类似，可得对 $T<\tau^*$

$$\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T e^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}B_s(a,a)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\sup_{\tau\in[0,\tau^*]}\|a\|_\alpha^2\int_0^{\varepsilon^{-1}KT}e^{-\eta}\eta^{-\frac{\beta}{m}}d\eta\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}-2k}$$

引理 6 在引理 2、引理 3、引理 4、引理 5 成立的条件下，对 $p>1$ 和所有的 $k_0>0$，存在常数 $C>0$，使得

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|\psi(T)\|_\alpha^{2p}\leqslant C\varepsilon^{-k_0} \tag{18}$$

证 根据(11)式，由三角不等式和引理 2，有

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|\psi(T)\|_\alpha^{2p}\leqslant C\varepsilon^{2p-8pk}+C\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}\|z(t)\|_\alpha^{2p}+C\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T e^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}\mathscr{L}_s a\,d\tau\|_\alpha^{2p}+C\mathbf{E}\sup_{t\in[0,T]}\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^T e^{\varepsilon^{-1}\mathscr{A}_s(T-\tau)}B_s(a,a)d\tau\|_\alpha^{2p}$$

再根据引理 3、引理 4、引理 5，对于 $k_0\leqslant 2k$，引理 6 得证.

3.2 $R(T)$ 有界性的证明

引理 7 在假设 1,2,3,4 下，对所有的 $p>1$，存在一个常数 C 使得

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|R(T)\|_\alpha^{p}\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}p-6pk} \tag{19}$$

证 欲证(19)式，需对 $R(T)$ 中的每一项进行有界估计. 这些估计依赖于假设 1,2,3 以及对所有 $\gamma\in\mathbb{R}$ 和 $\delta>0$ 成立的不等式 $\|\psi\|_\gamma\leqslant\|\psi\|_{\gamma+\delta}$. 进一步，还使用了 $\mathscr{L}_c a$，$B_c(a,\mathscr{A}_s^{-1}\psi)\in\mathscr{N}$，$\mathscr{N}$是有限维，因此有不等式 $\|\mathscr{L}_c a\|_\alpha\leqslant C\|\mathscr{L}_c a\|_{\alpha-\beta}$，以及算子 $\mathscr{A}_s^{-1}$是 $\mathscr{H}^\alpha$ 空间中的有界线性算子.

与引理 2 中 I_1,I_2,I_3 估计类似，对(8)式中定义的 $R(T)$ 各项有

$$\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}[B_c(a(T),\mathscr{A}_s^{-1}\psi(T))-B_c(a(0),\mathscr{A}_s^{-1}\psi(0))]\|_\alpha\leqslant\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}B_c(a(T),\mathscr{A}_s^{-1}\psi(T))\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}-3k} \tag{20}$$

$$\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^T B_c(\mathscr{L}_c a,\mathscr{A}_s^{-1}\psi)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}-3k},\quad\|2\varepsilon^2\int_0^T B_c(B_c(a,\psi),\mathscr{A}_s^{-1}\psi)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{2-5k} \tag{21}$$

$$\|\varepsilon^2\int_0^T B_c(\mathscr{L}_c\psi,\mathscr{A}_s^{-1}\psi)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{2-4k},\quad\|\varepsilon^{\frac{5}{2}}\int_0^T B_c(B_c(\psi,\psi),\mathscr{A}_s^{-1}\psi)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{5}{2}-6k} \tag{22}$$

$$\|\varepsilon\int_0^T B_c(a,\mathscr{A}_s^{-1}\mathscr{L}_s a)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{1-2k},\quad\|\varepsilon\int_0^T B_c(a,\mathscr{A}_s^{-1}B_s(a,a))d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{1-3k} \tag{23}$$

$$\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^T B_c(a,\mathscr{A}_s^{-1}\mathscr{L}_s\psi)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}-3k},\quad\|\varepsilon^{\frac{3}{2}}\int_0^T B_c(a,\mathscr{A}_s^{-1}B_s(a,\psi))d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}-4k} \tag{24}$$

$$\|\varepsilon^2\int_0^T B_c(a,\mathscr{A}_s^{-1}B_s(\psi,\psi))d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{2-5k},\quad\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\int_0^T\mathscr{L}_c\psi d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}-2k} \tag{25}$$

$$\|\varepsilon\int_0^T B_c(\psi,\psi)d\tau\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{1-4k} \tag{26}$$

我们已经在 τ^* 的定义中给出了 $k<\dfrac{1}{12}$，因此结合(20)式至(26)式，(19)式即可得证.

3.3 $b(T)$ 的先验估计

引理 8 在假设 1,2,3,4 下，设随机过程 $b(T)$ 满足 $\mathbf{E}\|b(0)\|\leqslant C$ 与方程

$$b(T)=b(0)+\int_0^T\mathscr{L}_c b\,d\tau-2\int_0^T b\mathscr{A}_s^{-1}d\widetilde{W}_s(\tau) \tag{27}$$

则对于 $T_0>0$，存在一个常数 C 使得

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\|b(T)\|_\alpha^{p}\leqslant C$$

证　对 $|b|^{2p}$ 使用 Itô 公式有

$$|b(T)|^{2p}=|b(0)|^{2p}+2p\int_0^T|b(s)|^{2p-1}\langle|b(s)|,\mathrm{d}b(s)\rangle+p(2p-1)\int_0^T|b(s)|^{2p-1}\langle\mathrm{d}b(s),\mathrm{d}b(s)\rangle$$

将 $\mathrm{d}b=\mathscr{L}_c b\,\mathrm{d}T-2b\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s$ 代入得

$$\begin{aligned}|b(T)|^{2p}=&|b(0)|^{2p}+2p\int_0^T|b(s)|^{2p-1}\langle|b(s)|,\mathscr{L}_c b\rangle\mathrm{d}s+\\&2p\int_0^T|b(s)|^{2p-1}\langle|b(s)|,-2b\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s\rangle+p(2p-1)\int_0^T|b(s)|^{2p-1}\langle-2b,-2b\rangle\mathrm{d}s\leqslant\\&|b(0)|^{2p}+C_1\int_0^T|b(s)|^{2p}\mathrm{d}s+C_2\int_0^T|b(s)|^{2p+1}\mathrm{d}s+C_3\int_0^T|b(s)|^{2p}\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s\end{aligned}\tag{28}$$

其中使用了 $\langle\mathrm{d}t,\mathrm{d}t\rangle=\langle\mathrm{d}t,\mathrm{d}W(t)\rangle=\langle\mathrm{d}W(t),\mathrm{d}t\rangle=0$，$\langle\mathrm{d}W(t),\mathrm{d}W(t)\rangle=\mathrm{d}t$.

在(28)式两边同时取期望有

$$\mathbf{E}|b(T)|^{2p}\leqslant\mathbf{E}|b(0)|^{2p}+C\int_0^T\mathbf{E}|b(s)|^{2p}\mathrm{d}s$$

由 Gronwall 不等式得

$$\mathbf{E}|b(T)|^{2p}\leqslant C$$

即

$$\sup_{T\in[0,T_0]}\mathbf{E}|b(T)|^{2p}\leqslant C$$

对(28)式先取上确界，再取期望有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}|b(T)|^{2p}\leqslant&\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}|b(0)|^{2p}+C_1\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|b(s)|^{2p}\mathrm{d}s+C_2\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|b(s)|^{2p+1}\mathrm{d}s+\\&C_3\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|b(s)|^{2p}\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s\end{aligned}$$

再使用 B-D-G 不等式和 Hölder 不等式得

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}|b(T)|^{2p}\leqslant\mathbf{E}|b(0)|^{2p}+C\int_0^{T_0}\mathbf{E}|b(s)|^{2p}\mathrm{d}s+C\mathbf{E}\Big(\int_0^{T_0}|b(s)|^{2p}\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant C$$

引理9　在假设1,2,3,4下，b 是方程(27)的解，a 为(7)所定义且满足 $\|a(0)\|\leqslant C$. 若初始条件满足 $a(0)=b(0)$，则对于 $k<\dfrac{1}{12}$ 有

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|a(T)-b(T)\|_\alpha^{2p}\leqslant C\varepsilon^{(1-12k)p}\tag{29}$$

证　令

$$h(T)=a(T)-b(T)$$

$$\tilde{h}(T)=h(T)-R(T)$$

则

$$\mathrm{d}\tilde{h}(T)=\mathscr{L}_c h\,\mathrm{d}\tau-2h\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s$$

对 $|\tilde{h}|^{2p}$ 使用 Itô 公式有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}|\tilde{h}|^{2p}=&2p|h(s)|^{2p-1}\langle|h(s)|,\mathscr{L}_c h\rangle\mathrm{d}T+p(2p-1)|h(s)|^{2p-1}\langle-2h,-2h\rangle\mathrm{d}T+\\&2p|h(s)|^{2p-1}\langle h,-2h\rangle\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s\end{aligned}\tag{30}$$

对(30)式等式两边在 $[0,T]$ 上积分后取上确界，再取期望得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}|\tilde{h}|^{2p}\leqslant&C_1\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|h(s)|^{2p}\mathrm{d}s+C_2\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|h(s)|^{2p+1}\mathrm{d}s+\\&C_3\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|h(s)|^{2p}\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s\end{aligned}\tag{31}$$

又由 $h(T)=\tilde{h}(T)+R(T)$，代入(31)式得

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}|\tilde{h}|^{2p}\leqslant C_4\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|\tilde{h}+R|^{2p}\mathrm{d}s+C_3\mathbf{E}\sup_{T\in[0,T_0]}\int_0^T|\tilde{h}+R|^{2p}\mathscr{A}_s^{-1}\mathrm{d}\widetilde{W}_s\leqslant$$
$$C_4\int_0^{T_0}\mathbf{E}|\tilde{h}|^{2p}\mathrm{d}s+C_4\int_0^{T_0}\mathbf{E}|R|^{2p}\mathrm{d}s+C_3\mathbf{E}(\int_0^{T_0}|\tilde{h}+R|^{2p}\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$C\varepsilon^{(1-12k)p}$$

故

$$\mathbf{E}\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|a(T)-b(T)\|_\alpha^{2p}\leqslant C\varepsilon^{(1-12k)p}$$

3.4　定理 1 的证明

引理 10　设集合 $\Omega^*\subset\Omega$ 且在 Ω^* 上成立

$$\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|\psi\|_\alpha<C\varepsilon^{-2k}\qquad\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|R\|_\alpha<C\varepsilon^{\frac{1}{2}-6k}\qquad\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|b\|_\alpha<C$$

则有 $\mathscr{P}(\Omega^*)\geqslant 1-C\varepsilon^p$.

证　由 Ω^* 定义有

$$\mathscr{P}(\Omega^*)\geqslant 1-\mathscr{P}(\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|\psi\|_\alpha\geqslant C\varepsilon^{-2k})-\mathscr{P}(\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|R\|_\alpha\geqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}-6k})-\mathscr{P}(\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|b\|_\alpha\geqslant C)$$

利用 Chebychev 不等式及引理 6、引理 7、引理 8，对充分大的 q（q 为 p 的共轭指数）有

$$\mathscr{P}(\Omega^*)\geqslant 1-C\varepsilon^{qk}\geqslant 1-C\varepsilon^p$$

定理 1 的证明

结合定义 2 与引理 10 可知

$$\Omega^*\subseteq\{\sup_{T\in[0,\tau^*]}\|\psi\|_\alpha<\varepsilon^{-2k},\ \sup_{T\in[0,\tau^*]}\|a\|_\alpha<\varepsilon^{-k}\}\subseteq\{\tau^*=T_0\}\subset\Omega$$

结合三角不等式与(2)式、(29)式，在 Ω^* 上有

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}T_0]}\|u(t)-\varepsilon b(\varepsilon t)\|_\alpha^{2p}\leqslant\varepsilon^{2p}\mathbf{E}\sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}T_0]}\|a-b\|_\alpha^{2p}+\varepsilon^{3p}\mathbf{E}\sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}T_0]}\|\psi\|_\alpha^{2p}\leqslant$$
$$C\varepsilon^{(3-12k)p}+C\varepsilon^{(3-4k)p}\leqslant$$
$$C\varepsilon^{(3-12k)p}$$

即

$$\sup_{t\in[0,\varepsilon^{-1}T_0]}\|u(t)-\varepsilon b(\varepsilon t)\|_\alpha\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}-6k},\ \left(0<k<\frac{1}{12}\right)$$

在 Ω^* 上成立，定理 1 得证.

参考文献：

[1]　BLÖMKER D, HAIRER M. Amplitude Equations for Spdes: Approximate Centre Manifolds and Invariant Measures [M]//Probability and Partial Differential Equations in Modern Applied Mathematics. New York: Springer, 2005: 41-59.

[2]　KLEPEL K, BLÖMKER D, MOHAMMED W W. Amplitude Equation for the Generalized Swift-Hohenberg Equation with Noise [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik, 2014, 65(6): 1107-1126.

[3]　BLÖMKER D, HAIRER M, PAVLIOTIS G A. Multiscale Analysis for Stochastic Partial Differential Equations with Quadratic Nonlinearities [J]. Nonlinearity, 2007, 20(7): 1721-1744.

[4]　BLÖMKER D, MOHAMMED W W. Amplitude Equations for SPDEs with Cubic Nonlinearities [J]. Stochastics, 2013, 85(2): 181-215.

[5]　ROBERTS A J. A Step towards Holistic Discretisation of Stochastic Partial Differential Equations [J]. ANZIAM Journal, 2003, 45: 1-15.

[6]　WANGW, ROBERTSA J. Macroscopic Reduction for Stochastic Reaction-Diffusion Equations [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2013, 78(6): 1237-1264.

[7]　HUTT A, LONGTIN A, SCHIMANSKY-GEIER L. Additive Noise-Induced Turing Transitions in Spatial Systems with Application to Neural Fields and the Swift-Hohenberg Equation [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2008,

237(6): 755-773.

[8] BLÖMKER D, MOHAMMED W. Amplitude Equation for SPDEs with Quadratic Non-Linearities[J]. Electronic Journal of Probability, 2009, 14: 2527-2550.

[9] MOHAMMED W W, BLÖMKER D, KLEPEL K. Multi-Scale Analysis of SPDEs with Degenerate Additive Noise [J]. Journal of Evolution Equations, 2014, 14(2): 273-298.

[10] BLÖMKER D. Amplitude Equations for Stochastic Partial Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 2007.

[11] BLÖMKER D. Approximation of the Stochastic Rayleigh-Bénard Problem near the Onset of Convection and Related Problems [J]. Stochastics and Dynamics, 2005, 5(3): 441-474.

[12] BLÖMKER D, HAIRER M. Multiscale Expansion of Invariant Measures for SPDEs [J]. Communications in Mathematical Physics, 2004, 251(3): 515-555.

[13] DE BOUARD A, DEBUSSCHE A. Random Modulation of Solitons for the Stochastic Korteweg-de Vries Equation [J]. AnnalesDe l'Institut Henri Poincaré C, AnalyseNon Linéaire, 2007, 24(2): 251-278.

[14] PRADAS M, PAVLIOTIS G A, KALLIADASIS S, et al. Additive Noise Effects in Active Nonlinear Spatially Extended Systems [J]. European Journal of Applied Mathematics, 2012, 23(5): 563-591.

[15] 李兴贵，黄家琳. 不动点技巧在反应扩散模糊随机周期时滞系统稳定性分析中的应用 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(6): 64-72.

Effective Approximation for a Class of SPDEs

LI Yi-jun, CHEN Guang-gan

School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China

Abstract: In this paper we consider a class of stochastic partial differential equations(SPDEs). Near a change of stability of the system, we use the transformation of time-scales to derive an effective approximating system which is driven by the kernel space of the operator of the original SPDEs. Furthermore, we give the accurate approximation form and the convergence rate.

Key words: stochastic partial differential equation(SPDE); transformation of time-scales; effective approximation

责任编辑 张 枸